28839 PÉRAUD Arthur

Triangulation de polygone, problème de la galerie d'art.

L'étude de la triangulation apparaît en géométrie algorithmique et permet de résoudre plus facilement des problèmes portant sur la région qu'elle triangule. Cela est très utile pour tout ce qui se représente en 2D, 3D. Son application à l'étude de la surface d'un musée s'inscrit dans le thème de l'année.

Le sujet choisi nécessite une représentation graphique, son utilisation étant hors programme. Le problème de la galerie d'art m'a semblé propice à son apprentissage. En effet faire de la géométrie à l'aide de l'informatique m'intéresse particulièrement sachant que la triangulation s'applique à la réalité virtuelle et aux jeux vidéo.

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*
- *MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées)*
- *MATHEMATIQUES (Analyse)*

Mots-clés (ÉTAPE 1) :

Mots-clés (en français)	**Mots-clés (en anglais)**
Triangulation	*Triangulation*
Polygone simple	*Simple polygon*
Polygone monotone	*Monotone polygon*
Nombres de Catalan	*Catalan Numbers*
Polygone convexe	*Convex polygon*

Bibliographie commentée

Les nombres de Catalans apparaissent dans de nombreux problèmes de combinatoire, introduit en 1751 par Euler après s'être intéressé aux nombres de façons qu'il y a de diviser un polygone convexe en triangles. Une relation de récurrence nous conduira à obtenir une formule sur les nombres de Catalan et à obtenir une expression de ces nombres à l'aide des coefficients binomiaux en utilisant la théorie des séries entières **[1]**. Cette introduction à la triangulation par son dénombrement dans le cas d'un polygone convexe nous montre de façon intuitive comment les trianguler. En effet trianguler un polygone convexe se fait en temps linéaire, en O (n) n étant le nombre de sommets du polygone. Mais cela soulève une certaine question : qu'en est-il pour un polygone non-convexe dont la forme est plus complexe ?

Un polygone est dit simple si deux côtés non-consécutifs ne se rencontrent pas et deux côtés consécutifs n'ont en commun que l'un de leur sommet. En particulier, un polygone convexe est simple. En 1899 Max Dehn, invente une manière de trianguler un polygone simple par la "méthode des oreilles", c'est un algorithme qui s'implémente en $O(n^2)$ **[2]**. L'oreille d'un polygone est un triangle qui se forme à partir de deux arrêtes appartenant à la frontière du polygone, et d'une troisième arrête qui se situe à l'intérieur du polygone.

Il est cependant possible de faire mieux **[3]**, sachant que trianguler des polygones convexes est linéaire, on peut chercher à décomposer un polygone simple en sous-polygones convexes. Cela est difficile, en 1991 Fournier et Montuno ont développé une méthode similaire, mais avec une décomposition en sous-polygones monotones d'un polygone simple (non-monotone) qui permet une triangulation en O(nlog n). Un polygone est dit monotone par rapport à une droite D, si chacune des droites orthogonales à D coupe la frontière du polygone au plus deux fois. En effet, ils ont d'abord développé un algorithme linéaire triangulant un polygone monotone. Ainsi, on peut décomposer tout polygone simple en sous-polygones monotones et appliquer la triangulation d'un polygone monotone sur les parties du polygone décomposé. **[3][4]**

Afin de localiser les endroits où placer les caméras de façon optimale, on utilise un 3-coloriage du polygone triangulé. On couvrira le polygone en choisissant la couleur qui minimise le nombre de gardiens. La couverture comportera au plus #partie entière de n/3 gardiens d'après Steve Fisk dans le livre *Raisonnements divins*. On retrouve le théorème de la galerie d'art démontré par Václav Chvátal en 1973 qui dit que pour garder un polygone simple à n sommets #partie entière de n/3 gardiens suffisent, et cette borne peut être atteinte. **[3]**

Problématique retenue

Il s'agit de répondre à la question suivante : comment placer des caméras afin de surveiller une galerie d'art de façon optimale ?

Objectifs du TIPE du candidat

I) Détermination du nombre de triangulations dans le cas d'un polygone convexe, établissement de la formule définissant les nombres de Catalan

II) Étude d'un problème informatique : triangulation d'un polygone simple, monotone.

III) Application sur le plan d'un musée en réponse au problème de la galerie d'art.

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] ANTHONY SAINT-CRIQ : Nombres de Catalans *: https://www.math.univ-toulouse.fr /~schechtman/saint-criq-catalan.pdf*

[2] FRÉDÉRIC LEGRAND : Triangulation d'un polygone simple *: https://www.f-legrand.fr /scidoc/srcdoc/graphie/geometrie/polygone/polygone-pdf.pdf*

[3] CHRISTIAN NGUYEN : Partitionnement en sous-polygones monotones *: https://nguyen. univ-tln.fr/share/GeomAlgo/trans_ triang.pdf*

[4] ALAIN FOURNIER, DELFIN Y. MONTUNO : Triangulating Simple Polygons and Equivalent Problems *: 1991*

Références bibliographiques (ÉTAPE 2)

[1] GANG MEI, JOHN C.TIPPER, NENGXIONG XU : Ear-clipping Based Algorithms of Generating High-quality Polygon Triangulation *: https://arxiv.org/pdf/1212.6038.pdf#:~:text=The%20ear%20clipping%20triangulation%20algorithm,newly%20formed%20triangle%20is%20valid.*

DOT

[1] *: Octobre - Novembre 2022 : Recherche documentaire sur la triangulation de polygone convexe puis simple ce qui amène au choix d'aborder les nombres de catalan et le problème de la galerie d'art.*

[2] *: Décembre 2022 : Compréhension de la triangulation d'un polygone convexe, et du lien entre les nombres de catalans et le nombre de façons de trianguler un polygone convexe.*

[3] *: Janvier 2023 : Choix d'étude de 2 algorithmes de triangulations, la méthode des oreilles et la décomposition monotone.*

[4] *: Février - Avril 2023 : Implémentation d'une interface graphique en OCAML et implémentation de la méthode des oreilles et du 3 coloriage en réponse au problème de la galerie d'art.*

[5] *: Fin Avril - mi Mai 2023 : Implémentation de la décomposition en sous-polygone monotone et triangulation de polygone monotone qui ne fonctionne pas ce qui remet en question ma compréhension sur une des structures de données utilisées.*

[6] *: Fin Mai - Début Juin 2023 : Tentative de correction échouée, la décomposition et triangulation ne sont pas complètes. Exploitation de données pour la présentation.*