**Скалярные и векторные**

**величины**

Некоторые величины в физике, механике и других науках полностью определяются заданием одного числа. Например, объем, масса, температура и др. Такие величины называются скалярными, а числа иногда называют скалярами. Но есть величины, для определения которых надо задать не только число, но и направление. Например, при изучении движения тела мы должны указать не только величину скорости, с которой движется тело, но и направление движения. При определении действия силы необходимо указать не только величину этой силы, но и направление её действия.

*x*

*Рис* 1

*y*

*My*

*Mx*

*Mz*

*z*

*x*

*y*

0

Такие величины называются векторными. Для работы с ними было введено понятие вектора, имеющее и самостоятельное значение в математике.

Любая упорядоченная пара точек *А* и *B* в пространстве определяет направленный отрезок, т.е. отрезок вместе с заданным на нём направлением. Если точка *А* – первая, то её называют началом отрезка, а точку *B* – его концом. Направлением отрезка считается направление от начала к концу отрезка.

**Определение**. Вектором называется направленный отрезок, или (что то же самое) упорядоченная пара точек.

Вектор обозначается - двумя буквами, при этом первая буква- начало вектора, а вторая - его конец.

Вектор можно обозначать одной буквой с черточкой наверху - . Направление вектора на рисунке указывается стрелкой.



*Рис*. 2.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым и обозначается .

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (или модулем)и обозначается или .

Векторы  и  называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определенного направления, длина его, очевидно, равна нулю, т.е. .

**Определение.** Векторы  и называются равными , если они:

а) коллинеарны;

б) одинаково направлены;

в) равны по длине.





*Рис*.3.







*Рис*.4.



Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, т.е. начало вектора может быть в любой точке пространства, но длина и направление фиксированы. Такие векторы называются свободными. В дальнейшем будем изучать только свободные векторы, называя их просто векторами.









*Рис*.5.

**Проекция вектора на ось**

Рассмотрим некоторый вектор и числовую ось *Ou*. Проведём через точки *A* и *B* плоскости, перпендикулярные к оси *Ou*. Обозначим через и точки пересечения этих плоскостей с осью.

Проекция вектора *AB* на ось *Ou* обозначается пр*uAB*.

**Определение.** Проекцией вектора *AB* на ось *Ou* называется число, равное , если направление  совпадает с направлением *Ou* и , если направление  противоположно *Ou*.

Нетрудно показать, что пр*uAB=,*

где *ϕ* - угол, образованный вектором *AB* с осью *Ou* .

Рис.6.





















*Координаты вектора*. Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат и произвольный вектор . Пусть далее

.

Проекции *X*, *Y*, *Z* вектора называют его координатами и записывают так: .

Для любых точек и  координаты вектора определяются формулами



В этом случае модуль вектора находится по формуле

.

Если через обозначить углы наклона вектора к осям координат, то



 называют направляющими косинусами вектора .

Очевидно, что .

**Линейные операции над векторами и их свойства**

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

**Определение**. Для любых двух векторов  и суммой называется третий вектор, который идёт из начала вектора в конец вектора , если вектор приложен к концу вектора .

Разностью двух векторов и называется вектор , который в сумме с вектором составляет вектор .

Аналогично сумме двух векторов можно находить сумму любого числа векторов.

*Рис.*1.7.

Если векторы  и  неколлинеарны, то  и разность  этих векторов можно найти по правилу параллелограмма.













Построим параллелограмм на векторах  и , выходящих из одной точки, как на сторонах. Тогда одна диагональ этого параллелограмма, выходящая из общего начала векторов  и , является суммой , а другая диагональ­ – разностью этих векторов.

**Определение**. Пусть даны вектор  и число *λ*. Произведением  называется вектор, который коллинеарен вектору , имеет длину, равную , и направление такое же, как у вектора , если *λ*>0, и противоположенное, если *λ*<0.

*Рис.*7.















Если , то при умножении вектора  на число *λ* вектор  «растягивается» в *λ* раз, а если - «сжимается». При *λ*<0 изменяется направление вектора на противоположное.

*Рис.*8.

Свойства линейных операций:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. .

Эти свойства позволяют выполнять действия с векторными многочленами по тем же правилам, по которым выполняются действия с алгебраическими многочленами.

Если известны координаты векторов

 и , то





Отсюда легко получить условия коллинеарности двух векторов.

Векторы  и коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.



**Определение**. Три вектора называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.

Любые три некомпланарных вектора образуют в пространстве базис. Это означает, что любой вектор может быть единственным образом представлен в виде

,(2) где *λ*,*μ*,*γ* ­­ ­– ­­некоторые числа.

Представление (2) называется разложением вектора по базису .

**Скалярное произведение векторов**

**Определение**. Скалярным произведением двух векторов и называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.







*Рис.*9.

Скалярное произведение обозначается .

Таким образом,



Учитывая, что ,а , можно записать

.

Отсюда получаются формулы



**Свойства скалярного произведения**

1. .
2. .
3. .

Указанные свойства позволяют находить скалярное произведение векторных многочленов по тем же правилам, по которым перемножаются алгебраические многочлены, например:



.

4. ,если 

Скалярное произведение  называется скалярным квадратом вектора и обозначается .Таким образом, , откуда, в частности, получаем 

5. ⊥.

Два вектора и  перпендикулярны тогда и только тогда, когда скалярное произведение равно нулю.

**Выражение скалярного произведения через координаты векторов**

Если , то справедливы следующие формулы и утверждения:

,

⊥,

.

**Векторное произведение векторов**

Векторы  называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях (или в одной плоскости).

Тройка векторов, приведенных к одному началу, называется упорядоченной, если указанно какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим. Например, в записи  – первый вектор, – второй, – третий.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка векторов называется левой.

**Определение**. Векторным произведением вектора  на вектор называется вектор, обозначаемый символом , который определяется следующими условиями:

*Рис.*10.















1. , где ;
2. вектор перпендикулярен к каждому из векторов и;
3. векторы и образуют правую тройку векторов.

**Свойства векторного произведения**

1. Два вектора и коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю. 
2. Модуль векторного произведения  равен площади параллелограмма ,построенного на векторахи. .
3. .
4. .
5. .

Если ,,то



**Смешанное произведение трех векторов**

**Определение**. Смешанным произведением трех векторов ,и называется число, равное скалярному произведению вектора  на векторное произведение векторов и ,

**Теорема**. Смешанное произведение равно объему *V* параллелепипеда, построенного на векторах ,и , взятому со знаком «+», если тройка векторов ,, правая, и со знаком «-», если тройка левая. Если же ,, компланарны, то . Т.е.



Из теоремы легко получается следующее свойство:



которое позволяет обозначать смешанное произведение более простым символом: , т.е.

.

Если ,,, то смешанное произведение определяется формулой

