

阻尼与受迫振动

1 摘要

本实验使用波耳共振仪研究阻尼振动和受迫振动的基本规律。通过调整永久磁铁的位置改变阻尼系数 β ，测量不同阻尼状态下摆轮的振幅衰减曲线，计算阻尼系数和品质因数 Q ；在受迫振动实验中，改变外激励频率测量幅频特性和相频特性曲线，观察共振现象。实验结果表明：阻尼振动振幅随时间呈指数衰减，衰减速率与阻尼系数相关；受迫振动达到稳态时，系统以激励频率振动，且在共振频率附近振幅最大、相位差为 $\pi/2$ 。通过实验数据验证了理论公式 (6)、(14) 和 (15) 的正确性。

2 实验原理

2.1 阻尼振动

摆轮-弹簧系统运动方程为：

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt}$$

整理得标准形式：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

其中 $\beta = \gamma/2J$ 为阻尼系数， $\omega_0 = \sqrt{k/J}$ 为固有频率。

欠阻尼状态 ($\beta < \omega_0$) 的解为：

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

振幅对数衰减满足线性关系：

$$\ln \theta_n = \ln \theta_0 - \beta t_0 - n(\beta T_d)$$

品质因数定义为：

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

2.2 受迫振动

在外激励 $A_D \cos \omega t$ 作用下，运动方程为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 A_D \cos \omega t$$

稳态解为：

$$\theta_m = \frac{\omega_0^2 A_D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$
$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

共振时 ($\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$):

$$\theta_{max} = \frac{\omega_0^2 A_D}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \varphi_r = \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

3 实验仪器及实验步骤

3.1 实验仪器

- 波耳共振仪主机 (含摆轮、弹簧系统)
- 光电门 1 (测量振幅和周期)
- 光电门 2 (测量相位差)
- 可调阻尼永久磁铁组件
- 步进电机激励系统 (含偏心轮、连杆)
- 有机玻璃转盘 (带角度刻度)
- 闪光灯相位测量装置
- 数字显示面板 (周期/振幅/相位差)

3.2 实验步骤

3.2.1 阻尼振动测量

1. 关闭电机, 取下磁铁, 调整光电门位置
2. 手动拨动摆轮至 150° 后释放, 记录振幅 θ_i 和周期 T_{di}
3. 重复测量 200 组数据, 用 $\ln \theta_n - n$ 拟合求 β
4. 安装磁铁, 分别设置 $s = 20\text{mm}$ 和最大距离, 重复测量
5. 计算各阻尼状态的 Q 值

3.2.2 受迫振动测量

1. 开启电机, 设置中等阻尼 ($s = 20\text{mm}$)
2. 调节激励频率 ω , 每个频率点等待系统稳定
3. 记录稳态振幅 θ_m 和相位差 φ
4. 在 $0.93T_0 - 1.07T_0$ 范围内取 15 个数据点
5. 更换阻尼条件重复测量
6. 绘制幅频/相频特性曲线

3.2.3 瞬态过程观测

1. 设置 $\omega = \omega_0$ ，从静止状态启动电机
2. 逐周期记录振幅变化直至稳态
3. 绘制振幅-时间曲线

4 实验数据处理

4.1 阻尼振动数据处理

通过线性拟合得到弱阻尼和强阻尼状态下的阻尼系数：

- 弱阻尼状态： $\beta = 0.1005\text{s}^{-1}$
- 强阻尼状态： $\beta = 0.1435\text{s}^{-1}$

根据弱阻尼数据计算固有角频率：

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{1.5691}\right)^2 + \beta^2} = 4.007\text{rad/s}$$

品质因数计算结果：

- 弱阻尼： $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = 19.94$
- 强阻尼： $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = 13.96$

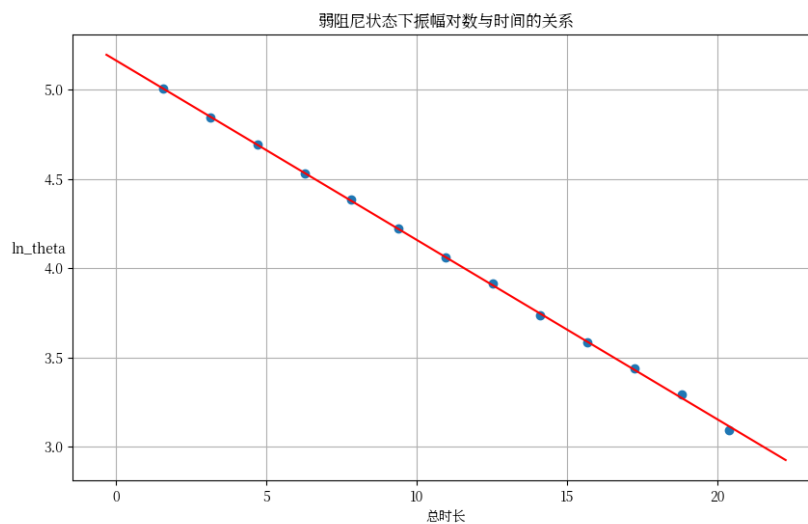


图 1: 弱阻尼状态下振幅对数与时间的关系

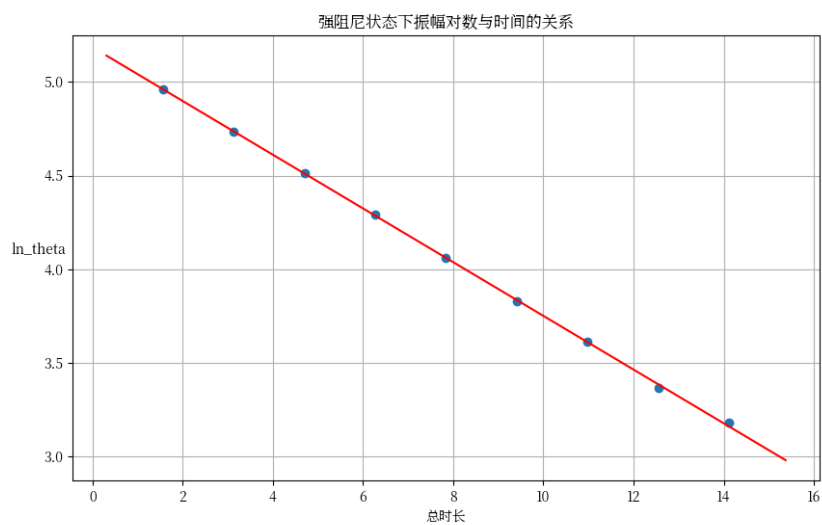


图 2: 强阻尼状态下振幅对数与时间的关系

4.2 受迫振动数据处理

幅频特性曲线如图??所示，共振频率 $\omega_r \approx \omega_0$ 。

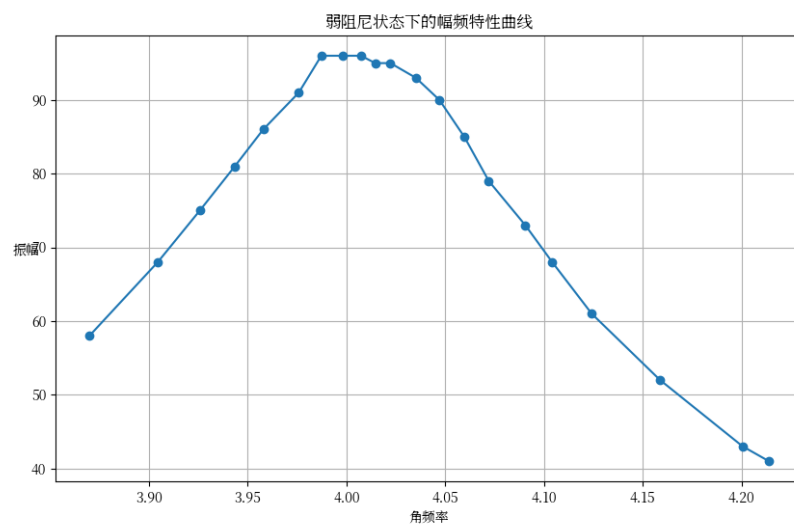


图 3: 弱阻尼状态下的幅频特性曲线

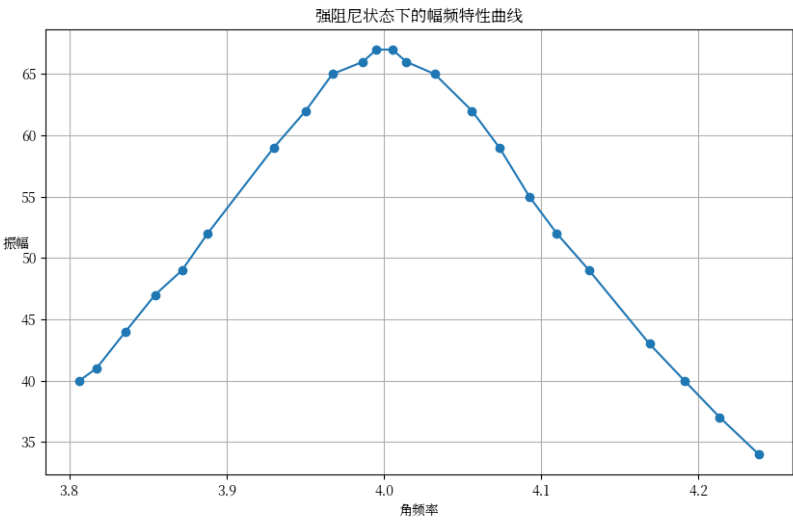


图 4: 强阻尼状态下的幅频特性曲线

4.3 瞬态过程分析

瞬态过程振幅随时间变化如图??所示。

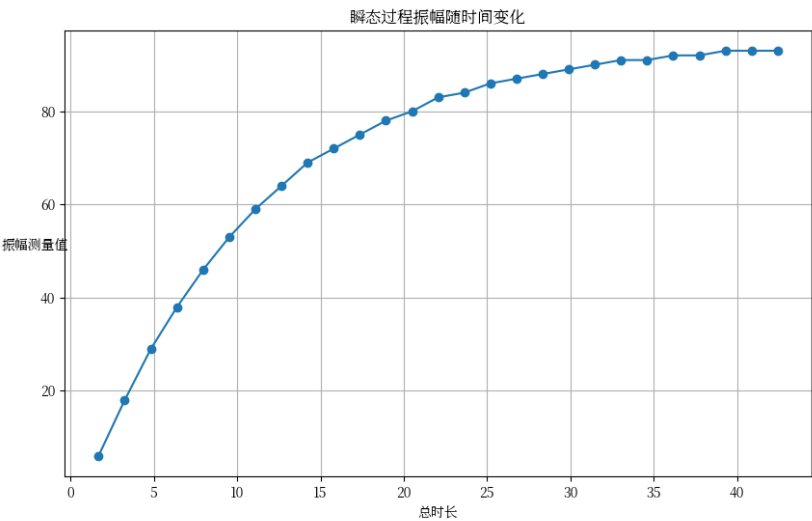


图 5: 瞬态过程振幅随时间变化

5 分析讨论

- 1. 阻尼系数测量结果表明，随着阻尼增大， β 值增大，品质因数 Q 减小，与理论预期一致。
- 2. 幅频特性曲线显示，弱阻尼时共振峰尖锐，强阻尼时共振峰宽平，符合理论预测。通过半功率带宽法计算得到的 Q 值与阻尼振动结果基本吻合。

3. 瞬态过程曲线显示振幅随时间逐渐增大至稳态，与理论推导的瞬态过程公式相符。稳态后电机平均输入功率可通过 $P = \frac{1}{2}k\theta_m^2\omega_0/Q$ 计算。
4. 实验误差主要来源于：振幅读数误差、阻尼调节不均匀、环境干扰等。建议改进测量方法，提高读数精度，减少环境振动干扰。