Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра вычислительных методов и программирования

А.И. Волковец, А.Б. Гуринович

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Практикум для студентов всех специальностей
очной формы обучения БГУИР

Минск 2006

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.171+22.172 я 73
В 54

Аннотация

В 54 «Теория вероятностей и математическая статистика» Практикум для студентов всех специальностей очной формы обучения БГУИР/ А.И. Волковец, А.Б. Гуринович. - Мн.: БГУИР, 2006- 68 с.: ил.

ISBN 985-444-533-X.

Методическое пособие содержат задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика". Темы практических занятий соответствуют типовой рабочей программе курса. Во всех разделах приводятся необходимые теоретические сведения и примеры решения типовых задач.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.171+22.172 я 73

ISBN 985-444-533-X.

СОДЕРЖАНИЕ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Достоверным называется событие Ω, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие ∅, которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\cdot B$, $A\cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что оба события A и B происходят вместе.

Противоположным событию A называется такое событие $\overline{A}$, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k=1, 2, ..., n) образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

При преобразовании выражений можно пользоваться следующими тождествами:

$$A+\overline{A}=\Omega; \qquad A\cdot\overline{A}=\varnothing; \qquad A+\Omega=\Omega; \qquad A\cdot\Omega=A; \qquad A\cdot\varnothing=\varnothing;$$

$$A+\varnothing=A; \qquad \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}; \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}; \qquad A+\overline{A}\cdot B=A+B\,.$$

Классическое определение вероятности: вероятность случайного события A определяется по формуле

$$p(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n - число равновозможных исходов данного опыта;

m - число равновозможных исходов, приводящих к появлению события.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом попадает точка T, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T. Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$p(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{1.2}$$

где S(A) и S(Ω) — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей A и Ω соответственно.

Основные комбинаторные формулы

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$, состоящее из n различных элементов. (n, r)-***выборкой*** называется множество, состоящее из r элементов, взятых из множества X.

Упорядоченной называется выборка, для которой важен порядок следования элементов. Если каждый элемент множества X может извлекаться несколько раз, то выборка называется ***выборкой с повторениями***.

Число упорядоченных (n, r)-выборок (***размещений***) с повторениями $\hat{A}(n,r)$ и без повторений $A(n,r)$ равно

$$\hat{A}(n,r) = n^r\ , \tag{1.3}$$

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}\,. \tag{1.4}$$

Если $r=n$, то размещения без повторений называются ***перестановками,*** т.е. это - расположение элементов исходного множества в определенном порядке. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! = 1\cdot\ldots\cdot n\,. \tag{1.5}$$

Пустое множество можно упорядочить только одним способом: $P_0 = 0! = 1$.

Число неупорядоченных (n, r)-выборок (***сочетаний***) с повторениями $\hat{C}_n^r$ и без повторений C_n^r равно

$$\hat{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}\ , \tag{1.6}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ . \tag{1.7}$$

Число различных разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств (причем в 1-м подмножестве r_1 элементов, во 2-м r_2 элементов и т.д., а $n = r_1 + r_2 +... + r_k$) равно

$$P_n(r_1, r_2, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1!\,r_2!...r_k!}\ . \tag{1.8}$$

Пример 1.1. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность p того, что следующий транзистор будет стандартным.

Решение. Всего осталось для проверки $n+m-k$ транзисторов, из которых стандартных $n-k$. По формуле классического определения вероятности

$$p = \frac{n-k}{n+m-k}.$$

Пример 1.2. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь студентов третьего курса. Из этого состава наугад выбирают пять человек. Найти вероятность того, что все первокурсники попадут в совет.

Решение. Число способов выбрать пять человек из 3+5+7=15 равно числу сочетаний из 15 по 5 (неупорядоченная выборка без повторений):

$$C_{15}^{5}=\frac{15!}{5!\cdot 10!}=3003\,.$$

Выбрать трех первокурсников из трех можно одним способом. Оставшихся двух членов совета можно выбрать C_{12}^{2} способами:

$$C_{12}^{2}=\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66\,.$$

Искомая вероятность p=66/3003=2/91.

Пример 1.3. Банковский сейф имеет кодовый замок, состоящий из шести дисков с восемью буквами на каждом. Сейф открывается при наборе единственной комбинации букв. Злоумышленник пытается открыть сейф, причем на проверку одной кодовой комбинации у него уходит 10 секунд. Какова вероятность того, что злоумышленник успеет открыть сейф, если в его распоряжении 1 час?

Решение. Обозначим искомую вероятность через P(A). По формуле (1.1) она будет равна m/n . Здесь n - общее число исходов, равное числу кодовых комбинаций замка, оно определяется по формуле (1.3) и равно 8^6; m - число благоприятствующих исходов, в данном случае равное числу комбинаций, которые успеет испробовать злоумышленник за 1 час, т.е. 360. Таким образом, искомая вероятность будет равна $P(A)=\dfrac{360}{8^6}\approx 1,4\cdot 10^{-3}$.

ЗАДАЧИ

1.1. Пусть A, B, C — три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить следующие события через события A, B и C: D = {ни одно из трех событий A, B, C не произойдет); E = { из трех событий A, B, C произойдет ровно одно}; F = {из трех событий произойдет ровно два}; G = {из трех событий произойдет хотя бы одно]; H = {из трех событий произойдет не менее двух}.

Ответ:
$$D=\overline{A}\overline{B}\overline{C}, E=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C, F=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC, G=A+B+C, H=AB+AC+BC\,.$$

1.2. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Прибор работает, если исправен хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Пусть события: A_i , i = 1, 2 — исправен i-й блок первого типа, B_j , j=1, 2, 3 — исправен j- блок второго типа. Выразить событие C, означающее работу прибора, через события A_i, и B_j.

Ответ: C = $(A_1 + A_2)(B_1 B_2 + B_1, B_3 + B_2 B_3)$.

1.3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

Ответ: 0,096.

1.4. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся сидящими рядом?

Ответ: 2/7.

1.5. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на любом этаже, кроме первого, найти вероятность тоге, что на каждом этаже выйдет по одному пассажиру.

Ответ: 5/324.

1.6. Из разрезной азбуки выкладывается слово МАТЕМАТИКА. Затем все буквы этого слова перемешиваются и выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово МАТЕМАТИКА

Ответ: $6{,}6 \cdot 10^{-6}$.

1.7. Самолет, имеющий радиолокационную станцию с дальностью действия d, осуществляет поиск со скоростью v в достаточно большом районе площадью S, в любой точке которого может находиться в течение времени t подводная лодка. Найти вероятность p обнаружения подводной лодки, если время t невелико и лодка обнаруживается при попадании в зону действия радиолокатора.

Ответ: $(\pi d^2 + 2d\ v\ t) / S$.

1.8. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода пароходов независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать причала, если время стоянки первого парохода — один час, а второго – два часа.

Ответ: 139/1152.

2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность ***суммы несовместных событий*** $A_1, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий

$$p\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right). \quad (2.1)$$

Вероятность ***суммы двух совместных событий*** равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$p(A+B) = p(A)+p(B)-p(A\cdot B), \quad (2.2)$$

Вероятность ***суммы трех совместных событий*** вычисляется по следующей формуле:

$$p(A+B+C) = p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cdot B)-p(B\cdot C)-p(A\cdot C)+p(A\cdot B\cdot C). \quad (2.3)$$

Вероятность ***суммы n событий*** $A_1, \ldots, A_n$ равна

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i_1=1}^{n} p\left(A_{i_1}\right) - \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} p\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} p\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) + \ldots + (-1)^{n+1} p\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right).$$

С учетом того, что $p(A) = 1 - p(\overline{A})$, вероятность суммы n событий (если $n>3$) удобнее вычислять по формуле

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - p(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n). \quad (2.4)$$

Вероятность ***произведения двух событий*** равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого.

$$p(AB) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B). \quad (2.5)$$

Для независимых событий

$$p(AB) = p(A)p(B). \quad (2.6)$$

Вероятность ***произведения n событий*** $A_i (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ равна

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2 / A_1)\cdot p(A_3 / A_1 \cdot A_2)\cdot \ldots \cdot p(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}), \quad (2.7)$$

где $p(A_k / A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}))$ - вероятность появления события A_k, при условии, что события $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{k-1}$ в данном опыте произошли.

В случае независимых событий данная формула упрощается:

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot \ldots \cdot p(A_n). \quad (2.8)$$

Пример 2.1. Сообщение передается одновременно по n каналам связи, причем для надежности по каждому каналу оно повторяется k раз. При одной передаче сообщение (независимо от других) искажается с вероятностью p. Каждый канал связи (независимо от других) «забивается» помехами с вероятностью q; «забитый» канал не может передавать сообщения. Найти вероятность того, что адресат получит сообщение без искажений.

Решение. Обозначим события:

A = {хотя бы один раз сообщение передано без искажений};

B_i = {по i-му каналу сообщение хотя бы один раз было передано без искажений}.

Для выполнения события B_i i-й канал, во-первых, не должен быть забит помехами и, во-вторых, хотя бы одно сообщение по нему не должно быть искажено.

Вероятность того, что канал не «забит» помехами, равна 1-q.

Вероятность того, что хотя бы одно сообщение передано без помех, равна 1-p^k (p - вероятность того, что все сообщения переданы с искажениями).

Тогда $p(B) = (1 - q)\cdot(1 - p^k)$.

Вероятность события A, состоящего в том, что хотя бы на одном канале произойдет событие, равна

$$p(A)=p\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=1-p(\bar{A})=1-p\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{B}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p(B_i))=1-[1-(1-q)(1-p^k)]^n.$$

Пример 2.2 Какова вероятность угадать в спортлото “5 из 36” не менее трех номеров?

Решение. Событие A - угадать не менее трех номеров в спортлото, разбивается на сумму трех несовместных событий:

A_3 - угадать ровно три номера;

A_4 - угадать ровно четыре номера;

A_5 - угадать ровно пять номеров.

При этом $p(A)=p(A_3)+p(A_4)+p(A_5)$, так как события несовместны.

Найдем вероятность $p(A_3)$. Для этого воспользуемся формулой (1.1). Здесь общее число комбинаций n по формуле (1.7) будет равно числу возможных заполнений карточек:

$$n = C_{36}^5 = \frac{36!}{5!(36-5)!} = 376992.$$

Число благоприятствующих комбинаций m в этом случае определяется следующим образом. Выбрать три номера из пяти выигравших можно $C_5^3 = 10$ способами. Однако каждый выбор трех правильных номеров сочетается с выбором двух неправильных номеров. Число таких выборок равно $C_{31}^2 = 465$. Таким образом, число благоприятствующих событий равно произведению найденных чисел:

$$m = C_5^3 \cdot C_{31}^2 = 10 \cdot 465 = 4650.$$

Тогда $P(A_3) = \frac{m}{n} = \frac{4650}{376992} \approx 0{,}123 \cdot 10^{-1}$.

Аналогично вычисляются $p(A_4) = 0{,}478 \cdot 10^{-3}$, $p(A_5) = 0{,}265 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$p(A) = 0{,}123 \cdot 10^{-1} + 0{,}478 \cdot 10^{-3} + 0{,}265 \cdot 10^{-5} = 0{,}128 \cdot 10^{-1}.$$

Пример 2.3. В урне a белых b черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Введем следующие обозначения: A – шар белый, B – шар черный, C - шары разных цветов. Событие C может появиться в двух несовместных вариантах: (Б,Ч) или (Ч,Б). По правилу умножения вероятностей:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1}$$

$$p(BA) = p(B) \cdot p(A/B) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1}$$

По правилу сложения вероятностей несовместных событий

$$p(C) = p(AB) + p(BA) = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

ЗАДАЧИ

2.1. Вероятность безотказной работы блока в течение заданного времени равна 0,8. Для повышения надежности устанавливается такой же резервный блок. Найти вероятность безотказной работы системы с резервным блоком.

Ответ: 0,96.

2.2. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два неповторяющихся вопроса. Экзаменуемый знает ответы на 35 вопросов. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос билета и один дополнительный вопрос из других билетов.

Ответ: 0.837.

2.3. На шахматную доску наудачу ставят две ладьи. Вычислить $P(B/A)$, если A ={ладьи попали на клетки разного цвета}, B={ладьи побьют друг друга}.

Ответ: 0,25.

2.4. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью p, а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

Ответ: p.

2.5. Продолжение. Все трое членов жюри принимают независимо друг от друга правильное решение с вероятностью p. Каким должно быть p, чтобы данное жюри принимало правильное решение с большей вероятностью, чем жюри из предыдущей задачи?

Ответ: p>1/2.

2.6. Имеется 10 ключей, из которых лишь один подходит к двери. Ключи пробуют подряд. Какова вероятность, что годный ключ попадет на четвертом шаге?

Ответ: 0.1.

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Допустим, что проводится некоторый опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (*гипотез*): $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Событие A может появляться совместно с одной из гипотез H_i. Тогда ***полная вероятность*** события A равна

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A/H_i). \tag{3.1}$$

Если опыт произведен и произошло некоторое событие A, то определить вероятность гипотезы H_k с учетом того, что произошло событие A, можно по ***формуле Байеса***:

$$P(H_k)/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \tag{3.2}$$

Пример 3.1. В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектом, второго — 5% и третьего — 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25% телевизоров с первого завода, 55% — со второго и 20% — с третьего?

Решение. С рассматриваемым событием A={приобретенный телевизор оказался с дефектом } связано три гипотезы: H_1={телевизор выпущен первым заводом}, H_2={выпущен вторым заводом }, H_3={выпущен третьим заводом}. Вероятности этих событий определяются из условия задачи: $p(H_1)=0{,}25$; $p(H_2)=0{,}55$; $p(H_3)=0{,}2$. Условные вероятности события А также определяются из условия задачи: $p(A/H_1)=0{,}1$; $p(A/H_2)=0{,}05$; $p(A/H_3)=0{,}03$. Отсюда по формуле полной вероятности следует:

$p(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}55 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}0585$.

Пример 3.2. На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует наличие сигнала, если поступает только помеха, то регистрируется наличие сигнала с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала. Какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Решение. С рассматриваемым событием A={приемник зарегистрировал наличие сигнала} связано две гипотезы: H_1={пришел сигнал и помеха}, H_2={пришла только помеха}. Вероятности этих гипотез $p(H_1)=0{,}9$, $p(H_2)=0{,}1$. Условные вероятности события A по отношению к гипотезам H_1 и H_2 находим из условия задачи: $p(A/H_1)=0{,}8$, $p(A/H_2)=0{,}3$.

Требуется определить условную вероятность гипотезы $H1$ по отношению к событию A, для чего воспользуемся формулой Байеса:

$$p(H_1/A)=\frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1)+p(H_2)\cdot(A/H_2)}=\frac{0{,}9\cdot 0{,}8}{0{,}9\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}3}=0{,}96.$$

Пример 3.3. Для решения вопроса идти в кино или на лекцию, студент подбрасывает монету. Если студент пойдет на лекцию, он разберется в теме с вероятностью 0,9, а если в кино - с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что студент разберется в теме?

Решение. Применим формулу полной вероятности (3.1). Пусть A - событие, состоящее в том, что студент разобрался в теме, событие (гипотеза) H_1 - студент идет в кино, H_2 - студент идет на лекцию. Известны из условия задачи следующие вероятности:

$P(H_1)=P(H_2)=0.5$; $P(A/H_1)=0{,}3$; $P(A/H_2)=0{,}9$.

Искомая вероятность события A будет равна

$P(A) = P(H_1)\ P(A/ H_1)+ P(H_2)\ P(A/ H_2)=0{,}5\ 0{,}3+0{,}5\ 0{,}9=0{,}6$.

Пример 3.4. Пусть одна монета из 10 000 000 имеет герб с обеих сторон, остальные монеты обычные. Наугад выбранная монета бросается десять раз, причем во всех бросаниях она падает гербом кверху. Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами?

Решение. Применим формулу Байеса (3.2). Пусть событие A - монета десять раз подряд падает гербом кверху. Гипотезы: H_1 - выбрана обычная монета; H_2 - выбрана монета с двумя гербами. По условию задачи необходимо определить условную вероятность $P(H_2/A)$. Неизвестные в формуле (3.2) вероятности равны

$P(H_1)=0{,}9999999$; $P(H_2)=10^{-7}$;

$P(A/H_1)=0{,}5^{10}$; $P(A/H_2)=1$.

Следовательно,

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}=\frac{10^{-7}\cdot 1}{10^{-7}\cdot 1+0{,}9999999\cdot 0{,}5^{10}}\approx 1{,}02\cdot 10^{-4}.$$

ЗАДАЧИ

3.1. Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй — три белых и пять черных. Из первой и второй урн не глядя берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары из третьей урны перемешиваются и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белый.

Ответ: 31/80.

3.2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Нормальный режим полета составляет 80% времени полета, перегрузка — 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0.1, в условиях перегрузки — 0,4. Вычислять надежность прибора за время полета.

Ответ: 0.84.

3.3. Шесть шаров, среди которых 3 белых и 3 черных, распределены по двум урнам. Наудачу выбирается урна, а из нее один шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность вынуть белый шар была максимальной?

Ответ: в одной урне один белый шар, а в другой - остальные.

3.4. Среди поступающих на склад деталей 30% — из цеха № 1, 70% — из цеха № 2. Вероятность брака для цеха № 1 равна 0,02; для цеха № 2 — 0,03. Наудачу взятая деталь оказалась доброкачественной. Какова вероятность того, что она изготовлена в цехе № 1?

Ответ: 0,302.

3.5. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой коробке 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй 10, из них 3 неисправных. Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

Ответ: из первой.

3.6. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени Т) первого узла равна 0,9, второго 0,8. За время испытаний в течение времени Т зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказал только первый узел.

Отчет: 0,85.

3.7. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого стрелка соответственно равны: 0,7, 0,75, 0,8. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени осталось две пробоины?

Ответ: 0.33.

3.8. Но каналу связи передается цифровой текст, содержащий только три цифры 1, 2, 3, которые могут появляться в тексте с равной вероятностью. Каждая передаваемая цифра в силу наличия шумов принимается правильно с вероятностью 0,9 и с вероятностью 0,1 принимается за какую-либо другую цифру. Цифры искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано 111, если принято 123.

Ответ: 0,0025.

4. ПОВТОРЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

Пусть производится n независимых одинаковых опытов. В результате каждого опыта событие A появляется с вероятностью p. Вероятность $P(n,k)$ того, что в последовательности из n опытов событие A произойдет ровно k раз (***формула Бернулли***), равна

$$P(n,k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}, 0 \le k \le n, \tag{4.1}$$

где $q = 1 - p$ - вероятность того, что событие A не произойдет в одном опыте.

Вычисление вероятностей $P(n,k)$ при больших значениях n по формуле Бернулли проблематично. Поэтому вычисление соответствующих вероятностей проводится с помощью следующих приближенных формул.

Если количество испытаний велико $n \to \infty$, а вероятность события мала $p \to 0$, так что $np \to a$, $0 < a < \infty$ и $p << \frac{1}{\sqrt{n}}$, то используется ***формула Пуассона***

$$P(n,k) \approx \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, k = \overline{0,n}. \tag{4.2}$$

Если количество испытаний n велико, вероятности p и q не малы, так что выполняются следующие условия:

$$0 < np - 3\sqrt{npq}, \quad np + 3\sqrt{npq} < n,$$

то применяются приближенные формулы ***Муавра-Лапласа***:

- ***локальная***

$$P(n,k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{4.3}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}};$$

- ***интегральная***

$$P(n, k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{4.4}$$

где $x_1 = \frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ - функция Лапласа.

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы (см. приложение). При использовании таблиц следует помнить, что $\varphi(x)$ является четной ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), а функция Лапласа нечетной ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться одно из событий A_1, A_2, ... , A_r с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_r$ соответственно.

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A_1 наступит ровно k_1 раз, событие A_2 — k_2 раз, ... , событие A_r — k_r раз ($k_1 + \ldots + k_r = n$) равна

$$P(n, k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}. \qquad (4.5)$$

Пример 4.1. По каналу связи передается $n = 6$ сообщений, каждое из которых независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}2$ оказывается искаженным. Найти вероятности следующих событий:

A = {ровно два сообщения из шести искажены},

B = {не менее двух сообщений из шести искажены},

C = {все сообщения будут переданы без искажений},

D = {все сообщения будут искажены}.

Решение. По формуле Бернулли (4.1)

$$P(A) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} 0{,}2^2 \cdot 0.8^4 = 0{,}197,$$

$$P(B) = P(6,2) + P(6,3) + P(6,4) + P(6,5) + P(6,6) = 1 - P(6,0) - P(6,1) =$$

$$= 1 - C_6^0 p^0 (1-p)^6 - C_6^1 p^1 (1-p)^5 = 1 - 0{,}8^6 - 6 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}345,$$

$$P(C) = (1-p)^6 = 0{,}262, \qquad P(D) = p^6 = 0{,}2^6 = 0{,}000064.$$

Пример 4.2. Вероятность появления события A за время испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появится: а) 80 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) не менее 75 раз.

Решение

1) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P(100, 80) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}, \qquad x = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0.$$

$\varphi(0) = 0{,}3989$, тогда $P(100,80) = 0{,}0997$.

2) Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$P(100, 75 < k < 90) = \Phi\left(\frac{90-80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75-80}{4}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Значение функции Лапласа определяем по таблице Лапласа: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3943$. $P(100, 75 < k < 90) = 0{,}8881$.

ЗАДАЧИ

4.1. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов за время T одинаковы и равны p=0,2. Найти вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 3 элемента из восьми.

Ответ: 0,203.

4.2. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5% всех деталей не удовлетворяют стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

Ответ: $n > 59$.

4.3. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,78. Чему равно наивероятнейшее число наступления события в 150 опытах?

Ответ: 117.

4.4. Вероятность появления событий в каждом из 100 независимых испытании равна $p = 0.8$. Найти вероятность того, что событие появляется не менее 75 раз и не более 90 раз?

Ответ: 0,8882.

4.5. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений.

Ответ: а) 0,3487; б) 0,0574; в) 0,9872.

4.6. Из одной ЭВМ в другую необходимо переслать файл объемом 10 000 символов. Вероятность ошибки при передаче символа составляет 0,001.

а) определить вероятность безошибочной передачи файла;

б) вычислить вероятность того, что в переданном файле будет ровно 10 ошибок;

в) определить, какова должна быть вероятность ошибки при передаче одного символа, чтобы вероятность передачи всего файла без ошибок составила 0,99.

Ответ: а) $8.54\cdot 10^{-4}$; б) 0,126; в) $1,005\cdot 10^{-6}$.

4.7. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз.

Ответ: 100.

4.8. Вероятность успеха в каждом испытании равна p. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех происходит в n-м испытании. Вычислить эту вероятность для p=0.7; k =5, n=12.

Ответ: 0,0011.

5. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Под ***случайной величиной*** (СВ) понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем, заранее, до опыта, неизвестно, какое именно. Случайные величины в зависимости от вида множества значений могут быть *дискретными* или *непрерывными*.

Закон распределения случайной величины — это любая функция, таблица, правило и т.п., устанавливающая соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции x:

$$F(x) = p\{X<x\}. \qquad (5.1)$$

Свойства функции распределения:

1. $F(-\infty) = 0$.
2. $F(+\infty) = 1$.
3. $F(x_1) \le F(x_2)$, при $x_1 < x_2$.
4. $p(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. (5.2)

Рядом распределения дискретной СВ X называется таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения СВ $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_{i-1} < x_i$), а в нижней — вероятности их появления $p_1, p_2, ... , p_n$, где $p_i=p\{X=x_i\}$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Так как события $\{X=x_1\}$, ... , $\{X=x_n\}$ несовместны и образуют полную группу, то справедливо контрольное соотношение

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \qquad (5.3)$$

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i). \qquad (5.4)$$

Плотностью распределения (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x+\Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \qquad (5.5)$$

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \ge 0$.

2. Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$ (5.6)

3. Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b[$ равна:

$$p\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5.7)$$

4. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X выражается через ее плотность:

$$F(x) = p\{X < x\} = p\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (5.8)$$

Пример 5.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,6. Число попаданий в цель - случайная величина *X*. Определить ряд распределения и функцию распределения величины *X*.

Решение. Случайная величина *X* может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной *X* этих значений, используя формулу Бернулли:

$P\{X=0\} = (1-p)^5 = 0,4^5 = 0,01024$,

$P\{X=1\} = C_5^1 p(1-p)^4 = 5 \cdot 0,6 \cdot 0,4^4 = 0,0768$,

$P\{X=2\} = C_5^2 p^2(1-p)^3 = 10 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,2304$,

$P\{X=3\} = C_5^3 p^3(1-p)^2 = 10 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,3456$,

$P\{X=4\} = C_5^4 p^4(1-p) = 5 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 = 0,2592$,

$P\{X=5\} = p^5 = 0,6^5 = 0,07776$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

Функцию распределения определим по формуле (5.4) для переменных :

$x \le 0 \quad F(x) = 0$,

$0 < x \le 1 \quad F(x) = p_0 = 0{,}01024$,

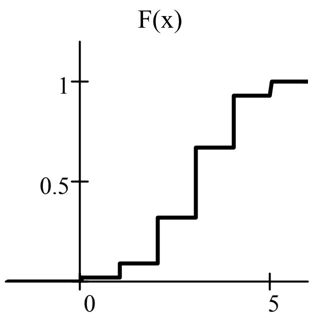
$1 < x \le 2 \quad F(x) = p_0 + p_1 = 0{,}08704$,

$2 < x \le 3 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0.31744$,

$3 < x \le 4 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.66304$,

$4 < x \le 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.92224$,

$x > 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$.



x	≤0	]0;1]	]1;2]	]2;3]	]3;4]	]4;5]	>5
F(x)	0	0,01024	0.08704	0.31744	0.66304	0.92224	1

Пример 5.2. Случайная величина *X* распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F(x)$ и вычислить $p\{|x| < \pi/4\}$.

Решение. Константу c вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cos x dx = c\sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1,$$

откуда $c = 0{,}5$.

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности:

для $x < -\pi/2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0$,

для $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{\cos y}{2}dy = \frac{\sin y}{2}\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{1+\sin x}{2}$,

для $x > \pi/2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos y}{2}dy + \int_{\pi/2}^{x} 0dy = 1$.

Окончательно имеем

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ (1+\sin x)/2, & |x| \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Вероятность $p\{|x| < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ЗАДАЧИ

5.1. На проверку поступают партии из 4 приборов. Проверка партии прекращается после обнаружения первого неисправного прибора. Вероятность того, что прибор пройдет проверку, равна 0,6. Случайная величина X — число проверенных приборов в одной партии. Определить ряд распределения, функцию распределения *F(x)* и построить ее график.

Ответ:

x_i	1	2	3	4
p_i	0.4	0.24	0.144	0.216

x	≤1	]1;2]	]2;3]	]3;4]	>4
F(x)	0	0.4	0.64	0.784	1

5.2. Случайная величина X принимает значения X = i (i =1, 2, ...) с вероятностью $p\{X{=}\mathrm{i}\} = 2^{-\mathrm{i}}$. Найти функцию F(x) и вычислить $p\{3 \le X \le 6\}$.

Ответ: $F(x) = \sum_{i<x} 2^{-i}$; $p(3 \le X \le 6)$=0,2344.

5.3. Из десяти транзисторов, среди которых два бракованные, случайным образом выбраны два транзистора для проверки их параметров. Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных транзисторов в выборке; б) функцию распределения *F(x)* величины X; в) вычислить $p\{X \ge 0{,}5\}$, $p\{X < 1{,}5\}$.

Ответ:

а)

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

б)

x	≤0	]0;1]	]1;2]	>2
F(x)	0	1/45	17/45	1

в)

$p\{X \ge 0{,}5\}$=44/45, $p\{X < 1{,}5\}$=17/45.

5.4. Точку бросают наудачу внутрь круга радиусом R. Вероятность ее попадания и любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения расстояния от случайной точки до центра круга.

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ x^2, 0 < x \le R, \\ 1, x > R. \end{cases}$

5.5. Для случайной величины X плотность вероятности f(x)=ax при $x \in [0; 2]$, f(x) =0 при x<0 и x>2. Найти коэффициент a, функцию распределения *F(x)*, вероятность попадания на отрезок [1; 2].

Ответ: a = 0,5; $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0.25x^2, 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$ $p\{X \in [1; 2]\}$ = 0,875.

5.6. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = b + c\, arctg(x/a),\ -\infty < x < \infty.$$

Чему должны быть равны *a, b* и *c*? Найти плотность вероятности.

Ответ: a>0, b=0,5, c=1/π, $f(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$.

6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ и определяется по формулам:

$$m_X = \mathrm{M}[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i \quad \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \quad \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Свойства математического ожидания:

1. M[c] = c.
2. M[X+c] = M[X]+c.
3. M[c·X] = c·M[X].

Начальный момент k-го порядка СВ X есть математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k(x) = \mathrm{M}[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i^k \cdot p_i \quad \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx \quad \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называется СВ, математическое ожидание которой находится в начале координат (в центре числовой оси) $M[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Операция центрирования (переход от нецентрированной величины X к центрированной $\overset{\circ}{X}$) имеет вид:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X \quad .$$

Центральный момент порядка k СВ X есть математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$:

$$\mu_k(x) = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^k \cdot p_i \quad \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k \cdot f(x)dx \quad \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формулам:

$$D_x = D[X] = \mu_2(x) = \alpha_2(\mathrm{x}) - m_X^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} p_i - m_X^2 \ \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 \ \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (6.4)$$

Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$.
2. $D[X+c] = D[X]$.
3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D[X]$.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_X = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \qquad (6.5)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3σ. Практически все значения СВ находятся в интервале

$$[\ m_X - 3\sigma_X;\ \ m_X + 3\sigma_X;\ ]. \qquad (6.6)$$

Модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигает максимума. Обозначения: Mo.

Медианой случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $p\{X<Me\} = p\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Квантилью χ_p случайной величины X является такое ее значение, для которого выполняется условие $p\{X<\chi_p\} = F(\chi_p) = p$.

Пример 6.1. Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. По условию задачи СВ X принимает следующие значения: x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i (i = 0, 1, 2, 3) нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i = \mathrm{P}\{X = x_i\} = \frac{C_6^i \cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^i},$$

откуда

$$p_1=0{,}41;\ p_2=0{,}43;\ p_3=0{,}11;\ p_4=0{,}05.$$

Дисперсию определим по формулам:

$\mathrm{D}[X] = \alpha_2(x) - (\mathrm{M}[X])^2$,

$\mathrm{M}[X] = 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}8$,

$\alpha_2(x) = 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2^2 \cdot 0{,}11 + 3^2 \cdot 0{,}05 = 1{,}32$,

$\mathrm{D}[X] = 1{,}32 - (0{,}8)^2 = 0{,}68$.

Тогда $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0{,}82$.

Пример 6.2. Непрерывная СВ распределена по закону Лапласа: $f(x) = b \cdot e^{-|x|}$. Найти коэффициент b, математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $\mathrm{D}[X]$, среднее квадратическое отклонение σ[X].

Решение. Для нахождения коэффициента b воспользуемся свойством нормировки плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2b\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 2b = 1$, откуда b = 1/2. Так как функция $xe^{-|x|}$ - нечетная, то $\mathrm{M}[X] = 0,5\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx = 0$, дисперсия D[$X$] и СКО $\sigma[X]$ соответственно равны:

$$\mathrm{D}[X] = 0,5\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x|}dx = 2\cdot 0,5\cdot\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-|x|}dx = 2,$$

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]} = \sqrt{2}.$$

ЗАДАЧИ

6.1. В условиях задачи 5.1 определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию и СКО СВ X.

Ответ: $m_X = 2,176; \alpha_2(x) = 6,112; D_X = 1,377; \sigma_X = 1,17.$

6.2. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом, без повторений извлекаются 3 шара. СВ X — число белых шаров в выборке. Определить закон распределения и найти математическое ожидание и дисперсию СВ X.

Ответ: M[X]=l,2; D[X]=0,56.

6.3. В партии из n изделий k бракованных. Для проверки наудачу выбирается m изделий. Найти математическое ожидание числа бракованных изделий, содержащихся в выборке. Вычислить математическое ожидание при n=20, k=3; m=5.

Ответ: 137/228.

6.4. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 1, \\ A(1 - e^{1-x}), x \geq 1. \end{cases}$$

Найти постоянную A, математическое ожидание, математическое ожидание квадрата СВ X и дисперсию СВ X.

Ответ: $A = 1, m_X = 2, M[X] = 5, D_X = 1$.

6.5. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq -2, \\ A(1 + \cos bx), -2 < x \leq 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянную A; б) математическое ожидание СВ X; в) математическое ожидание квадрата СВ X; г) третий центральный момент СВ X;

д) дисперсию СВ X.

Ответ: а) 0,5; б) 0; в) 0,758; г) 0; д) 0,758.

6.6. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{x+x^2}{12}, 0<x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, СКО, моду и медиану СВ *X*.

Ответ: $m_X=1,875; D_X=0,6094; \sigma_X=0,78; Mo=3; Me=2.$

7. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дискретная СВ X имеет ***геометрическое*** распределение, если она принимает значения 0, 1, … , ∞ с вероятностями:

$$p(X = i) = p_i = q^i p\ , \tag{7.1}$$

где p – параметр распределения ($0 \le p \le 1$), q=1-p.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$m_X = q / p,\ D_X = q / p^2$.

Дискретная СВ X имеет ***биномиальное распределение***, если она принимает значения 0, 1, … , n со следующими вероятностями:

$$p(X = i) = p_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i}, \tag{7.2}$$

где n, p – параметры распределения ($0 \le p \le 1$), q=1 - p.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_X = np,\ D_X = nqp\ .$$

Дискретная СВ X имеет ***распределение Пуассона***, если она принимает значения 0, 1, … , ∞ со следующими вероятностями:

$$p(X = i) = p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \tag{7.3}$$

где a – параметр распределения ($a > 0$).

Числовые характеристики пуассоновской СВ:

$m_X = a,\ D_X = a$.

Непрерывная СВ X имеет ***равномерное*** распределение, если ее плотность вероятности в некотором интервале [$a;\ b$] постоянна, т.е. если все значения X в этом интервале равновероятны:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b, \\ 0, x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases} \tag{7.4}$$

Числовые характеристики равномерно распределенной СВ:

$m_X = \dfrac{a+b}{2},\ D_X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Непрерывная СВ T, принимающая только положительные значения, имеет ***экспоненциальное*** распределение, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0, \\ 0, \ t < 0. \end{cases}, \qquad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0, \\ 0, \ t < 0. \end{cases}, \tag{7.5}$$

где λ- параметр распределения ($\lambda > 0$).

Числовые характеристики экспоненциальной СВ:

$m_T = 1/\lambda, D_T = 1/\lambda^2$.

Непрерывная СВ X имеет ***нормальное*** распределение, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad F(x) = 0.5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \qquad (7.6)$$

где m, σ - параметры распределения ($\sigma > 0$),

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ — функция Лапласа.

Значения функции Лапласа приведены в приложении. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0{,}5$.

Числовые характеристики нормальной СВ:

$$m_X = m, D_X = \sigma^2,$$

$$\alpha_k(x) = k! \sum_{i=0}^{I[k/2]} \frac{m^{k-2i} (\sigma/2)^i}{(k-2i)!\, i!},$$

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0, k - \text{нечетное}, \\ \dfrac{k!}{(k/2)!} \left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^{k/2}, k - \text{четное}. \end{cases}$$

Пример 7.1. Время безотказной работы аппаратуры является случайной величиной X, распределенной по экспоненциальному закону. Среднее время безотказной работы 100 ч. Найти вероятность того, что аппаратура проработает больше среднего времени.

Решение. Так как среднее время безотказной работы, т.е. математическое ожидание, равно 100 часов, то параметр λ экспоненциального закона будет равен $\lambda = 1/m_X = 1/100 = 0.01$. Искомая вероятность

$$p(X > m_X) = p(100 < X < \infty) = 1 - F(100) = e^{-1} \approx 0{,}368.$$

Пример 7.2. Для замера напряжения используются специальные датчики. Определить среднюю квадратичную ошибку датчика, если он не имеет систематических ошибок, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ±0,2.

Решение. Из условия задачи следует, что $p(-0{,}2<X<0{,}2) = 0{,}8$. Так как распределение ошибок нормальное, а математическое ожидание m равно 0 (систематические ошибки отсутствуют), то

$p\{-0{,}2 < X < 0{,}2\} = \Phi(-0{,}2 / \sigma) - \Phi(0{,}2 / \sigma) = 2\Phi(0{,}2 / \sigma) = 0{,}8$.

По таблице функции Лапласа находим аргумент $0{,}2/ \sigma = 1{,}28$, откуда

$\sigma = 0{,}2/1{,}28 = 1{,}0156$.

ЗАДАЧИ

7.1. По каналу связи пересылается пакет информации до тех пор, пока он не будет передан без ошибок. Вероятность искажения пакета равна 0.1, найти среднее количество попыток передать пакет.

Ответ: 1,11.

7.2. При работе прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Количество неисправностей, возникающих за определенный промежуток времени подчиняется закону Пуассона. Среднее число неисправностей за сутки равно двум. Определить вероятность того, что: а) за двое суток не будет ни одной неисправности; б) в течение суток возникнет хотя бы одна неисправность; в) за неделю работы прибора возникнет не более трех неисправностей.

Ответ: а) 0,018; б) 0,865; в) 0,004.

7.3. Шкала рычажных весов имеет цену деления 1г. При измерении массы отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность того, что абсолютная ошибка определения массы: а) не превысит величины среднеквадратического отклонения возможных ошибок определения массы; б) будет заключена между значениями σ_X и $2\sigma_X$.

Отчет: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7.4. Среднее время работы электронного модуля равно 700 ч. Определить время безотказной работы модуля с надежностью 0,8.

Ответ: 140 ч.

7.5. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированных импульсов с заданным шагом квантования Δ (Δ - наименьшая разность амплитуд импульсов). На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону N(0, σ). Если мгновенное значение шума превышает половину шага квантования, то при передаче сообщения возникает ошибка. Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования Δ вероятность ошибки из-за шумов не превысит 0,1.

Ответ: 3,4 σ.

7.6. СВ X - ошибка измерительного прибора - распределена нормально с дисперсией 16мВ^2. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Вычислить вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка а) превысит по модулю 6 мВ не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале (0,5 ; 3,5) мВ.

Ответ: а) 0,999; б) 0,776.

8. ФУНКЦИИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

Рассмотрим функцию одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$. Если X - непрерывная случайная величина, то плотность вероятности $g(y)$ величины Y определяется по формуле

$$g(y) = \sum_{j=1}^{k} f(\psi_j(y)) \cdot \left|\psi_j'(y)\right|, \qquad (8.1)$$

где $f(x)$ - плотность вероятности величины X;

$\psi_j(y)$ – функции, обратные функции $\varphi(x)$;

k - число обратных функций для данного y.

Весь диапазон значений Y необходимо разбить на интервалы, в которых число k обратных функций постоянно, и определить вид $g(y)$ по формуле (8.1) для каждого интервала.

Если X - дискретная случайная величина, принимающая значения x_i, то величина Y будет принимать дискретные значения $y_i = \varphi(x_i)$ с вероятностями $p(y_i) = p(x_i)$.

Числовые характеристики функции $Y = \varphi(X)$ одного случайного аргумента X определяются по формулам:

-начальные моменты

$$\alpha_k(y) = \mathrm{M}[Y^k] = \mathrm{M}[\varphi^k(x)] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^k(x_i) p_i, & \text{для ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x) f(x) dx, & \text{для НСВ} \end{cases}; \qquad (8.2)$$

-математическое ожидание

$$m_y = \mathrm{M}[Y] = \mathrm{M}[\varphi(x)] = \alpha_1(x); \qquad (8.3)$$

-центральные моменты

$$\mu_k(y) = \mathrm{M}[(Y - m_Y)^k] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - m_y)^k p_i, & \text{для ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - m_y)^k f(x) dx, & \text{для НСВ} \end{cases}; \qquad (8.4)$$

-дисперсия

$$D_Y = \mu_2(y) = \mathrm{M}[(Y - m_Y)^2] = \alpha_2(y) - m_Y^2. \qquad (8.5)$$

Пример 8.1. Определить плотность вероятности величины $Y = X^2$, если X - случайная величина, равномерно распределенная на интервале [-1, 2] .

Решение. Так как X равномерно распределена в интервале [-1, 2], то ее плотность вероятности равна (7.4):

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & -1 \le x \le 2, \\ 0, & x < -1, \quad x > 2. \end{cases}$$

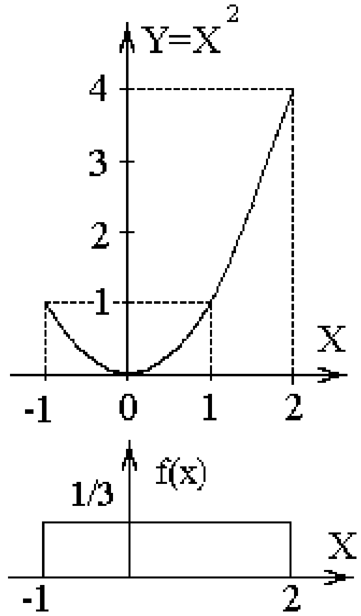
Построим график величины $Y = X^2$ для x в интервале [-1, 2] и в зависимости от числа k обратных функций выделим следующие интервалы для Y (рис. 8.1):

$[-\infty, 0[$ $k = 0$,

$[0, 1]$ $k = 2$,

$]1, 4]$ $k = 1$,

$]4, +\infty]$ $k = 0$.



Так как на интервалах $[-\infty, 0[$ и $]4, +\infty]$ обратная функция не существует, то для этих интервалов $g(y)=0$.

В интервале [0,1] две обратных функции:

$$\psi_1(y) = +\sqrt{y} \text{ и } \psi_2(y) = -\sqrt{y}.$$

По формуле (8.1) получим

$$g(y) = f_x(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + f_x(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)| =$$

$$= f_x(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_x(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{3\sqrt{y}}.$$

В интервале]1,4] одна обратная функция $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$, следовательно,

$$g(y) = f_x(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| = f_x(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{6\sqrt{y}}.$$

Рис. 8.1

Таким образом, плотность вероятности величины Y равна

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 \le y \le 1, \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 < y \le 4, \\ 0, & y > 4. \end{cases}$$

Пример 8.2 Случайная величина X равномерно распределена от -1 до +1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = X^2$.

Решение. Плотность вероятности СВ X равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5, & -1 \le x \le 1, \\ 0\,, & x < -1, x > 1. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание Y по формуле (8.3):

$$m_y = \mathrm{M}[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 0{,}5dx = \frac{1}{3}.$$

Дисперсию D_y рассчитаем по формуле (8.5):

$$D_y = \mathrm{M}[(X^2)^2] - m_Y^2 = \int_{-1}^{1} (x^2)^2 0{,}5dx - m_y^2 = \frac{4}{45}.$$

ЗАДАЧИ

8.1. Определить плотность вероятности величины $Y = lnX$, если X - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (1, 3).

Ответ: $g(y) = \begin{cases} 0,5e^{y}, \ 0 \le y < \ln 3, \\ 0 \ , y < 0, y > \ln 3. \end{cases}$

8.2. Определить плотность вероятности величины $Y = |X|$, если X - случайная равномерно распределенная величина со следующими характеристиками $m_X = 1$, $D_X = 1$, и вычислить вероятность того, что $p\{1 \le Y < 2\}$.

Ответ: $g(y) = \begin{cases} 0, y < 0, y > 2,73, \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0 \le y < 0,73, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, 0,73 \le y \le 2,73. \end{cases}$

$p\{1 \le Y < 2\}$=0,445.

8.3. Случайная величина X равномерно распределена от 0 до 1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = |X - 0,2|$.

Ответ: $m_Y = 0,34$; $D_Y = 0,0574$.

8.4. Точка U, изображающая объект на круглом экране радиолокатора, распределена равномерно в пределах круга единичного радиуса. Найти дисперсию расстояния Y от точки U до центра экрана.

Ответ: $D_Y = 1/18$.

9. ДВУХМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функцией распределения двухмерной случайной величины называвается вероятность совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$F(x, y) = p\left(\{X < x\} \cdot \{Y < y\}\right). \tag{9.1}$$

Свойства двухмерной функции распределения:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. $F(x, +\infty) = F_X(x)$; $F(+\infty, y) = F_Y(y)$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.
3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
4. $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$, если $x_2 > x_1$;
   $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$, если $y_2 > y_1$.

Функция распределения может задаваться для непрерывных и дискретных случайных величин.

Для непрерывной двухмерной случайной величины (X, Y) существует двухмерная ***плотность распределения***:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{p(\{x \le X < x + \Delta x\} \bigcap \{y \le Y < y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \tag{9.2}$$

Свойства двухмерной плотности:

1. $f(x, y) \ge 0$.
2. $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dx\, dy.$ (9.3)
3. $p\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x, y) dx\, dy$. (9.4)
4. Условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx\, dy = 1.$ (9.5)
5. $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$; $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$. (9.6)

Для дискретных случайных величин (X, Y) закон распределения задается ***матрицей распределения***, содержащей вероятности p_{ij} появления всех возможных пар значений (x_i, y_j):

$$p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_\mathrm{j}), \tag{9.7}$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \tag{9.7}$$

Одномерные ряды вероятностей составляющих X, Y определяются по формулам

$$p_i = p(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ i = 1, ..., n; \tag{9.9}$$

$$p_j = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, j = 1, ..., m. \quad (9.10)$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по формулам:

$$f(x/y) = f(x, y)/f_Y(y), \text{ для } f_Y(y) \neq 0; \quad (9.11)$$

$$f(y/x) = f(x, y)/f_X(x), \text{ для } f_X(x) \neq 0. \quad (9.12)$$

Условные ряды распределения для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам:

$$p_{i/j} = p(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/p(Y = y_j), i = 1, ..., N; \quad (9.13)$$

$$p_{j/i} = p(Y = y_j/X = x_i) = p_{ij}/p(X = x_i), j = 1, ..., M. \quad (9.14)$$

Величина X ***независима*** от величины Y, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величина Y. Для независимых величин выполняются следующие соотношения:

1.$F(x,y)=p(X<x,Y<y)=p(X<x)p(Y<y)=F_X(x)F_Y(y)\ \forall\ x, y;$ (9.15)

2. для непрерывных- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall\ x, y$; (9.16)

3. для дискретных - $p_{ij} = p_i\, p_j$, для $\forall\ i, j$. (9.17)

Пример 9.1. Двухмерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице:

	y_j	
x_i	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

Определить одномерные ряды вероятностей величин X и Y, условный ряд вероятностей величины X при условии, что Y = 1. Исследовать зависимость случайных величин X и Y.

Решение. Определим ряды вероятностей X и Y по формулам (9.9) и (9.10), т.е. выполним суммирование по столбцам и по строкам:

y_j	0	1
p_j	0,3	0,7

x_i	-1	0	1
p_i	0,3	0,5	0,2

Условный ряд X при Y = 1 получаем по формуле (9.13):

x_i	-1	0	1
$p_{i/Y=1}$	2/7	3/7	2/7

Величины X и Y зависимы, так как $P(X = 0,\ Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$, $0{,}2 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}5$.

Пример 9.2 Двухмерная случайная величина равномерно распределена в области D, ограниченной прямыми $X = 0$, $Y = 0$ и $X + Y = 4$. Исследовать зависимость случайных величин X и Y.

Запишем в аналитической форме совместную плотность вероятности:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4-x, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Определим c, используя условие нормировки (9.5):

$$\int_0^4\int_0^{4-x} cdxdy = c\int_0^4 (4-x)dx = c\cdot 8 = 1 \Rightarrow c=\frac{1}{8}.$$

Определим одномерные плотности $f_1(x), f_2(y)$ величин X и Y по формуле (9.6):

$$f_1(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \int_0^{4-x}\frac{1}{8}dy = 0.5-\frac{x}{8}, 0\le x\le 4 \\ 0, x>4 \end{cases} \quad f_2(y)=\begin{cases} 0, y<0 \\ \int_0^{4-y}\frac{1}{8}dx = 0.5-\frac{y}{8}, 0\le y\le 4 \\ 0, y>4 \end{cases}$$

Очевидно, что критерий независимости (9.16) величин не выполняется, т.е. $f(x,y)\ne f_1(x)f_2(y)$, следовательно, величины X и Y зависимы.

ЗАДАЧИ

9.1. В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 10%, а вследствие дефекта B - 20%. Годная продукция составляет 75%. Пусть X - индикатор дефекта A, а Y - индикатор дефекта B. Составить матрицу вероятностей двухмерной случайной величины (X, Y). Найти одномерные ряды распределений составляющих X и Y и исследовать их зависимость.

Ответ:

$X\backslash Y$	$y_1=0$	$y_2=1$
$x_1=0$	0,75	0,15
$x_2=1$	0,05	0,05

Одномерные ряды составляющих X и Y:

x_i	$x_1=0$	$x_2=1$
p_i	0,9	0,1

y_j	$y_1=0$	$y_2=1$
p_j	0,8	0,2

Величины X и Y зависимы.

9.2. Двухмерная случайная величина (X, Y) имеет закон распределения с плотностью

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Область D - квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$; $y = 3$.

Требуется определить коэффициент a; вычислить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

Ответ: $a = 1$, $P = 1/9$.

9.3. Двухмерная случайная величина распределена по закону:

$$f(x,y) = a/(1+x^2+y^2+x^2y^2),\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty.$$

Найти коэффициент a, установить зависимость случайных величин X и Y.

Ответ: $a = 1/\pi^2$, независимы.

9.4. Положение случайной точки (X, Y) равновозможное в любом месте круга радиусом R, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность распределения и функцию распределения каждой составляющей X и Y. Выяснить зависимость X и Y.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi R^2, & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}.$$

Ответ: $f_1(x) = \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}$, $f_2(y) = \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}$, X и Y независимы.

10. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим основные числовые характеристики двухмерной случайной величины (X, Y).

Смешанный начальный момент порядка $k+s$ равен математическому ожиданию произведения X^k и Y^s:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = \mathrm{M}[X^k Y^S] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{i,j} & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy & \text{для НСВ.} \end{cases} \quad (10.1)$$

Смешанный центральный момент порядка $k+s$ равен математическому ожиданию произведения центрированных величин $\overset{\circ}{X}{}^k$ и $\overset{\circ}{Y}{}^k$:

$$\mu_{k,s}(x,y) = \mathrm{M}[(X-m_X)^k (Y-m_Y)^s] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{i,j} & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k (y-m_y)^s f(x,y)dxdy & \text{для НСВ,} \end{cases} \quad (10.2)$$

где p_{ij} - элементы матрицы вероятностей дискретной величины (X, Y);

$f(x, y)$-совместная плотность вероятности непрерывной величины (X, Y).

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные моменты:

$$m_X = \alpha_{1,0}(x,y),\ m_Y = \alpha_{0,1}(x,y)\,; \quad (10.3)$$

$$D_X = \mu_{2,0}(x,y) = \alpha_{2,0}(x,y) - m_X^2,\ D_Y = \mu_{0,2}(x,y) = \alpha_{0,2}(x,y) - m_Y^2. \quad (10.4)$$

Корреляционный момент K_{XY} характеризует степень тесноты линейной зависимости величин X и Y и рассеивание относительно точки (m_X, m_Y):

$$K_{XY} = \mu_{1,1}(x,y) = \alpha_{1,1}(x,y) - m_X m_Y\,. \quad (10.5)$$

Коэффициент корреляции R_{XY} характеризует степень линейной зависимости величин

$$R_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\,. \quad (10.6)$$

Для любых случайных величин $|R_{XY}| \le 1$.

Если величины X и Y независимы, то $R_{XY} = 0$.

Пример 10.1. Определить коэффициент корреляции величин X и Y (пример 9.1).

Решение. Определим математические ожидания величин X и Y по формуле (10.3):

$$m_X = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -1\cdot 0,3 + 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,2 = -0,1\ ,$$

$$m_Y = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{2} y_j p_j = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,7 = 0,7 .$$

Определим $\alpha_{1,1}(x, y)$ по формуле (10.1):

$$\alpha_{1,1}(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{i,j} = -1\cdot 1\cdot 0,2 + 1\cdot 1\cdot 0,2 = 0 .$$

Найдем значение K_{XY} по формуле (10.5)

$$K_{XY} = \alpha_{1,1}(x, y) - m_X m_Y = 0 - (-0,1\cdot 0,7) = 0,07 .$$

Определим дисперсии величин X и Y по формуле (10.4):

$$D_X = \alpha_{2,0}(x,y) - m_X^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - m_X^2 = 1\cdot 0,3 + 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,2 - 0,01 = 0,49$$

$$D_Y = \alpha_{0,2}(x,y) - m_Y^2 = \sum_{j=1}^{2} y_i^2 p_i - m_Y^2 = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,7 - 0,49 = 0,21 .$$

Значение коэффициента корреляции R_{XY} вычислим по формуле (10.6):

$$R_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = \frac{0,07}{\sqrt{0,21\cdot 0,49}} \approx 0,22 . \qquad (2.6)$$

Пример 10.2 Определить коэффициент корреляции величин X и Y (пример 9.2).

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X по формулам (10.3) и (10.4) соответственно:

$$m_X = \alpha_{1,0}(x,y) = \int_0^4\int_0^{4-x} x\frac{1}{8}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^4 xdx\int_0^{4-x} dy = \frac{1}{8}\int_0^4 x(4-x)dx = \frac{4}{3} ,$$

$$D_x = \mu_{2,0}(x,y) = \int_0^4\int_0^{4-x} (x-m_x)^2\frac{1}{8}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^4 (x-\frac{4}{3})^2(4-x)dx = \frac{8}{9} .$$

Так как область D симметрична относительно осей координат, то величины X и Y будут иметь одинаковые числовые характеристики:

$$m_x = m_y = 4/3; \quad D_x = D_y = 8/9.$$

Определим корреляционный момент K_{xy} по формуле (10.5):

$$K_{xy} = \int_0^4\int_0^{4-x} xy\frac{1}{8}dxdy - m_x\cdot m_y = \frac{1}{8}\int_0^4 xdx\int_0^{4-x} ydy - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{16}\int_0^4 x(4-x)^2dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}.$$

Коэффициент корреляции величин X и Y будет равен (10.6):

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = -\frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧИ

10.1. Число X выбирается случайным образом из множества (1,2,3). Затем из того же множества выбирается наудачу число Y, равное или большее X. Найти коэффициент корреляции X и Y.

Ответ: $R_{XY} = 0{,}594$.

10.2. Плотность вероятности двухмерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, x\in[0,1], y\in[0,1]; \\ 0, x\notin[0,1] \text{ или } y\notin[0,1]. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции X и Y.

Ответ: $R_{XY} = 0{,}091$.

10.3. Плотность вероятности двухмерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy, x\in[0,1], y\in[0,1]; \\ 0, x\notin[0,1] \text{ или } y\notin[0,1]. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции X и Y.

Ответ: $R_{XY} = 0$.

11. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим функцию двух случайных аргументов $Y = \varphi(X_1, X_2)$. Функция распределения $G(y)$ величины Y определяется по формуле

$$G(y) = \iint\limits_{(D)} f(x_1, x_2)dx_1dx_2\,, \qquad (11.1)$$

где $f(x_1, x_2)$ - совместная плотность вероятности величин X_1 и X_2.

В формуле (11.1) интегрирование производится по области D, которая определяется из условия $\varphi(X_1,\ X_2) < y$.

В случае, когда $Y = X_1 + X_2$, функция распределения

$$G(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1, x_2)dx_2dx_1\,, \qquad (11.2)$$

а плотность вероятности

$$g(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1)dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y - x_2, x_2)dx_2\,. \qquad (11.3)$$

Если величины X_1 и X_2 независимы, то

$$g(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, f_2(y - x_1)dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2)\, f_2(x_2)dx_2\,. \qquad (11.4)$$

Числовые характеристики функции $Y = \varphi(X_1, X_2)$ двух случайных непрерывных величин X_1 и X_2, имеющих совместную плотность $f(x_1, x_2)$, определяются по формулам:

-начальные моменты

$$\alpha_k(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x_1, x_2) f(x_1, x_2)dx_1dx_2\,; \qquad (11.5)$$

-центральные моменты

$$\mu_k(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x_1, x_2) - m_y)^k f(x_1, x_2)dx_1dx_2\,. \qquad (11.6)$$

В случае, когда закон распределения аргументов X_1 и X_2 неизвестен, а известны только их числовые характеристики m_1, m_2, D_1, D_2, K_{12} - математическое ожидание m_Y и дисперсия D_Y величины $Y = X_1 + X_2$ могут быть определены по формулам:

$$m_Y = \mathrm{M}[X_1 + X_2] = m_1 + m_2\;; \qquad (11.7)$$

$$D_Y = \mathrm{D}[X_1 + X_2] = D_1 + D_2 + 2K_{12}\,. \qquad (11.8)$$

Если $Y = X_1X_2$, то математическое ожидание Y равно

$$m_Y = \mathrm{M}[X_1X_2] = m_1m_2 + K_{12}\,. \qquad (11.9)$$

В случае независимых сомножителей X_1 и X_2 дисперсия $Y = X_1X_2$ может быть определена по формуле

$$D_Y = \mathrm{D}[X_1 X_2] = D_1 D_2 + m_1^2 D_2 + m_2^2 D_1 . \qquad (11.10)$$

Если $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, a_i - не случайные коэффициенты, то математическое ожидание и дисперсия Y равны:

$$m_Y = \mathrm{M}\left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i m_i ; \qquad (11.11)$$

$$D_Y = \mathrm{D}\left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j K_{ij} . \qquad (11.12)$$

Пусть $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$, X_i – независимые случайные величины, значит математическое ожидание и дисперсия Y равны:

$$m_Y = M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i \right] = \prod_{i=1}^{n} m_i ; \qquad (11.13)$$

$$D_Y = D\left[\prod_{i=1}^{n} X_i \right] = \prod_{i=1}^{n} (D_i + m_i^2) - \prod_{i=1}^{n} m_i^2 . \qquad (11.14)$$

Пример 11.1. Устройство состоит из двух блоков - основного и резервного. При отказе основного блока автоматически включается резервный блок. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение 10 часов, если время безотказной работы блоков случайно и распределено по показательному закону, а среднее время наработки на отказ - 10 часов.

Решение. Определим закон распределения вероятностей времени Y безотказной работы устройства:

$$Y = X_1 + X_2 ,$$

где X_1, X_2 - время безотказной работы блоков.

Величины X_1 и X_2 независимы и имеют одинаковую плотность вероятностей:

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0; \\ 0 \ , x < 0. \end{cases}$$

Вычислим величину λ. Для показательного закона $\lambda = 1/m_X = 0{,}1$. Определим плотность вероятности Y по формуле (11.4):

$$g(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(y - x_1)} dx_1 = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad y > 0.$$

Вычислим вероятность того, что $Y > 10$:

$$p(Y \ge 10) = \int_{10}^{\infty} g(y) dy = \lambda^2 \int_{10}^{\infty} y e^{-\lambda y} dy \approx 0{,}736.$$

Пример 11.2. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют следующие числовые характеристики:

$m_1 = 2;\ m_2 = -3;\ m_3 = 0;\ D_1 = 4;\ D_2 = 13;\ D_3 = 9.$

Определить коэффициент корреляции R_{YZ} величин Y и Z:

$Y = 3X_1 - X_2,$

$Z = X_3 - 2X_1.$

Решение. Вычислим математические ожидания Y и Z по формуле (11.11):

$m_Y = 3{\cdot}m_1 - 1{\cdot}m_2 = 9, \quad m_Z = m_3 - 2{\cdot}m_1 = -4.$

Вычислим дисперсии D_Y и D_Z по формуле (11.12), учитывая, что величины X_i независимы и $K_{ij} = 0$:

$D_Y = (3)^2{\cdot}D_1 + (-1)^2{\cdot}D_2 = 49,\ D_Z = D_3 + (-2)^2 D_1 = 25.$

Рассчитаем корреляционный момент K_{YZ} по формуле (10.5). Для этого определим $\alpha_{1,1}(y,z)$:

$\alpha_{1,1}(y,z) = \mathrm{M}[YZ] = \mathrm{M}[(3X_1 - X_2)(X_3 - 2X_1)] = \mathrm{M}[3X_1X_3 - 6X_1^2 -$

$- X_2X_3 + 2X_2X_1] = 3m_1m_3 - 6\,\mathrm{M}[X_1^2] - m_2m_3 + 2m_2m_1 = -6\,\mathrm{M}[X_1^2] - 12.$

Так как $D_1 = \mathrm{M}[X_1^2] - m_1^2$, то $\mathrm{M}[X_1^2] = D_1 + m_1^2 = 8.$

Таким образом, $\alpha_{1,1}(y,z) = -60$. Тогда

$K_{YZ} = \alpha_{1,1}(y,z) - m_Y m_Z = -60 - 9(-4) = -24.$

Величину R_{YZ} определим по формуле (10.6):

$$R_{YZ} = \frac{K_{YZ}}{\sqrt{D_y D_Z}} = -\frac{24}{35}.$$

ЗАДАЧИ

11.1. Определить закон распределения вероятностей величины $Y = sign(X_1 + X_2)$, если X_1 и X_2 - случайные величины, равномерно распределенные на интервалах (-1, 1) и (-1, 2) соответственно.

Ответ: $p(Y = 1) = 2/3;\ \ p(Y = -1) = 1/3.$

11.2. Случайная точка (X_1, X_2) равномерно распределена в квадрате с вершинами в точках (0, 0), (0, 1), (1, 1) и (1, 0). Определить плотность вероятности величины $Y = X_1X_2$.

Ответ: $g(y) = -ln y,\ 0 < y \le 1$

11.3. Независимые случайные величины X и Y имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Найти коэффициент корреляции случайных величин $U = 2X + Y$ и $V = 2X - Y$.

Ответ: $R_{YZ} = 0{,}6.$

11.4. В треугольник с вершинами (0, 0), (0, 4), (4, 0) наудачу ставится точка (X, Y). Вычислить $\mathrm{M}[XY]$ и $\mathrm{D}[X + Y]$.

Ответ: $\mathrm{M}[XY] = 12/9$, $\mathrm{D}[X + Y] = 8/9.$

12. ОЦЕНКА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Генеральной совокупностью называется множество объектов, из которых производится выборка. Каждый из объектов задает фиксированное значение случайной величины.

Выборка - множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ случайно отобранных объектов (значений) из генеральной совокупности.

Объемом выборки n называется число входящих в нее объектов.

Вариационным рядом называется выборка $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\}$, полученная в результате расположения значений исходной выборки в порядке возрастания. Значения $\hat{x}_i$ называются вариантами.

Эмпирическая функция распределения определяется формулой

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le \hat{x}_1; \\ \dfrac{i}{n}, & \hat{x}_i < x \le \hat{x}_{i+1}; \\ 1, & x > \hat{x}_n. \end{cases} \qquad (12.1)$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является наилучшей оценкой функции распределения $F(x)$ (несмещенной, состоятельной, эффективной).

Если анализируемая СВ X является дискретной с известным множеством значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, то по исходной выборке объемом n определяется ***статистический ряд распределения вероятностей***:

x_j	x_1	x_2	....	x_m
p_j^*	k_1	k_2	....	k_m

где $p_j^* = \dfrac{k_j}{n}$ - частота появления j-го значения,

k_j – число значений x_j в выборке.

Если анализируемая СВ X является непрерывной, то по исходной выборке строится ***интервальный статистический ряд вероятностей***:

j	A_j	B_j	h_j	ν_j	p_j^*	f_j^*
1	A_1	B_1	h_1	ν_1	p_1^*	f_1^*
$\vdots$						
M	A_M	B_M	h_M	ν_M	p_M^*	f_M^*

где j – номер интервала;

М – число непересекающихся и примыкающих друг к другу интервалов, на которые разбивается диапазон значений $[\hat{x}_1, \hat{x}_n]$:

$$\text{M} \approx \begin{cases} \text{int}\left(\sqrt{n}\right), n \le 100, \\ \text{int}\left(\left(2 \div 4\right) \cdot \lg\left(n\right)\right), n > 100, \end{cases} \qquad (12.2)$$

где int(x) - целая часть числа x . Желательно, чтобы n без остатка делилось на М;

A_j, B_j - левая и правая границы j-го интервала ($A_{j+1} = B_j$), причем $A_1 = \hat{x}_1$, $B_M = \hat{x}_n$;

$h_j = B_j - A_j$ - длина j-го интервала;

ν_j- количество чисел в выборке, попадающих в j-й интервал;

$p_j^* = \dfrac{\nu_j}{n}$ - частота попадания в j-й интервал;

$f_j^* = \dfrac{p_j^*}{h_j} = \dfrac{\nu_j}{nh_j}$ - статистическая плотность вероятности в j-м интервале.

При построении интервального статистического ряда вероятностей используют следующие методы разбиения диапазона значений на интервалы:

1) Равноинтервальный, т.е. все интервалы одинаковой длинны:

$$h_j = h = \frac{\hat{x}_n - \hat{x}_1}{M}, \ \forall j \qquad (12.3)$$

$$A_j = \hat{x}_1 + (j-1)h, j = \overline{2,M}\ ,. \qquad (12.4)$$

2) Равновероятностный, т.е. границы интервалов выбирают так, чтобы в каждом интервале было одинаковое число выборочных значений (необходимо, чтобы n без остатка делилось на М):

$$\nu_j = \nu = \frac{n}{M}, \ p_j^* = \frac{1}{M} \forall j \qquad (12.5)$$

$$A_j = \frac{\hat{x}_{(j-1)\nu} + \hat{x}_{(j-1)\nu+1}}{2}, j = \overline{2,M}\ . \qquad (12.6)$$

Гистограмма - статистический аналог графика плотности вероятности $f^*(x)$ СВ и она строится по интервальному статистическому ряду. ***Гистограмма*** представляет собой совокупность прямоугольников, построенных, как на основаниях, на интервалах h_j статистического ряда с высотой, равной статистической плотности вероятности f_j^* в соответствующем интервале. Для равноинтервального метода все прямоугольники гистограммы имеют одинаковую ширину, а для равновероятностного метода – одинаковую площадь. Сумма площадей всех прямоугольников гистограммы равна 1.

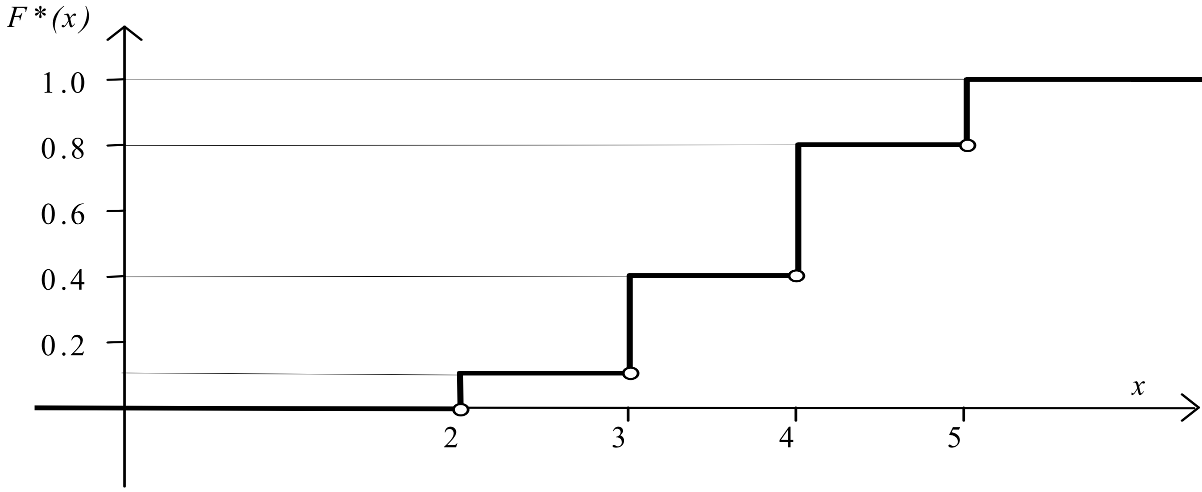
Пример 12.1 Задана выборка случайной величины X: {4, 3, 3, 5, 2, 4, 3, 4, 4, 5}. Построить вариационный ряд и график эмпирической функции распределения $F^*(x)$.

Решение. Вариационный ряд случайной величины имеет вид {2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5}.

Определяем значения эмпирической функции распределения $F^*(x)$ по формуле (12.1):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, x \leq 2; \\ 0,1, 2 < x \leq 3; \\ 0,4, 3 < x \leq 4; \\ 0,8, 4 < x \leq 5; \\ 1, x > 5. \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ имеет вид:



Замечание. В каждой точке оси x, соответствующей значениям x_i функция $F^*(x)$ имеет скачок. В точке разрыва $F^*(x)$ непрерывна слева и принимает значение, выделенное знаком $\circ$.

Пример 12.2. Вариационный ряд случайной величины x имеет вид: -6,237 -6,229 -5,779 -5,139 -4,950 -4,919 -4,636 -4,560 -4,530 -4,526 -4,523 -4,511 -4,409 -4,336 -4,259 -4,055 -4,044 -4,006 -3,972 -3,944 -3,829 -3,794 -3,716 -3,542 -3,541 -3,431 -3,406 -3,384 -3,307 -3,181 -3,148 -3,124 -3,116 -2,892 -2,785 -2,734 -2,711 -2,637 -2,633 -2,428 -2,381 -2,339 -2,276 -2,222 -2,167 -2,111 -2,034 -1,958 -1,854 -1,803 -1,774 -1,755 -1,745 -1,713 -1,709 -1,566 -1,548 -1,480 -1,448 -1,353 -1,266 -1,229 -1,179 -1,130 -1,102 -1,060 -1,046 -1,035 -0,969 -0,960 -0,903 -0,885 -0,866 -0,865 -0,774 -0,721 -0,688 -0,673 -0,662 -0,626 -0,543 -0,445 -0,241 -0,174 -0,131 0,115 0,205 0,355 0,577 0,591 0,795 0,986 1,068 1,099 1,195 1,540 2,008 2,160 2,534 2,848

Построить гистограмму равноинтервальным и равновероятностным методами.

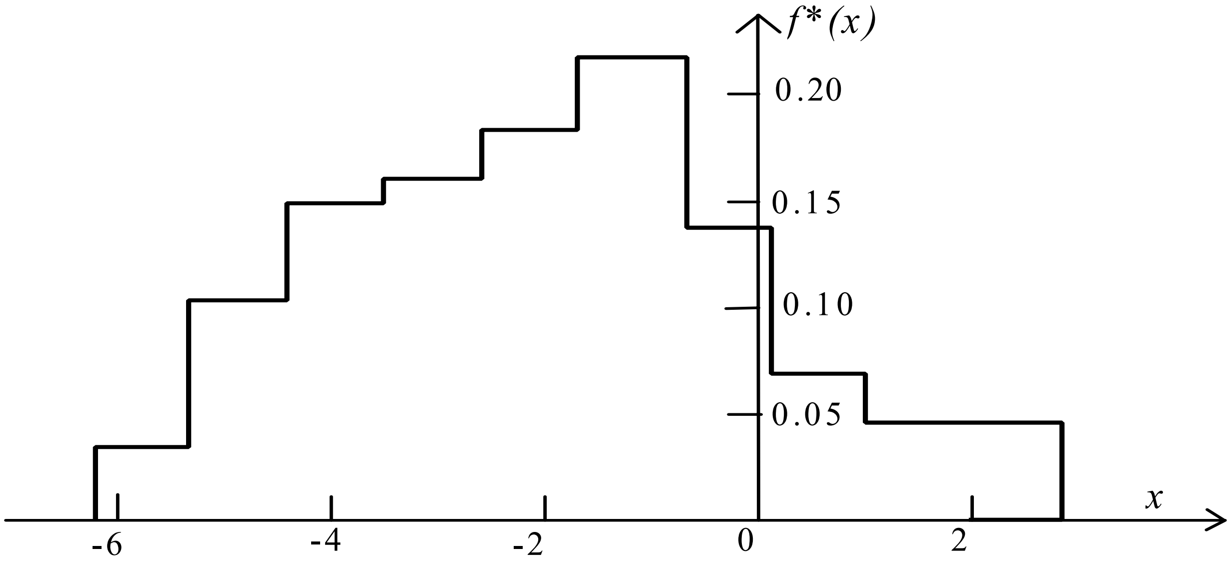
Решение. Объем выборки равен 100. Количество интервалов определяем по формуле (12.2): $M \approx \sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$.

Для равноинтервального метода построения интервального статистического ряда вероятностей величины h_j, A_j, B_j, рассчитаны по формулам (12.3),(12.4):

j	A_j	B_j	h_j	ν_j	p_j^*	f_j^*
1	-6,237	-5,3345	0,9085	3	0,03	0,033
2	-5,3345	-4,426	0,9085	9	0,09	0,099

3	-4,426	-3,5175	0,9085	13	0,13	0,143
4	-3,5175	-2,609	0,9085	14	0,14	0,154
5	-2,609	-1,7005	0,9085	16	0,16	0,176
6	1,7005	-0,792	0.9085	19	0,19	0,209
7	-0,792	0,1165	0,9085	12	0,12	0,132
8	0,1165	1,025	0,9085	6	0,06	0,066
9	1,025	1,9335	0,9085	4	0,04	0.044
10	1,9335	2,848	0,9085	4	0,04	0,044

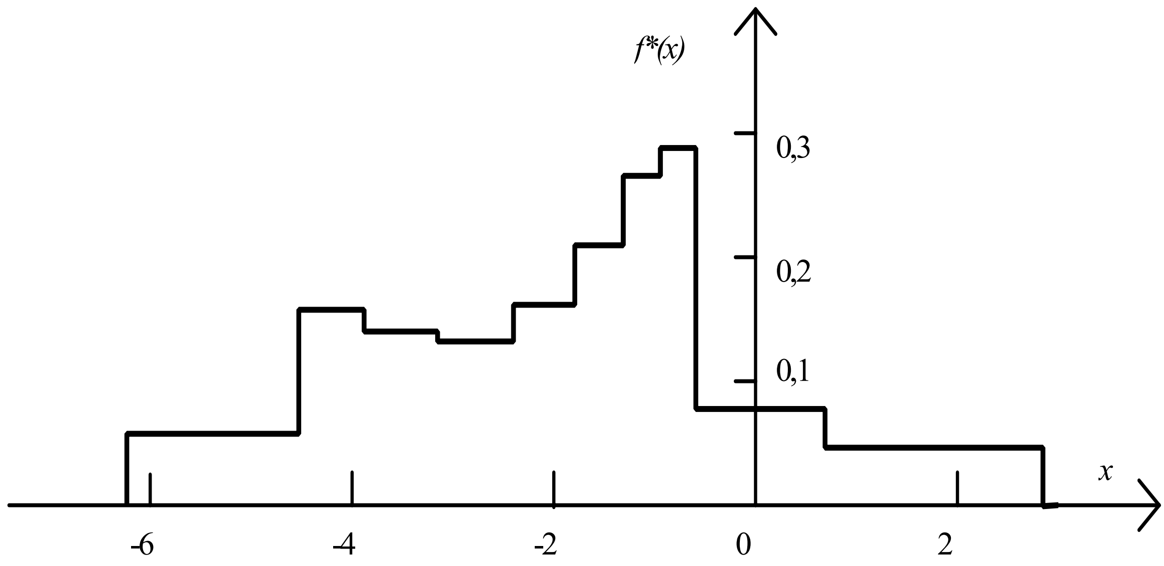
Равноинтервальная гистограмма имеет вид:



Для равновероятностного метода построения интервального статистического ряда вероятностей величины ν_j , p^*_j, A_j, B_j, рассчитаны по формулам (12.5),(12.6):

j	A_j	B_j	h_i	ν_j	p^*_j	f^*_j
1	-6,2370	-4,5245	1,7125	10	0,1	0.0584
2	-4,5245	-3,8865	0,6380	10	0,1	0,1567
3	-3,8865	-3,1645	0,7220	10	0,1	0,1385
4	-3,1645	-2,4045	0,7600	10	0,1	0,1316
5	-2,4045	-1,7885	0,6160	10	0,1	0,1623
6	-1,7885	-1,3095	0,4790	10	0,1	0,2086
7	-1,3085	-0,9319	0,3766	10	0,1	0,2655
8	-0,9319	-0,5843	0,3476	10	0,1	0,2877
9	-0,5843	0,6932	1,2775	10	0,1	0,0783
10	0,6932	2,8480	2,1548	10	0,1	0,0464

Равновероятностная гистограмма имеет вид:



ЗАДАЧИ

12.1. Построить эмпирическую функцию распределения по вариационному ряду из примера 12.2.

12.2. Построить эмпирическую функцию распределения, а также гистограмму равноинтервальным и равновероятностным методами для выборки, заданной вариационным рядом:

2,60 2,62 2,74 2,76 3,17 3,18 3,29 3,35 3,40 3,42 3,46 3,54 3,68 4,06 4,07 4,09 4,15 4,23 4,24 4,28 4,30 4,43 4,46 4,68 4,77 5,19 5,22 5,45 5,51 5,57 5,59 5,64 5,66 5,67 5,73 5,76 5,88 6,11 6,13 6,23 6,55 6,70 7,30 7,62 7,72 7,80 7,91 7,94 7,97 8,00 8,10 8,47 8,63 8,80 8,84 8,97 9,01 9,02 9,20 9,22 9,41 9,57 9,65 9,92 9,98 10,02 10,07 10,16 10,24 10,27 10,38 10,62 10,63 10,73 10,96 10,98 10,99 11,00 11,01 11,01 11,11 11,23 11,35 11,56 11,58 11,73 11,77 11,99 12,10 12,13 12,18 12,24 12,53 12,57 12,96 12,98 13,04 13,22 13,35 13,45

12.3. Построить равноинтервальным и равновероятностным методами интервальный статистический ряд вероятностей и гистограмму случайной величины по следующей выборке:

8,60 6,54 3,26 5,96 4,68 6,55 11,33 9,50 8,58 7,16 10.84 5,81 2,92 8.96 12,60 11,08 4,52 8,06 2,42 10,05 10,29 10,03 4,77 9,46 7,26 2,62 4,49 11,80 11,68 8,61 12,82 5,36 7,85 11,69 11,00 5,07 2,23 10,14 9,89 10,53 5,10 7,27 6,94 6,53 11,08 6,61 9,27 5,83 9,56 7,51 5,98 8,64 5,69 10,54 10,20 12,11 2,92 12,31 5,95 2,82 7,69 4,30 11,17 6,99 12,78 3,64 11,80 8,61 3,80 7,42 5,09 7,68 3,98 10,59 8,40 12,76 4,37 5,88 9,94 10,46 2,75 4,22 11,56 10,43 3,66 10,14 6,53 10,83 5,36 6,67 4,83 9,66 2,30 7,04 7,88 8,30 2,22 8,71 7,79 9,82

13. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ

Статистической оценкой $\hat{Q}$ параметра Q распределения называется приближенное значение параметра, вычисленное по результатам эксперимента (по выборке).

Точечной называется оценка, определяемая одним числом.

Оценка $\hat{Q}$ называется ***состоятельной***, если при увеличении объема выборки n она сходится по вероятности к значению параметра Q:

$$\hat{Q} \xrightarrow[n\to\infty]{p} Q \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(P(|\hat{Q}-Q|<\varepsilon))=1, \forall\varepsilon>0.$$

Оценка $\hat{Q}$ называется ***несмещенной,*** если ее математическое ожидание точно равно параметру Q для любого объема выборки:

$$\mathrm{M}[\hat{Q}] = Q, \forall n.$$

Несмещенная оценка $\hat{Q}$ является ***эффективной***, если ее дисперсия минимальна по отношению к дисперсии любой другой оценки этого параметра.

Состоятельная несмещенная оценка ***математического ожидания***, называемая выборочным средним $\overline{x}$, вычисляется по формуле

$$m_X^* = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{13.1}$$

Числовые характеристики $\overline{x}$:

$$\mathrm{M}[\overline{x}] = m_X, \ \mathrm{D}[\overline{x}] = \frac{D_X}{n}.$$

Состоятельная несмещенная оценка ***дисперсии*** равна

$$D_X^* = S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{x}^2. \tag{13.2}$$

Числовые характеристики S_0^2:

$$\mathrm{M}[S_0^2] = D_X, \ \mathrm{D}[S_0^2] = \frac{\mu_4(x)}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}D_X^2.$$

Состоятельная несмещенная оценка ***среднеквадратического отклонения:***

$$S_0 = \sqrt{S_0^2}. \tag{13.3}$$

Состоятельная оценка ***начального момента k-го порядка*** определяется по формуле

$$\hat{\alpha}_k(x) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^k. \tag{13.4}$$

Состоятельная оценка ***центрального момента k-го порядка*** равна

$$\hat{\mu}_k(x) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^k. \tag{13.5}$$

Несмещенная состоятельная и эффективная оценка вероятности случайного события A в схеме независимых опытов Бернулли:

$$p^*(A) = \frac{m}{n}. \qquad (13.6)$$

где m - число опытов, в которых произошло событие А;

n - число проведенных опытов.

Числовые характеристики $p^*(A) = p^*$:

$$\mathrm{M}[p^*] = p(A) = p,\ \mathrm{D}[p^*] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Для вычисления оценок параметров распределения чаще всего применяются методы моментов и максимального правдоподобия.

Суть ***метода моментов*** заключается в следующем. Пусть имеется выборка $\{x_1, ..., x_n\}$ независимых значений случайной величины с известным законом распределения $f(x, Q_1, ..., Q_m)$ и m неизвестными параметрами $Q_1, ..., Q_m$. Последовательность вычислений следующая:

1. Вычислить значения m начальных и/или центральных теоретических моментов

$$\alpha_k(x) = M\left[X^k\right], \qquad \mu_k(x) = M\left[\left(X - m_x\right)^k\right].$$

2. Определить m соответствующих выборочных начальных $\hat{\alpha}_k(x)$ и/или центральных $\hat{\mu}_k(x)$ моментов по формулам (13.4),(13.5).

3. Составить и решить относительно неизвестных параметров $Q_1, ..., Q_m$ систему из m уравнений, в которых приравниваются теоретические и выборочные моменты. Каждое уравнение имеет вид $\alpha_k(x) = \hat{\alpha}_k(x)$ или $\mu_k(x) = \hat{\mu}_k(x)$. Найденные корни являются оценками $\hat{Q}_1, ..., \hat{Q}_m$ неизвестных параметров.

Замечание. Часть уравнений может содержать начальные моменты, а оставшаяся часть - центральные.

Согласно методу ***максимального правдоподобия*** оценки $\hat{Q}_1, ..., \hat{Q}_m$ получаются из условия максимума по параметрам $Q_1, ..., Q_m$ положительной функции правдоподобия $L(x_1, ..., x_n, Q_1, ..., Q_m)$.

Если случайная величина X непрерывна, а значения x_i независимы, то

$$L(x_1,...,x_n,Q_1,...,Q_m) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,Q_1,...,Q_m).$$

Если случайная величина X дискретна и принимает независимые значения x_i с вероятностями $p(X = x_i) = p_i(x_i,Q_1,...,Q_m)$, то функция правдоподобия равна

$$L(x_1,...,x_n,Q_1,...,Q_m) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i,Q_1,...,Q_m).$$

Система уравнений согласно этому методу может записываться в двух видах:

$$\frac{\partial L(x_1,\ ...,\ x_n,\ Q_1,\ ...,\ Q_m)}{\partial Q_i}=0, \qquad i=1,\ 2,\ ...,\ m$$

или

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(x_1,\ ...,\ x_n,\ Q_1,\ ...,\ Q_m\right)\right)}{\partial Q_i}=0, \qquad i=1,\ 2,\ ...,\ m.$$

Найденные корни выбранной системы уравнений являются оценками $\hat{Q}_1,\ ...,\ \hat{Q}_m$ неизвестных параметров $Q_1, ..., Q_m$.

Пример 13.1. Случайная величина X распределена по равномерному закону, т.е.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x<a\vee x>b.\end{cases}$$

Необходимо определить оценки параметров a и b.

Решение. Для данного закона распределения определяем теоретические выражения двух (по числу неизвестных параметров) моментов:

$$\alpha_1(x)=m_X=\int_a^b\frac{x}{(b-a)}dx=\frac{(a+b)}{2};$$

$$\mu_2(x)=D_X=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

По исходной выборке определяем оценки этих же моментов $\overline{x}$ и S_0^2 по формулам (13.1) и (13.2) соответственно. Составляем систему их двух уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{(a+b)}{2}=\overline{x},\\ \sqrt{D_X}=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}=S_0.\end{cases}$$

Решив ее относительно неизвестных параметров a и b, получим оценки:

$$\hat{a}=\overline{x}-\sqrt{3}\cdot S_0, \qquad \hat{b}=\overline{x}+\sqrt{3}\cdot S_0.$$

Пример 13.2. Пусть x_i - независимые значения случайной величины X, распределенной по экспоненциальному закону, т.е.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Необходимо получить оценку параметра λ методом максимального правдоподобия.

Решение. Функция правдоподобия имеет вид

$$\ln(L(x_1,\ ...,\ x_n,\ \lambda)) = n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Далее записываем уравнение

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\,.$$

Решив его, получаем выражение для оценки параметра λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}\,.$$

ЗАДАЧИ

13.1 Найти методом моментов оценку параметра λ случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону (См. пример13.2)

Ответ: $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{x}}$.

13.2. Отобрано 5 телевизоров с целью контроля некоторых параметров. Результаты измерения напряжения источника питания в телевизорах: 12; 11,5; 12,2; 12,5; 12,3 В. Методом наибольшего правдоподобия найти оценку параметра m, если напряжение - случайная величина X, распределенная по нормальному закону .

Ответ: $\hat{m}$ = 12,1 В.

13.2. Определить методом наибольшего правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения

$$p(X = i) = p_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i}\,,$$

если в n_1 независимых опытах событие A появилось m_1 раз и в n_2 независимых опытах - m_2 раз.

Ответ: $p = (m_1 + m_2)/(n_1 + n_2)$.

14. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Доверительным называется интервал, в который с заданной вероятностью (надежностью) γ попадают значения параметра $\boldsymbol{Q}$. Вероятность γ выбирается близкой к 1: 0,9; 0,95; 0,975; 0,99.

Доверительный интервал надежностью γ для ***математического ожидания*** случайной величины X с неизвестным законом распределения:

$$\bar{x} - \frac{S_0 \cdot z_\gamma}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + \frac{S_0 \cdot z_\gamma}{\sqrt{n}}, \qquad (14.1)$$

где $z_\gamma = \arg\Phi(\frac{\gamma}{2})$ - значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ (см. приложение).

Доверительный интервал надежностью γ для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X:

$$\bar{x} - \frac{S_0 \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + \frac{S_0 \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad (14.2)$$

где $t_{\gamma,n-1}$ - значение, взятое из таблицы распределения Стьюдента (см. приложение).

Доверительный интервал надежностью γ для ***дисперсии*** случайной величины X с неизвестным законом распределения:

$$S_0^2 - z_\gamma \sqrt{\frac{2}{n-1}} S_0^2 < D_X < S_0^2 + z_\gamma \sqrt{\frac{2}{n-1}} S_0^2, \qquad (14.3)$$

где $z_\gamma = \arg\Phi(\frac{\gamma}{2})$ - значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ (см. приложение).

Доверительный интервал надежностью γ для дисперсии нормально распределенной случайной величины X:

$$\frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}} < D_X < \frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}, \qquad (14.4)$$

где $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}, \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ - значения, взятые из таблицы распределения χ^2 (см. приложение).

Доверительный интервал надежностью γ для ***вероятности*** события A в схеме независимых опытов Бернулли

$$p^* - z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} < p(A) < p^* + z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}, \qquad (14.5)$$

где $p^* = p^*(A) = \dfrac{m}{n}$ - частота появления события A в n опытах;

m - число опытов, в которых произошло событие А;

n - число проведенных опытов.

Пример 14.1. Производится серия независимых опытов с целью определения вероятности события A. В 100 опытах событие произошло 40 раз. Частота события $p^*(A) = \dfrac{m}{n}$ принимается за приближенное значение вероятности этого события. Найти вероятность того, что допущенная при этом ошибка меньше 0,1.

Решение. Необходимо найти с надежность γ следующего доверительного интервала:

$$p\left(\left|p^*(A) - p(A)\right| \le 0{,}1\right) = p(p^* - 0{,}1 < p(A) < p^* + 0{,}1) = \gamma$$

т.е. $z_\gamma \cdot \sqrt{\dfrac{p^*(1-p^*)}{n}} = 0{,}1$ (см. формулу (14.5)).

С учетом того, что $p^* = \dfrac{40}{100} = 0.4,\ z_\gamma = \dfrac{0{,}1\cdot\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}4\cdot 0{,}6}} = 2{,}041$, искомая вероятность $\gamma = 2\cdot\Phi(2{,}041) \approx 0{,}958$.

Пример 14.2. Найти минимальный объем выборки, при котором с вероятностью 0,95 точность оценки математического ожидания случайной величины по выборочному среднему равна 0,2, если $S_0 = 1{,}5$.

Решение. Из условия задачи известно, что

$$p\left(\left|m_X - \bar{x}\right| < 0{,}2\right) = p(\bar{x} - 0{,}2 < m_X < \bar{x} + 0{,}2) = 0{,}95.$$

В соответствии с формулой (14.1) точность оценки математического ожидания $\dfrac{S_0\cdot z_\gamma}{\sqrt{n}} < 0{,}2 \Rightarrow n > \left(\dfrac{S_0\cdot z_\gamma}{0{,}2}\right)^2$.

Из таблицы функции Лапласа выбираем значение $z_\gamma = \arg\Phi(\dfrac{0{,}95}{2}) = 1{,}96$.

Следовательно, $n > \left(1{,}5\cdot 1{,}96/0{,}2\right)^2 > 216{,}09 = 217$.

Пример 14.3. По результатам 10 измерений определена несмещенная оценка дисперсии $S_0^2 = 4\text{м}^2$. Определить доверительный интервал для дисперсии с надежностью 0,96.

Решение. Воспользуемся формулой (14.4), так как погрешности измерений, как правило, распределены по нормальному закону. Из таблицы χ^2 выбираем значение $\chi^2_{0{,}02;9} \approx 19{,}68;\ \chi^2_{0{,}98;9} \approx 2{,}53$.

Поэтому $\dfrac{9\cdot 4}{19{,}68} < D_X < \dfrac{9\cdot 4}{2{,}53} \Rightarrow 1{,}829 < D_X < 14{,}23$.

ЗАДАЧИ

14.1. Вычислить доверительный интервал для математического ожидания емкости конденсатора, если $\overline{x} = 20$ мкФ, $n = 16$, доверительная вероятность $\gamma = 0,9$,среднеквадратическое отклонение равно 4 мкФ.

Ответ: (18,35 мкФ; 21,65 мкФ).

14.2. Производится серия независимых опытов с целью определения вероятности события *A*. В результате 100 опытов событие произошло 36 раз. Относительная частота принимается за приближенное значение вероятности. Каково должно быть число опытов, чтобы с вероятностью 0,99 можно было утверждать, что допущенная при этом ошибка не превышает 0,05?

Ответ: 139.

14.3. По результатам пяти измерений определена несмещенная состоятельная оценка дисперсии $S_0^2 = 10\text{м}^2$. Оценить вероятность того, что истинное значение дисперсии попадает в интервал (5м^2; 20 м^2).

Ответ: 0,64.

14.4. Что происходит с длиной доверительного интервала при увеличении: а) объема выборки *n,* б) доверительной вероятности γ?

Ответ: а) уменьшается;
б) увеличивается.

15. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Критерием согласия называется случайная величина

$$U = \varphi\left(x_1, \dots, x_n\right),$$

где x_i– значение выборки,
которая позволяет принять или отклонить гипотезу о предполагаемом законе распределения.

Алгоритм проверки гипотезы при помощи ***критерия согласия*** χ^2 :

1. Построить интервальный статистический ряд вероятностей и гистограмму.

2. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу

H_0 : $f(x) = f_0(x)$, $F(x) = F_0(x)$

H_1 : $f(x) \neq f_0(x)$, $F(x) \neq F_0(x)$,

где $f_0(x)$, $F_0(x)$ - плотность и функция гипотетического закона распределения.

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия, определить оценки неизвестных параметров $\hat{Q}_1$, ..., $\hat{Q}_m$ гипотетического закона распределения.

4. Вычислить значение критерия по формуле

$$\chi^2 = n\sum_{j=1}^{M}\frac{\left(p_j - p_j^*\right)^2}{p_j} = \sum_{j=1}^{M}\frac{\left(\nu_j - np_j\right)^2}{np_j} , \qquad (15.1)$$

где p_j - теоретическая вероятность попадания случайной величины в j- й интервал при условии, что гипотеза H_0 верна:

$$p_j = p(A_j \le X < B_j) = \int_{A_j}^{B_j} f_0(x)dx = F_0(B_j) - F_0(A_j). \qquad (15.2)$$

Замечания. При расчете p_1 и p_M в качестве крайних границ первого и последнего интервалов A_1, B_M следует использовать теоретические границы гипотетического закона распределения. Например, для нормального закона $A_1 = -\infty$, $B_M = +\infty$. После вычисления всех вероятностей p_i проверить, выполняется ли контрольное соотношение

$$\left|1 - \sum_{j=1}^{M} p_i\right| \le 0,01.$$

5. Из таблицы χ^2 (см. приложение) выбирается значение $\chi^2_{\alpha,k}$, где α - заданный уровень значимости (α = 0,05 или 0,01), а k - число степеней свободы, определяемое по формуле

$$k = M - 1 - s,$$

где s - число параметров гипотетического закона распределения, значения которых были определены в п. 3.

6. Если $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить.

Последовательность действий при проверке гипотезы о законе распределения при помощи ***критерия согласия Колмогорова*** следующая.

1. Построить вариационный ряд и график эмпирической функции распределения $F^*(x)$ (см. (12.1)).

2. По виду графика $F^*(x)$ выдвинуть гипотезу:

H_0 : $F(x) = F_0(x)$,

H_1 : $F(x) \neq F_0(x)$,

где $F_0(x)$ - функция гипотетического закона распределения.

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия, определить оценки неизвестных параметров $\hat{Q}_1$, ..., $\hat{Q}_m$ гипотетического закона распределения.

4. Рассчитать 10–20 значений функции $F_0(x)$ и построить ее график в одной системе координат с функцией $F^*(x)$.

5. По графику определить максимальное по модулю отклонение между функциями $F^*(x)$ и $F_0(x)$.

$$Z = \max_{i=1}^{n} \left| F^*(x_i) - F_0(x_i) \right|. \tag{15.3}$$

6. Вычислить значение критерия Колмогорова

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot Z\,. \tag{15.4}$$

7. Из таблицы распределения Колмогорова (см. приложение) выбрать критическое значение λ_γ, $\gamma = 1 - \alpha$.Здесь α - заданный уровень значимости (α = 0,05 или 0,01).

8. Если $\lambda > \lambda_\gamma$, то нулевая гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить.

Пример 15.1. Выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины X и проверить ее с помощью критерия χ^2. Вариационный ряд, интервальные статистические ряды вероятностей и гистограммы распределения случайной величины X приведены в примере 12.2. Уровень значимости α равен 0,05.

Решение. По виду гистограмм, приведенных в примере 12.2, выдвигаем гипотезу о том, что случайная величина X распределена по нормальному закону:

$$H_0: \; f_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \; F_0(x) = 0.5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

H_1 : $f(x) \neq N(m, \sigma)$.

Используя метод моментов, определим оценки неизвестных параметров m и σ гипотетического (нормального) закона распределения:

$\hat{m} = \overline{x} = -1,7$, $\hat{\sigma} = S_0 = 1,98$.

Значение критерия вычисляем по формуле (15.1):

$$\chi^2 = 100\sum_{j=1}^{10}\frac{(p_j - p_j^*)^2}{p_j}.$$

При проверке гипотезы используем равновероятностную гистограмму. В этом случае

$$p_j^* = {}^{\nu_j}\!/_{n} = {}^{10}\!/_{100} = 0,1.$$

Теоретические вероятности p_i рассчитываем по формуле (15.2)

$$p_j = F_0(B_j) - F_0(A_j) = \Phi\left(\frac{B_j - \overline{x}}{S_0}\right) - \Phi\left(\frac{A_j - \overline{x}}{S_0}\right);$$

$p_1 = \Phi((-4,5245+1,7)/1,98)-\Phi((-\infty+1,7)/1,98) = \Phi(-1,427)-\Phi(-\infty) = 0,078.$

$p_2 = \Phi((-3,8865+1,7)/1,98)-\Phi((-4,5245+1,7)/1,98) = \Phi(-1,104)+0,845 = 0,058.$

$p_3 = 0,094$; $p_4 = 0,135$; $p_5 = 0,118$; $p_6 = 0,097$; $p_7 = 0,073$; $p_8 = 0,059$;

$p_9 = 0,174$; $p_{10} = \Phi((+\infty+1,7)/1,98)-\Phi((0,6932+1,7)/1,98) = 0,114.$

После этого проверяем выполнение контрольного соотношения

$$\left|1 - \sum_{j=1}^{10} p_j\right| = 0 < 0,01.$$

Тогда $\chi^2 = 100\cdot\left(\frac{(0,078-0,1)^2}{0,078} + \frac{(0,064-0,1)^2}{0,064} + \cdots + \frac{(0,114-0,1)^2}{0,114}\right) =$

$= 100 \cdot (0,0062 + 0,0304 + 0,0004 + 0,0091 + 0,0028 + 0,0001 + 0,0100 +$
$+ 0,0285 + 0,0315 + 0,0017) = 100 \cdot 0,1207 = 12,07.$

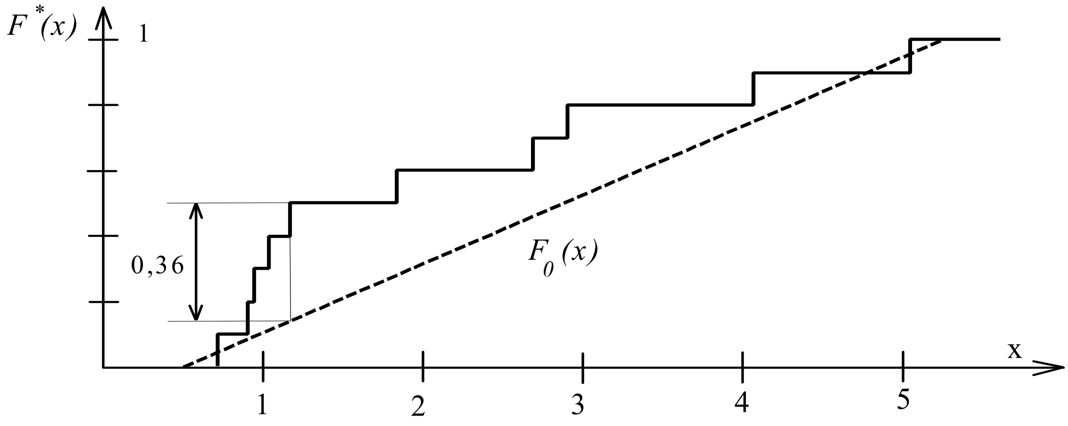
После этого из таблицы распределения χ^2 выбираем критическое значение $\chi^2_{\alpha;k} = \chi^2_{0,05;7} = 14,07$. Так как $\chi^2 < 14,07$, то гипотеза H_0 принимается (нет основания ее отклонить).

Пример 15.2. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о равномерном законе распределения $R(0,5;\ 5,25)$ случайной величины по выборке объема 10: 2,68 1,83 2,90 1,03 0,90 4,07 5,05 0,94 0,71 1,16, уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. Вариационный ряд данной выборки имеет вид:

0,71 0,90 0,94 1,03 1,16 1,83 2,68 2,90 4,07 5,05.

После этого строим график эмпирической функции распределения $F^*(x)$.



Теоретическая функция распределения $F_0(x)$ равномерного закона $R(0{,}5;5{,}25)$ равна

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, x < 0{,}5 \\ (x-0{,}5)/(5{,}25-0{,}5), 0{,}5 \le x < 5{,}25 \\ 1, x > 5{,}25 \end{cases}.$$

Максимальная разность по модулю между графиками $F^*(x)$ и $F_0(x)$

Z = 0,36 при x = 1,16.

Вычислим значение критерия Колмогорова $\lambda = \sqrt{n} \cdot Z = \sqrt{10} \cdot 0{,}36 = 1{,}14$.

Из таблицы Колмогорова выбираем критическое значение $\lambda_\gamma = \lambda_{1-\alpha} = \lambda_{0,95} = 1{,}36$. Так как λ < 1,36, гипотеза о равномерном законе распределения принимается.

ЗАДАЧИ

15.1. С помощью критерия Колмогорова проверить гипотезу о законе распределения случайной величины по выборке, приведенной в задаче 12.2.

15.2. По критерию χ^2 проверить гипотезу о законе распределения по выборке, приведенной в задаче 12.3.

15.3. Проверить гипотезу о равномерном и экспоненциальном законах распределения по данным задачи 14.2.

16. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ И ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых двухмерная СВ (X,Y) принимает определенные значения и результаты опытов представляют собой двухмерную выборку вида $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n)\}$. Первичная обработка опытных данных включает в себя обработку составляющих X и Y как одномерных величин (см. занятия 12 - 15) и вычисление оценок присущих только двухмерным (многомерным) случайным величинам.

Состоятельная несмещенная оценка ***корреляционного момента*** равна:

$$K_{XY}^{*} = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}), \tag{16.1}$$

где x_i, y_i - значения, которые приняли случайные величины X, Y в i-м опыте;

$\overline{x}$, $\overline{y}$ - средние значения случайных величин X и Y соответственно.

Состоятельная оценка ***коэффициента корреляции***

$$R_{XY}^{*} = \frac{K_{XY}^{*}}{S_0(x)S_0(y)}. \tag{16.2}$$

Доверительный интервал с надежностью γ для коэффициента корреляции R_{XY}^{*} и случая двухмерного нормального распределения

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} < R_{XY} < \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}, \tag{16.3}$$

где $a = 0,5\cdot\ln\left(\frac{1+R_{XY}^{*}}{1-R_{XY}^{*}}\right) - \frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$; $b = 0,5\cdot\ln\left(\frac{1+R_{XY}^{*}}{1-R_{XY}^{*}}\right) + \frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$;

$z_\gamma = \arg\Phi(\frac{\gamma}{2})$ - значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ (см. прил. 2);

Алгоритм проверки ***гипотезы об отсутствии корреляционной зависимости*** следующий (предполагается, что двухмерная случайная величина (X, Y) распределена по нормальному закону).

.1. Формулируется гипотеза:

H_0: $R_{XY} = 0$;

H_1: $R_{XY} \neq 0$.

Здесь R_{XY} - теоретический коэффициент корреляции.

2. Вычисляется оценка коэффициента корреляции R_{XY}^{*} по формуле (16.2).

3. Определяется значение критерия

$$t = \frac{R_{XY}^{*}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\left(R_{XY}^{*}\right)^2}}, \tag{16.4}$$

который распределен по закону Стьюдента с (n-2) степенями свободы, если гипотеза H_0 верна.

4. По заданному уровню значимости α вычисляется доверительная вероятность $\gamma = 1 - \alpha$ и из таблицы Стьюдента выбирается критическое значение $t_{\gamma, n-2}$.

5. Если $|t| > |t_{\gamma, n-2}|$, то гипотеза H_0 отклоняется, а следовательно, величины X, Y коррелированны. В противном случае гипотеза H_0 принимается.

Регрессией случайной величины Y на X называется условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x$:

$$m_{Y/x} = \mathrm{M}[Y / X = x] .$$

Регрессия Y на X устанавливает зависимость среднего значения величины Y от величины X. Если X и Y независимы, то

$$m_{Y/x} = m_Y = const.$$

Если величины X,Y распределены по нормальному закону, то регрессия является линейной:

$$m_{Y/x} = a_0 + a_1 x.$$

Оценки параметров $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ по методу наименьших квадратов вычисляются по следующим формулам:

$$\hat{a}_1 = \frac{K^*_{XY}}{S_0^2(x)}, \tag{16.5}$$

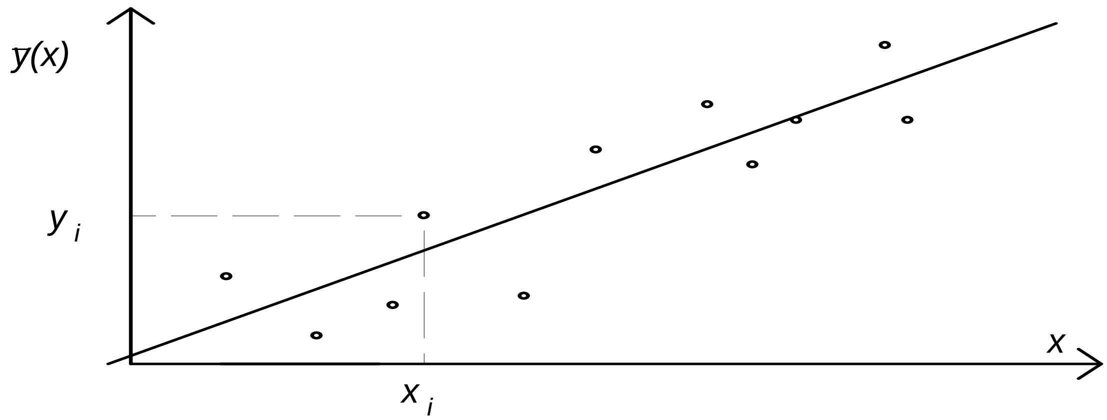
$$\hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1 \cdot \overline{x} . \tag{16.6}$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ - оценки математического ожидания величин X и Y;

$S_0^2(x)$ - оценка дисперсии величины X;

K^*_{XY} - оценки корреляционного момента величин X и Y.

Для визуальной проверки правильности вычисления величин $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ необходимо построить диаграмму рассеивания и график $\overline{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$.



Если оценки параметров a_0, a_1 рассчитаны без грубых ошибок, то сумма квадратов отклонений всех точек (x_i, y_i) от прямой $\overline{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ должна быть минимально возможной.

Пример 16.1. Выборочный коэффициент корреляции, вычисленный по выборке объема 10, $R^*_{XY} = -0,64$. Найти 90%-ный доверительный интервал для коэффициента корреляции R_{XY} .

Решение. Из таблицы Лапласа выбирается значение $z_{0,9} = 1,645$. Тогда

$a = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-0,64}{1+0,64}\right) - \frac{1,645}{\sqrt{7}} = -1,380$, b = -0,136.

Доверительный интервал вычисляем по формуле (16.3).

$\frac{e^{2\cdot(-1,38)}-1}{e^{2\cdot(-1,38)}+1} < R_{XY} < \frac{e^{2\cdot(-0,136)}-1}{e^{2\cdot(-0,136)}+1}$, т.е. -0,881 < R_{XY} < -0,135.

Пример 16.2. Проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости при следующих данных: $R^*_{XY} = 0,2,$ n = 20; α = 0,05. Предполагается также, что двухмерный закон распределения - нормальный.

Решение. Вначале вычислим значение критерия t по формуле (16.4)

$$t = \frac{0,2\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{1-0,2^2}} = 0,866.$$

Из таблицы Стьюдента выбираем критическое значение $t_{\gamma;n-2} = t_{1-\alpha;n-2} = t_{0,95;18} = 2,10.$ Так как $|t| < 2,10,$ то гипотеза H_0 принимается, потому что нет оснований ее отклонить.

ЗАДАЧИ

16.1. Построить доверительный интервал для коэффициента корреляции двухмерной нормально распределенной совокупности по следующим данным: $R^*_{XY} = 0,14$, n =300, γ=0,95.

Ответ: (-0,03; 0,25).

В задачах 16.2–16.3 проверить гипотезу о некоррелированности случайных величин X и Y, предполагая, что двухмерный закон распределения нормальный.

16.2. $R^*_{XY} = 0,5; n = 20; \alpha = 0,05.$

16.3. $R^*_{XY} = 0,1; n = 5; \alpha = 0,01.$

В задачах 16.4–16.5 найти уравнение прямой регрессии $\overline{y}(x)$ для следующих экспериментальных данных:

16.4

X	1	4	9	16	25
Y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

Ответ: $\overline{y}(x) = 0,922x - 0,909.$

16.5

X	1	2	3	4	5	6
Y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

Ответ: $\overline{y}(x) = 3,023x - 1,08.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988. - 416 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: – Учебник. - 5-е изд., стереотип. - М.: Высш. шк., 1999. - 576 с.
3. Герасимович А.И. Математическая статистика. – Мн.: Выш. шк., 1983. - 279 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Унукович В.Т. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студентов. инж.-экон. спец. – Мн.: Харвест, 2000.-384 с.
6. Аксенчик А.В., Волковец А.И., Корбут А.А., Коренская И.Н. Методические указания и контрольные задания по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика" для студентов всех специальностей БГУИР заочной формы обучения - Мн.: БГУИР, 2002.- 60с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3987	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2089	2066	2943	2920
0,8	2897	2874	2950	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	6119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0038	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0004	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0556	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0792	0832	0871	0909	0948	0987	1025	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1949	1985	2019	2054	2088	2126	2156	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3105	3123
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3364	3389
1,0	0,341	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3707	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3961	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4250	4265	4278	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544
1,7	4554	4563	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4685	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2,0	0,477	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4825	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952	3,4	0.49966	3,5	0,49977
3,6	0,49984	3,7	0,49989	3,8	0,49993	3,9	0.49995	4,0	0,499968	5,0	0,4999999

Приложение 3

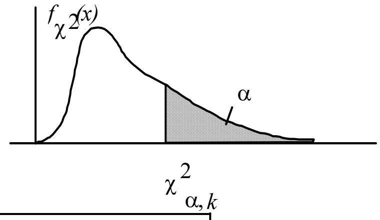
Таблица распределения Стьюдента $\gamma = \int\limits_{-t_{\gamma,k}}^{t_{\gamma,k}} f_t(x)\,dx$

	γ			
k	0,90	0,95	0,98	0,99
1	6,31	12,71	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,77	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,943	2,45	3,14	4,71
7	1,895	2,36	3,00	3,50
8	1,860	2,31	2,90	3,36
9	1,833	2,26	2,82	3,25
10	1,812	2,23	2,76	3,17
12	1,782	2,18	2,68	3,06
14	1,761	2,14	2,62	2,98
16	1,746	2,12	2,58	2,92
18	1,734	2,10	2,55	2,88
20	1,725	2,09	2,53	2,84
22	1,717	2,07	2,51	2,82
24	1,711	2,06	2,49	2,80
30	1,697	2,04	2,46	2,75
40	1,684	2,02	2,42	2,70
60	1,671	2,00	2,39	2,66
120	1,658	1,980	2,36	2,62
∞	1,645	1,960	2,33	2,58

Приложение 4

Таблица распределения χ^2

$$p(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha$$



	α					
k	0,01	0,02	0,05	0,95	0,98	0,99
1	6,64	5,41	3,84	0,004	0,001	0,000
2	9,21	7,82	5,99	0,103	0,040	0,020
3	11,34	9,84	7,82	0,352	0,185	0,115
4	13,28	11,67	9,49	0,711	0,429	0,297
5	15,09	13,39	11,07	1,145	0,752	0,554
6	16,81	15,03	12,59	1,635	1,134	0,872
7	18,48	16,62	14,07	2,17	1,564	1,239
8	20,10	18,17	15,51	2,73	2,03	1,646
9	21,07	19,68	16,92	3,32	2,53	2,09
10	23,20	21,2	18,31	3,94	3,06	2,56
12	26,2	24,1	21,0	5,23	4,18	3,57
14	29,1	26,9	23,7	6,57	5,37	4,66
16	32,0	29,6	26,3	7,96	6,61	5,81
18	34,8	32,3	28,9	9,39	7,91	7,02
20	37,6	35,0	31,4	10,85	9,24	8,26
22	40,3	37,7	33,9	12,34	10,60	9,54
24	43,0	40,3	36,4	13,85	11,99	10,86
26	45,6	42,9	38,9	15,38	13,41	12,20
28	48,3	45,4	41,3	16,93	14,85	13,56
30	50,9	48,0	43,8	18,49	16,31	14,95

Приложение 5

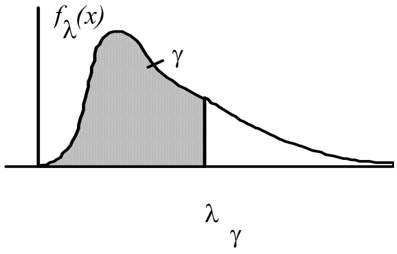


Таблица распределения Колмогорова

$$p(0 \le \lambda < \lambda_\gamma) = \gamma$$

λ_γ	γ
0,50	0,0361
0,54	0,0675
0,58	0,1104
0,62	0,1632
0,66	0,2236
0,70	0,2888
0,74	0,3560
0,78	0,4230
0,82	0,4880
0,86	0,5497
0,90	0,6073
0,94	0,6601
0,98	0,7079
1,02	0,7500
1,06	0,7889
1,10	0,8223
1,14	0,8514
1,18	0,8765
1,22	0,8981
1,26	0,9164
1,30	0,9319
1,34	0,9449
1,38	0,9557
1,42	0,9646
1,46	0,9718
1,50	0,9778
1,54	0,9826
1,58	0,9864
1,62	0,9895
1,66	0,9918
1,70	0,9938
1,74	0,9953
1,78	0,9965
1,82	0,9973
1,86	0,9980
1,90	0,9985
1,94	0,9989
1,98	0,9992

Приложение 6

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1.1. Телеграфное сообщение состоит из символов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 2/5 сообщений точка и 1/3 сообщений тире. Известно, что среди передаваемых сигналов точка и тире встречаются в соотношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принято тире.

1.2. Имеется случайная величина *X*, принимающая значения $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Известно, что $m_X = 1,6; D_X = 0,44$. Найти ряд распределения вероятностей случайной величины *X*.

1.3. В нормально распределенной случайной совокупности 15% значений *X* меньше 12 и 40% значений больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

Вариант 2

2.1. Прибор содержит два блока, исправность каждого из которых необходима для функционирования прибора. Вероятности безотказной работы в течение времени *T* для этих блоков соответственно равны 0,4 и 0,5. Прибор испытывался в течение времени *T* и вышел из строя. Определить вероятность того, что отказал первый блок.

2.2. Имеется случайная величина *X*, принимающая значения $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Известно, что $m_X = 1,3; \alpha_2(x) = 2,1$. Найти ряд распределения вероятностей случайной величины *X*.

2.3. Вероятность того, что случайная величина с нормальным распределением примет значение не большее 1 составляет 0,5. Кроме того, вероятность превышения ей уровня 5,0 составляет 0,0228. Определить для этой случайной величины: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) вероятность того, что она примет значение, меньшее 3,0.

Вариант 3

3.1. Прибор содержит два блока, исправность каждого из которых необходима для функционирования прибора. Вероятности безотказной работы в течение времени *T* для этих блоков соответственно равны 0,4 и 0,5. Прибор испытывался в течение времени *T* и вышел из строя. Определить вероятность того, что отказали оба блока.

3.2. Имеется случайная величина *X*, принимающая значения $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Известно, что $m_X = 0,1; D_X = 0,89$. Найти ряд распределения вероятностей случайной величины *X*.

3.3. СВ X распределена нормально с m_X= 12,5. Вероятность попадания СВ *X* в интервал]10, 15[равна 0,2. Чему равна вероятность попадания в интервал]35, 40[?

Вариант 4.

4.1. По линии связи передается кодированный с помощью букв А, В, С текст. Вероятности передачи отдельных букв таковы: $p(A) = 0,5; p(B) = 0,3; p(C) = 0,2$. Вероятности искажения при передаче отдельных букв равны соответственно 0,01; 0,03; 0,02. Установлено, что текст из двух букв принят без искажений. Чему равно вероятность, что передавался сигнал АВ?

4.2. Имеется случайная величина *X*, принимающая значения $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0$. Известно, что $m_X = -1,4; \alpha_2(x) = 2,4$. Найти ряд распределения вероятностей случайной величины *X*.

4.3. Имеется случайная величина X, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ. Требуется приблизительно заменить нормальный закон равномерным так, чтобы сохранились неизменными основные характеристики случайной величины: математическое ожидание и дисперсия