

## II 实验讲义

### II-0 数据分析与不确定度评定基础

(改编自朱鹤年先生编著的教材：新概念基础物理实验讲义，清华大学出版社，2013年)

#### 1. 物理量与测量

科学实验离不开对现象的观察，也离不开对表征状态或过程的物理量的测量。

国际计量局在《A concise summary of the International System of Units ( 8<sup>th</sup> edition, 2006)》的页首写道：“Metrology is the science of measurements, made at a known level of uncertainty, in any field of human activity”<sup>[1]</sup>。这说明了测量的普遍性和重要性，也说明了在测量结果中评定不确定度的必要性。物理实验中，定性和半定量观测固然重要，但基于对物理量科学测量的定量研究通常更为重要。

国际计量学通用名词术语《VIM 2007》中定义：测量是用实验方法获得量的量值的过程。可测量的量(measurable quantity)是“现象、物体或物质的可以定性区别和定量确定的属性”<sup>[2][16]</sup>。

物理实验中，不仅要明确测量对象，恰当地选择测量方法，正确完成测量的各步骤，还要学习误差理论和实验数据处理的基本概念，学会能对多数测量表示出完整的测量结果，包括给出确定置信水平的不确定度。

完整的测量结果表示中，必须包括测量所得的被测量的量值和测量单位，一般应给出不确定度。必要时还需写出对测量结果有作用的影响量的值。如测电流计内阻时写出室温  $t = 20.0 \pm 1.0^{\circ}\text{C}$ ，因为温度是测内阻的重要影响量。测量对象、测量单位、测量方法和测量不确定度曾被称为测量的四个要素。

#### 2. 误差的定义、分类及简要处理方法

##### 2.1 测量误差(error of measurement) 的定义

通常说误差是测量结果  $y$  和被测量的真值或约定真值  $Y_t$  之差  $dy$

$$dy = y - Y_t \quad (1)$$

真值是理想的概念。只有定义严密时通过完善的测量才可能获得或接近之，它一般无从得知。因此一般不能计算误差，只在少数情况下用准确度高的实际值作约定真值时才能计算误差。

误差的普遍性。由于测量仪器不准确、原理或方法不完善、环境条件不稳定、人员操作不熟练等原因，任何测量结果都可能有误差。虽一般真值未知而不能计算误差，但能分析它产生的主要因素，减小或基本消除某些误差分量对测量的影响。对结果中未能消除的误差分量，要估计出它们的极限值或表征其分布特征的参量，如标准偏差。误差的普遍性要求我们重视对误差的分析，重视不确定度评定，尽可能完整地表示测量结果。

##### 2.2 误差的分类及简要处理方法

误差主要分为两类：随机误差和系统误差。它们的性质不同，应分别处理。

###### 2.2.1 随机误差(random error)

###### 随机误差的定义

随机误差是重复测量中以不可预知方式变化的测量误差分量。电表轴承摩擦力矩的变动、螺旋测微计的测头压紧力在一定范围内变化、操作读数时在一定范围内随机变动的视差影响、数字仪表末位取整数时的随机舍入过程等，都会产生一定的随机误差分量。

随机误差分量是测量误差的一部分，其大小和符号虽然不知，但在相同条件下对同一稳定被测量的多次重复测量中，它们的分布常常满足一定的统计规律。**随机误差分布绝大多数是“有界性”的，大多数有抵偿性，相当多的有单峰性**，即绝对值小的误差出现的概率较大。

###### 算术平均值(arithmetic mean or average)

**大多数随机误差有抵偿性。**测量次数足够多时，正、负误差之和的绝对值近似相等。因此用多次测得值的算术平均值作被测量的估值，能减小随机误差的影响。一般应使测量次数 $n \geq 6$ 。同一量重复测了 $n$ 次，测得值为 $y_i$ ，平均值为：

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2)$$

#### 实验标准[偏]差(experimental standard deviation)

随机误差引起测得值 $y_i$ 的分散性用实验标准偏差 $s$ 表征，由贝塞耳法(Bessel method)算出

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3)$$

$s$ 反映了随机误差的分布特征。 $s$ 大表示测得值分散，随机误差的分布范围宽，精密度(precision)低； $s$ 小表示测得值密集，随机误差的分布范围窄，精密度高。

**测量准确度(accuracy)**定义为closeness of agreement between a measured quantity value and a true quantity value of the measurand<sup>[2][2]</sup>。准确度反映随机误差和系统误差的综合影响程度，它是一个定性的概念。测量准确度的定量表征用测量不确定度或测量误差限值。不确定度小，准确度高。

#### 残差与最小二乘法

残差(residual, residual error)是测量列中某一测得值 $y_i$ 与该测量列的算术平均值之差。更一般的定义为 $y_i$ 与其(最佳)估计值 $\hat{y}_i$ 之差，记作

$$v_i = y_i - \hat{y}_i \quad (4)$$

数据处理要充分利用测量所获得的有效信息，减小误差对结果的影响。最小二乘法是一种根据实验数据求未知量“最佳”估值的方法，**最小二乘原理简述为：使(等精密度)因变量 $y_i$ 的残差平方和(residual sum of square或记作RSS)、或标准差平方(或方差)为极小值<sup>[3]</sup>**。残差平方和最小记作

$$RSS = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad (5)$$

#### 2.2.2 系统误差(systematic error)

系统误差是重复测量中保持恒定或以可预知方式变化的测量误差分量，简称系差。

系统误差举例：指针式电表的零位误差，电表分度或磁场分布不匀，伏安法测电阻时电流表内接或外接引起的表内阻影响的分量，单摆运动方程小角度解近似，螺纹副的螺距有误差，测量时温度等影响量对额定值的偏离，空气浮力对天平质量称量的影响，空气折射率近似地取1等，都会产生一定的系差分量。

系统误差包括已定系差和未定系差。

**已定系差**指符号和绝对值已经知道的误差分量。实验中应尽量消除已定系差，或对测量结果进行修正，得到已修正结果(corrected result)。修正值(correction)等于负已定系差。已修正结果等于测得值加修正值。修正式为

$$\text{已修正测量结果} = \text{测得值(或其平均值)} - \text{已定系差} \quad (6)$$

**未定系差**指符号或绝对值未被确定而未知的系差分量。一般只能估计其限值或分布特征值。未定系差分量大多和下文的B类不确定度分量来源有大致对应关系。对于不同测量条件、不同被测量值或不同时段等，未定系差在一定意义上可以说具有随机性。例如在 $(20.0 \pm 1.0)^\circ\text{C}$ 的空调室内，某一时刻室温对 $20.0^\circ\text{C}$ 的偏离误差是定值系差，但不同时刻的偏离误差在 $\pm 1.0^\circ\text{C}$ 内变动，变动范围已知，但分布规律未知，具有随机性。

误差的随机性，包括随机误差的随机变量特性和未定系差的某种“随机性”，是不确定度分量方和根

---

合成法的基础，因而也是整个误差分析与不确定度评定体系的重要客观依据。

系差分析的重要性。大量一般测量的实践表明，除了少数比较测量之外，系统误差分量对测量结果的影响常常显著地大于随机误差分量的影响。因此大学物理实验要重视对系差的分析，尽量减小它对测量结果的影响：1)对已定系差进行修正；2)合理评定系差分量大致对应的B类不确定度分量；3)通过方案选择、参数设计、计量器具校准、环境条件控制、计算方法改进等环节来减小系差的影响。物理实验中，经常用多个散布测量点作直线拟合求斜率，将一些未定系差随机化，是减小系差影响的方法之一。

### 3. 直接测量结果的不确定度评定

不必测量与被测量有函数关系的其它量，就能直接得到被测量值的测量方法叫直接测量法。例如用等臂天平测质量、用电流表测电流等都是直接测量。

直接测量结果中，不计已定系差时，被测量值 $y$ 可取多次测量的平均值 $\bar{y}$ ；若只测一次， $y$ 就取单次测得值。如有已定系差，还须按(6)式将测得值或其平均值减去已定系差，得到 $y$ 的值。

#### 3.1 测量不确定度的概念及其与误差、误差限的关系

不确定度是与测量结果相关联的参量，是表征被测量的真值（或指与定义、测量任务相关联的被测量值，或指参考值）所处的量值散布范围的评定。

[例] 氢光谱实验中，测得 $H_{\alpha}$ 线 $15^{\circ}\text{C}$ 时的波长为 $\lambda_{H\alpha} = (656.24 \pm 0.06)\text{ nm}$ ，不确定度为 $0.06\text{ nm}$ ，说明波长真值一般在 $656.18\text{--}656.30\text{ nm}$ 之间，量值 $656.24$ 的误差一般在一 $0.06$ 到 $0.06$ 之间。将文献中的高准确度测得值 $656.2816$ 作约定真值<sup>[4]</sup>，实验值 $656.24$ 的测量误差为 $-0.04\text{ nm}$ 。

不确定度表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度。不确定度反映了可能存在的误差分布范围，即随机误差分量和未定系差分量的联合分布范围。

用扩展不确定度 $U$ 表示时， $U$ 为误差分布基本宽度之半。误差一般在 $\pm U$ 之间，在 $\pm U$ 外的置信概率通常不大于 $5\%$ 。

不确定度体系吸收、借鉴了现代误差理论的研究和实践成果。近似地说，不确定度大致对应于一定置信概率的误差限的绝对值。不确定度总是不为零的正值，而误差可能为正，可能为负，也可能十分接近于零<sup>[1,15]</sup>。单位与修约间隔确定的检定报告中，具体的检定值的误差可出现零，例如 $0.5$ 级 $50\text{ mA}$ 电表的检定证书中，某些整刻度的示值误差可写成 $0.00\text{ mA}$ 。不确定度总是可以具体评定的，而误差一般因真值未知而不能计算。

实验数据处理时，通常先作误差分析(现在也称为不确定度分量来源分析)，必要时谨慎地剔除统计离群值（也称高度异常值，俗称粗差），接着再修正已定误差，然后评定不确定度。

#### 3.2 不确定度的简化评定方法

依据国家计量技术规范和国内外一些标准、规范的精神，教学中采用比较简化的、比较适用于一般测量的不确定度评定方法，要点如下。

结果表示采用扩展不确定度 $U$ 。扩展不确定 $U$ 用于测量结果的报告，也称报告不确定度。 $Y = y \pm U$ 表示被测量量值位于区间 $y \pm U$ 内的置信概率约等于或大于 $0.95$ 。扩展不确定度常简称不确定度。

扩展不确定度分为A、B两类分量。扩展不确定度从评定方法上分为两类：A类分量 $U_A$ ，是(重复测量时)用统计学方法计算的分量；B类分量 $U_{jB}$ ， $j = 1, 2, \dots, L$ ，是用其它方法(非统计方法)评定的分量，两类分量用方和根法合成

$$U = \sqrt{U_A^2 + \sum_j U_{jB}^2} \quad (7)$$

A类分量 $U_A$ 的计算。重复测量次数为 $n$ 时， $U_A$ 由实验标准偏差 $s$ 乘以因子 $(t_{0.95, v}/\sqrt{n})$ 来求得

$$U_A = (t_{0.95,\nu}/\sqrt{n})s \quad (8)$$

式中 $\nu = n - 1$ , 称为自由度。自由度的定义为: 重复测量(或组合测量)时计算实验标准偏差所用的独立残差个数<sup>[5]</sup>。 $n$ 个值 $y_i$ 取平均时, 残差 $v_i = y_i - \bar{y}_i$ 中有 $n - 1$ 个独立, 自由度为 $\nu = n - 1$ 。

自由度为 $\nu$ 、置信概率为 $p = 1 - \alpha$ 的双侧区间对应的 $t$ 值 $t_{p,\nu}$ 由EXCEL函数给出,  $t_{p,\nu} = \text{tinv}(\alpha, \nu)$ 。

**B类分量的近似评定与 $U$ 的计算。**教学实验中直接测量量的B类分量通常只考虑一项 $U_B$ , 它的大小有时由实验室近似给出。在许多直接测量中,  $U_B$ 近似地取计量器具的误差限值 $\Delta_{INS}$ 。

**单次测量 $U$ 进一步简化取 $\Delta_{INS}$ 。**如因 $s$ 显著小于 $\Delta_{INS}/2$ , 或因评定出的 $U_A$ 对最后结果的不确定度影响甚小, 或因条件受限而只测了一次, 可更为简单地取

$$U = \Delta_{INS} \quad (9)$$

多数一般测量从效率考虑是单次测量, 不评定A类不确定度。

### 3.3 计算举例

[例]用1级螺旋测微计测某钢丝直径 $d$ (为求截面积), 9次测得值 $y_i$ 分别为0.294, 0.300, 0.303, 0.295, 0.298, 0.293, 0.292, 0.300, 0.305, 单位为mm。测量前螺旋测微计零点读数值(即已定系差)为-0.003mm。1级螺旋测微计的示值误差限  $\Delta_{INS}=0.004\text{mm}$ 。

先用(2)式求平均值,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 0.2978\text{mm}$

用(6)式对已定系差进行修正,  $y = \bar{y} - (-0.003) = 0.3008\text{mm}$

用贝塞耳法的(3)式, 求出标准偏差 $s = 0.00458\text{mm}$

用(8)式求 $U_A$ ,  $U_A = (t_{0.95,\nu}/\sqrt{n})s = 0.769 \times 0.00458 = 0.0035\text{mm}$

用(7)式合成 $U$ , 因为 $U_B = 0.004\text{mm}$ , 可得 $U = \sqrt{0.0035^2 + 0.004^2} = 0.0053\text{mm}$  (或 $U = 0.005\text{mm}$ )  
直径的测量结果最后表示成 $d = 0.301 \pm 0.005\text{mm}$ 。

### 3.4 相对扩展不确定度

为更直观地定量表征测量结果的准确度, 常用相对扩展不确定度 $U_r$ 的概念, 它是扩展不确定度 $U$ 与量值 $y$ 之比,  $U_r = U/y$ 。不确定度 $U$ 与相对不确定度 $U_r$ 只取1至2位有效位数。

## 4. 方和根合成时标准差或不确定度的微小分量判据

实验中误差或不确定度与量值相比一般是小量, 通常没有必要作两位有效数字以上的表示或估计。独立被测量的不确定度只写1~2位有效位数。标准差合成、作不确定度分量的方和根合成时, 如某一分量小于最大分量(或合成结果)的1/5到1/6, 就可将这一分量看作是可忽略的微小分量。现在计算机已普及, 对纯数学运算过程的附加误差分量临界比要从严, 如修约过程可取1/10, 仅有两个分量方和根合成时, 如较小分量等于较大分量的1/5, 忽略较小分量后引起的相对偏差为 $\frac{1}{\sqrt{1^2+\beta^2}} - 1 \approx -\frac{1}{2\beta^2} = -\frac{1}{2 \times 5^2} = -2\%$ 。

这一判据曾被叫做“微小误差准则”<sup>[3]103-104</sup>, 方和根合成法是该判据的基础。误差分析、不确定度评定或实验设计中, 通常将大于最大分量一半的分量称为主要分量。可用该判据来抓住主要矛盾、简化计算过程。不确定度评定时, 要做到对主要分量既不遗漏、又基本不重复计算。对介于主要分量与可忽略分量间的次要分量, 也要尽量不遗漏、不重复。对微小分量, 或主、次要分量中的微小组份, 常常会有遗漏或重复计算, 但这基本不会影响修约后结果的不确定度。

## 5. 间接测量结果的不确定度合成

间接测量法(indirect method of measurement), 是指通过测量与被测量有函数关系的其它量才能得到被测量值的方法。如通过测导线电阻、长度和截面积算出电阻率的过程是间接测量。

设被测量 $Y$ 可写成直接测量量 $X_k$ 的函数,  $Y = f(X_k)$ 。首先写出误差 $dY$ 的全微分表达式, 即误差传递的

代数和式:

$$dY = \sum_k \frac{\partial f(X_k)}{\partial X_k} dX_k \quad (10)$$

式中偏导数  $c_k = \partial f(X_k)/\partial X_k$  叫灵敏系数(sensitivity coefficients), 表示  $X_k$  的误差或不确定度对结果误差或不确定度的影响系数。

进而可得不确定度传递的近似公式

$$U = \sqrt{\sum_k \left( \frac{\partial f(X_k)}{\partial X_k} U_{X_k} \right)^2} \quad (11)$$

$X_k$  的误差互不相关时, (11) 式的随机变量总体不确定度合成是严密的。

## 6. 直线拟合方法

当已知两个物理量  $X$  和  $Y$  成较严格的直线关系  $Y = b_0 + b_1 X$  时, 常常先测量  $n$  组值  $(x_i, y_i)$ , 再用作图或最小二乘法等方法求出直线斜率、截距的最佳估值  $b_1$ 、 $b_0$  以及与实验目的有关的其它参量。这一求解过程称为直线回归(regression), 也称拟合。由于误差普遍存在, 需在合理的范围内测量  $n$  组散布开的数据, 然后再直线拟合。

作图法直线拟合的过程简明直观, 多种软件具有自动作图的功能。将软件给出的图或曲线用于实验报告中时, 要注意标注清楚图中的一些要素: 图名, 坐标轴的量值名称、符号、单位, 坐标分度值, 实验点, 拟合线(不要求通过所有点)等。

选择误差限相对较小或可忽略的量作自变量  $x_i$ , 另一作因变量  $y_i$ 。

### 6.1 截距为零直线的最小二乘法拟合

最小二乘法拟合原则上要求因变量  $y_i$  的误差互不相关且分布特征大致相同, 即等精(密)度。实践中这些要求常被放宽。当各  $y_i$  的重复性标准差较小且各不同、但未定系差限值相近时, 就可用最小二乘法。

对仪表、传感器检定时回归直线常常必须过坐标原点, 截距应为零, 方程为  $Y = bX$ 。由最小二乘法使残差平方和  $RSS = \sum(y_i - bx_i)^2 = \min$ , 即  $\frac{dRSS}{db} = 2 \sum x_i(y_i - bx_i) = 0$ , 可得

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (12)$$

因变量标准差  $s_y$  的导出类似于 (3) 式贝塞耳法公式。由  $db = \frac{\sum x_i dy_i}{\sum x_i^2}$  进一步可求出  $s_b$ :

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - bx_i)^2}{n-1}}, \quad s_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}, \quad v = n-1 \quad (13)$$

### 6.2 截距不为零的一般直线的最小二乘法拟合

一般直线  $Y = b_0 + b_1 X$ , 使  $y_i$  的残差平方和  $RSS = \sum(y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2$  最小, 相近于各测量点到回归直线距离平方和最小。从  $\frac{\partial RSS}{\partial b_0} = 0$  和  $\frac{\partial RSS}{\partial b_1} = 0$  易导出斜率和截距的表达式 [3]292-298

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \quad (14)$$

因变量标准差

$$s_y = \sqrt{\frac{RSS}{v}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2}{n-2}}, \quad v = n-2 \quad (15)$$

斜率、截距的标准差  $s_{b1}$ 、 $s_{b0}$  分别为

$$s_{b1} = \frac{s_y}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}, \quad s_{b0} = s_y \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{n}} \quad (16)$$

(12)-(16)式的计算不难实现, EXCEL有现成函数。

斜率、截距等参量z的A类扩展不确定度为:

$$U_{ZA} = t_v s_z \neq \frac{t_v}{\sqrt{n}} s_z \quad (17)$$

### 6.3 计算举例

[例]伏安法测线性电阻时, 电流表外接, 表量程为 30mA, 准确度为 1.5 级。忽略数字电压表的大于  $10M\Omega$  的内阻影响, 电压测量值的误差影响也可忽略。求电阻值及其 A 类不确定度。

表 1 伏安法测线性电阻的实验数据

序号	$V_i$ (V)	$I_i$ (mA)
0	0.00	0.0
1	6.00	12.4
2	7.00	14.0
3	8.00	16.2
4	9.00	18.1
5	10.00	19.6
6	11.00	21.7
7	12.00	24.4
8	13.00	25.8
9	14.00	28.2
10	15.00	29.7

对表 1 所示数据, 因电压值误差限小, 取  $V_i$  为自变量, 求电阻  $R_x$  的直线方程为  $I_i = bV_i = R_x^{-1}V_i$  对原点以外的 10 组数据用截距为零直线的最小二乘法拟合得  $b = R_x^{-1} = 1.9984$ ,  $s_b = 0.0086$ ,  $v = 10 - 1 = 9$ ,  $s_b/b = 0.43\%$ 。 $R_x = 1/b = 0.5004k\Omega$ 。A 类不确定度为  $U_A = t_{v=9}s_{Rx} = 0.0054k\Omega$ 。所得结果  $R_x \pm U_A = 0.500 \pm 0.005k\Omega$ 。

总之, 直线拟合时, 首先要确定合理的直线方程模型, 如判断截距是否为零; 接着要合理选择自变量; 然后再拟合, 一般用最小二乘法, 求出所关注物理量的量值及其标准偏差。

## 7 有效数字的修约方法简介

### 7.1 有效数字的定义

国家标准中有效位数的定义为: 对没有小数位且以若干个零结尾的数值, 从非零数字最左一位向右数, 所得位数减去无效零(即仅为定位用的零)的个数, 就是有效位数; 对其它十进位数, 从非零数字最左一位向右数, 所得位数就是有效位数。

实验中记录测得值、表示结果值和不确定度, 都只取有限的位数。例如单摆实验, 某地重力加速度测得值是  $9.82 \pm 0.08 m/s^2$ , 单位变换后量值可写成  $9.82 \times 10^3 mm/s^2$ , 但不能写成  $9820 mm/s^2$ , 十进制单位变换后有效位数不变。

### 7.2 修约间隔和修约规则<sup>[6]</sup>

数值修约 (rounding off 或 roundoff) 就是去掉数据中多余的位, 也被叫作化整。修约间隔就是修约后所保留的有效数字末位的最小间隔。预先选定修约间隔, 从它的完整的整数倍数列中, 挑选出一个数, 来代替原来的数值, 这个过程就叫做修约。修约间隔确定后, 数据的有效位数也就确定了。

---

修约规则与修约间隔有关。教学实验测量次数一般较少，数据分散性常不太大。我们简化地约定：一般只用四舍五入规则。修约过程应该一次完成，不能多次连续修约。例如要使0.546保留到一位有效位数，不能先修约成0.55，接着再修约成0.6，而应当一次修约成0.5。

### 7.3 实验数据的有效位数确定<sup>[7]</sup>

**原始数据有效位数的确定。**通过仪表、量具等读取原始数据时，一般要充分反映计量器具的准确度，通常要把计量器具所能读出或估出的位数全读出来。(1)游标类量具，如游标卡尺、分光计方位角的游标、水银气压计的游标尺等，一般应读到游标分度值的整数倍。(2)对数显仪表及有十进步进式标度盘的仪表，如数字电表、电阻箱、电桥等，一般应直接读取仪表的示值。(3)对指针式仪表，一般需要估读到最小分度值的 $1/4 \sim 1/10$ ，或使估读间隔不大于基本误差限的 $1/5 \sim 1/3$ ，同时要符合修约间隔的规定。由于人眼分辨能力的限制，一般不可能估读到最小分度的 $1/10$ 以下。(4)对于可估读到最小分度值以下的计量器具，当最小分度不小于 $1\text{ mm}$ 时，通常需要估读到 $0.1$ 分度，如螺旋测微计和测量显微镜鼓轮的读数，都要估计到 $1/10$ 分度。少数情况下也可以只估读到 $0.2$ 或 $0.5$ 分度，例如光具座上的标尺的坐标读数可以只估计到 $\text{mm}$ 分度的 $1/2$ 或 $1/5$ 。对于教学中的原始数据，少数情况下读数的间隔要用到 $0.2 \times 10^N$ 或 $0.5 \times 10^N$ 。

**运算过程中的数和中间结果的有效位数。**对参与运算的数和中间运算结果都不修约，只在算出不确定度后、最后结果表示前再修约，这样做既是需要，也更有利于实验效率的提高。由不确定度决定有效位数是根本的方法，是大学基础物理实验课程的教学要点之一。

**测量结果最终表达式中的有效位数。**独立被测量的不确定度 $U$ 一般只取一至两位有效位数，量值 $y$ 与不确定度 $U$ 的末位数字一般要对齐。

**直线拟合结果的有效位数的初步确定。**直线拟合时计算器或程序能同时给出截距、斜率的值，可简化地使截距的末位与 $y_i$ 有效位数末位对齐。使斜率的有效位数和最大间隔( $y_{max} - y_{min}$ )位数大致相同。

**数值修约要抓两头。**有效位数的确定，既要较充分反映测量或数学方法的精密度，又要避免位数过多而做无用功或造成误解。基本要求是抓两头，放中间。抓两头，就是抓好原始实验数据读取和最后结果表示两个环节；放中间，就是中间运算放手多取几位，不要无端地减少位数。

## 8. 结束语

虽然原则上所有测量都能评定不确定度，但是考虑到物理实验课程的基础性，只在部分实验中安排评定某一类不确定度，只在少数实验中要求作完整的不确定度评定练习。只要求了解主要概念和大致思路，能按照教学资料或参考软件来套用公式或程序就可以了。同学们在今后的具体实验中可多次学习、运用上述基础知识，逐步做到能：**掌握重点概念方法，明确实验测量对象，分析主要误差因素，尽量修正已定系差，正确评定不确定度，给出完整测量结果。**

## 参考文献

- [1] BIPM. A concise summary of the International System of Units (8<sup>th</sup> ed., 2006).
- [2] ISO/IEC GUIDE 99:2007(E/F). International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM), 3<sup>rd</sup> ed.
- [3] 肖明耀. 误差理论与应用[M]. 北京:计量出版社, 1985.
- [4] Sansonettia J.E & Martin W.C., Handbook of Basic Atomic Spectroscopic Data. J. Phys. Chem. Ref. Data., Vol.34, No.4, 2005.
- [5] 李慎安等. 测量不确定度与检验辞典[M]. 北京: 中国计量出版社, 1996: 212.
- [6] 国家标准. GB 8170-87 数值修约规则.
- [7] 朱鹤年. 基础物理实验教程—物理测量的数据处理与实验设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

## II-1 摩擦系数

(2012 年第 13 届亚洲物理奥林匹克竞赛实验试题)

### 1. 引言

由于摩擦力的作用，绕过一个圆柱的细绳的两端的力会不同，如图 1 所示。为悬住细绳一端悬挂的物体，在绕过梁的细绳的另一端施加的力可以比物体的重量小。随着细绳在圆柱上缠绕的圈数的增加，另一端所需施加的最小力会以令人吃惊的速度减小。正是基于此，水手通过将缆绳在码头上的驳桩上缠绕很多圈来固定住船只。

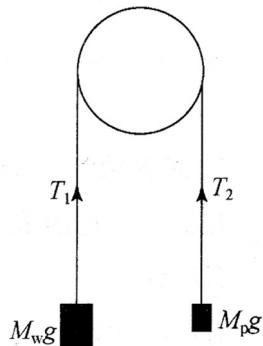


图 1 摩擦力示意图

### 2. 实验目的

探究负载  $W = M_w g$ 、最小平衡力  $P = M_p g$  以及缠绕角  $\theta$  (细绳与一个或多个圆柱接触部分对圆柱轴心所张角度之和) 三者之间的关系。

### 3. 实验仪器

- (1) 中间竖直放置着一根钢管、其四周水平放置着四根钢管的架子；
- (2) 装在盒内的砝码，包含：500 g, 200 g 两个，100 g, 50 g, 20 g 两个，10 g, 5 g；
- (3) 带挂钩的砝码组，每件砝码质量均为 100 g，砝码挂钩的质量也为 100 g；
- (4) 质量为  $M_u$  的砝码；
- (5) 塑料秤盘。其质量用电子天平称量；
- (6) 白色粗绳(忽略质量)；
- (7) 黑色细绳(忽略质量)；
- (8) 电子天平，量程为 600 g，分辨力为 0.01 g，由插线板上的 USB 插口供电。按右下角“开关”键开机，待自检结束、屏幕显示 0.00，左下角显示单位为 g 之后再使用。(本实验只有秤盘需要用它称量。)
- (9) 完整的实验装置。

注意：不要触摸细绳可能触及到的钢管的表面，因为油脂可能改变表面的摩擦系数。

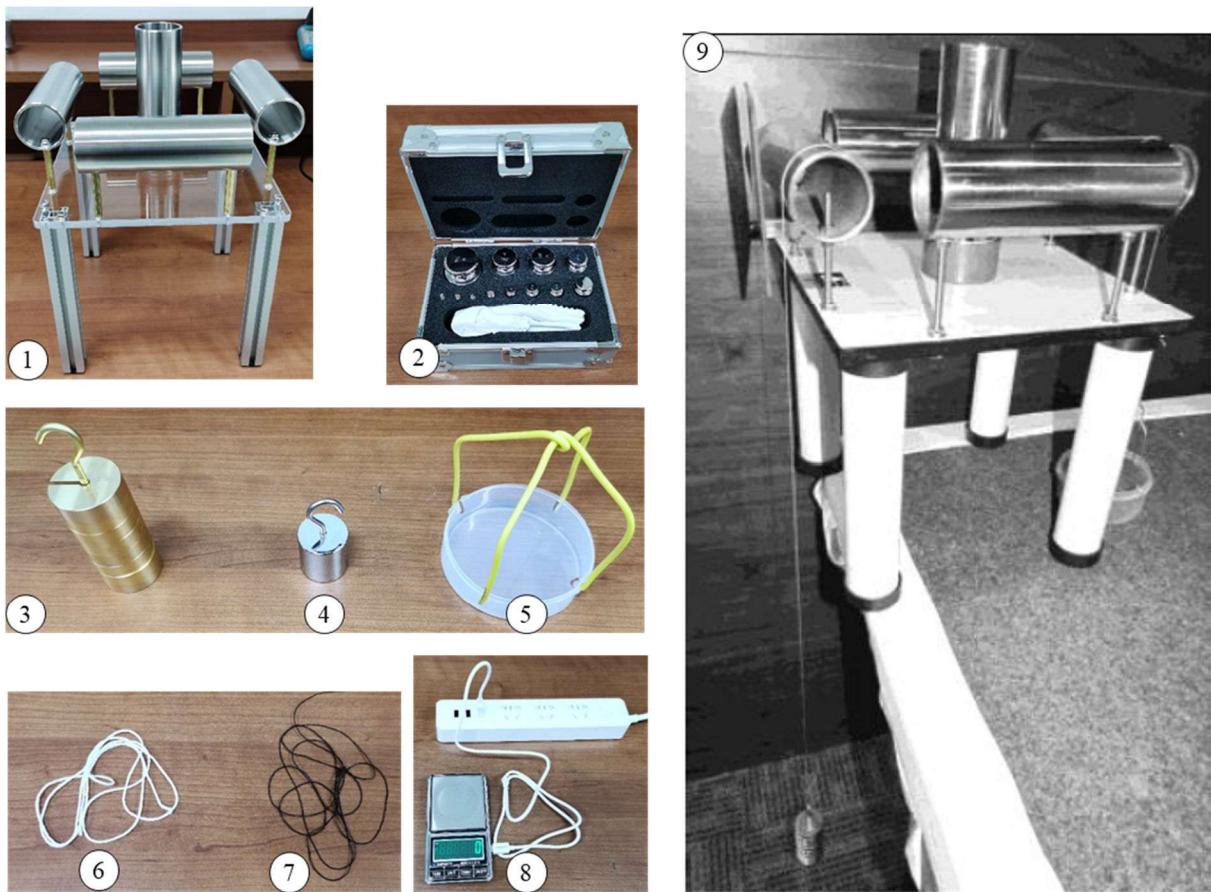


图 2 实验仪器

#### 4. 实验内容

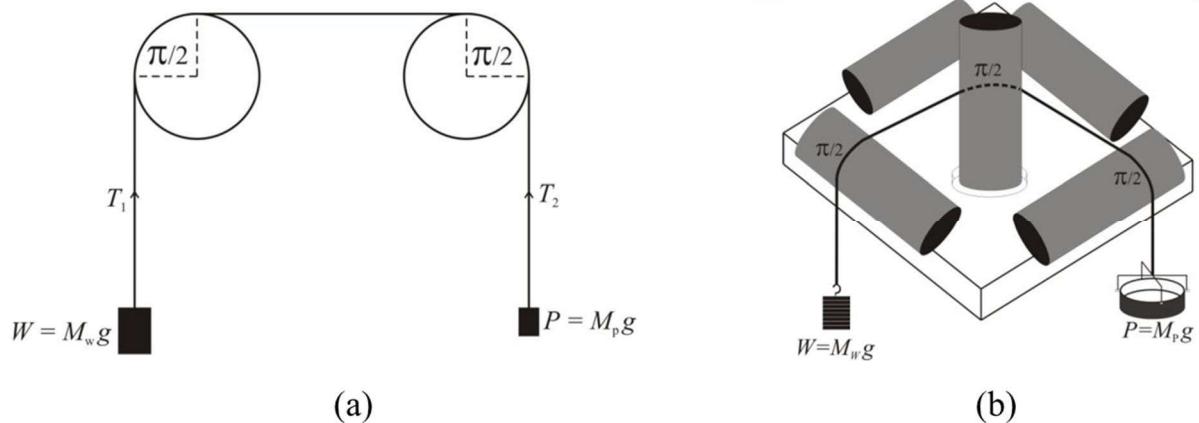


图 3 实验测试示意图

以带挂钩的砝码组作为负载 $M_W$ ，将其系在黑色细绳的一端，并在绳的另一端系上秤盘（质量通过电子天平测量），秤盘内放置若干另一套装在盒内的砝码。通过使细绳跨过两个或多个钢管可以改变缠绕角 $\theta$ ，如图 3 所示。

##### A) 固定缠绕角 $\theta$ 、探究最小平衡力 $P$ 与负载 $W$ 的关系

当细绳不接触竖直钢管、且横跨在两个水平钢管上时，得到的缠绕角 $\theta$ 最小，如图 3(a)所示。

A.1 用电子天平测量秤盘的质量。

A.2 固定缠绕角 $\theta = \pi$ , 测量不同负载 $W$ 下的最小平衡力 $P$ 。要利用所给砝码组使负载 $W$ 的变化范围尽可能大。

对于某一给定的负载 $W$ , 通过在秤盘内放置适当的装在盒内的砝码来测量最小平衡力 $P$ 。在理想情况下, 我们应该通过观察细绳移动的临界状态来确定最小平衡力 $P$  (克服静摩擦力)。但实验中很难正好使其处于临界状态。不过, 我们可以确定最小平衡力 $P$ 所处的范围 (或砝码 $M_P$ 的范围 $[M_{P-}, M_{P+}]$ )。该范围是 $M_P$ 的不确定度的度量, 故应使其尽可能窄。

A.3 画图表示最小平衡力 $P$ 随负载 $W$ 的变化曲线。

A.4 推测 $P$ 与负载 $W$ 的关系。做直线拟合验证该关系。

### B) 固定负载 $W$ 、探究最小平衡力 $P$ 与缠绕角 $\theta$ 的关系

B.1 固定负载所用砝码组的质量 $M_W = 800\text{ g}$ , 测量不同缠绕角 $\theta$ 下的最小平衡力 $P$ 。

B.2 画图表示最小平衡力 $P$ 随缠绕角 $\theta$ 的变化曲线。

B.3 推测 $P$ 与缠绕角 $\theta$ 的关系。做直线拟合验证该关系。

B.4 结合 A 部分和 B 部分的结果, 写出最小平衡力 $P$ 与负载 $W$ 和缠绕角 $\theta$ 的关系表达式。表达式中还会含有与钢管和细绳之间的摩擦有关的项, 找出此项, 令其等于系统的摩擦系数 $\mu$ 。

### C) 测试白色粗绳的摩擦系数 $\mu_u$ 和未知砝码的质量 $M_u$

将质量为 $M_u$ 的砝码 (实验仪器部分的④, 砝码上标有质量, 但这里假设其质量未知) 和秤盘分别悬挂在白色粗绳的两端。固定缠绕角 $\theta = \pi$ 。

C.1 写出用以求白色粗绳的摩擦系数 $\mu_u$ 和未知砝码质量 $M_u$ 的方程。

C.2 做必要的测量, 确定白色粗绳的摩擦系数 $\mu_u$ 和砝码质量 $M_u$ , 并分别评估它们的不确定度。本部分约定: 1) (砝码+秤盘) $M_P$ 的范围 $[M_{P-}, M_{P+}]$ , 其不确定度 $U_{M_P} = (M_{P+} - M_{P-})/2$ 。  
2)  $\theta = \pi$ 的不确定度 $U_\theta = 0$ 。

**重要提示:** 带上电脑, 本实验可以随堂完成 (教师随堂检查测量数据、数据处理和结果, 合格后, 本实验即合格)。

### 参考文献

[1] 全国中学生物理竞赛专辑, 2013.

## II-2 粘弹性

(根据 2018 年第 49 届国际物理奥林匹克竞赛实验试题改编)

### 1. 引言

#### (1) 弹性材料

当固体材料受到外力时会发生形变。对于小的外力  $F$ , 形变与外力成正比 (胡克定律) 并且是可逆的, 外力被移除后材料恢复到初始形状。

使用应力和应变的概念可方便地描述这一性质。应力  $\sigma$  定义为单位面积  $S$  受到的外力  $F$ , 应变  $\epsilon$  定义为长度的相对变化量, 即:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2)$$

其中  $l_0$  和  $l$  分别是材料的原始长度和最终长度。形变很小的材料的弹性行为符合胡克定律, 应力  $\sigma$  与应变  $\epsilon$  成正比, 即:

$$\sigma = E\epsilon \quad (3)$$

比例系数  $E$  称为杨氏模量。

#### (2) 粘弹性材料

胡克定律所描述的弹性行为是一种近似, 仅对足够小的形变有效。对于更大的形变, 材料会达到塑性状态, 并逐渐变得不可逆。这种情况下, 材料内部的分子运动开始不受约束, 其行为类似于粘性流体。也就是说, 如果拉伸或者压缩超过了弹性极限, 材料会逐渐地变得像流体。这种既有弹性性质也有粘性流体的特征称为粘弹性。

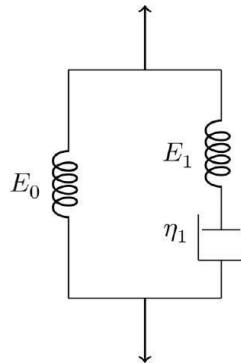


图 1 描述线性粘弹性的标准线性固体模型[1]

描述线性粘弹性的唯象模型称为**标准线性固体模型**, 如图 1 所示, 其中弹簧代表纯弹性部分, 罐子代表纯粘性部分。

用该模型描述粘弹性材料时, 需分开考虑弹性行为和粘性行为。产生应变  $\epsilon$  的总应力  $\sigma$  是纯弹性应力  $\sigma_0$  和粘弹性应力  $\sigma_1$  之和, 而这两项应力对应着相同的应变, 即:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (4)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1 \quad (5)$$

其中纯弹性应力项  $\sigma_0$  和应变  $\epsilon_1 (= \epsilon)$  满足胡克定律:

$$\sigma_0 = E_0 \epsilon_1 = E_0 \epsilon \quad (6)$$

此外, 粘弹性应变  $\epsilon_1$  通常建模为纯弹性应变  $\epsilon_1^e$  和纯粘性应变  $\epsilon_1^v$  之和, 而二者受到的应力相同  $\sigma_1 = \sigma_1^e = \sigma_1^v$ :

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^v \quad (7)$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^e = \sigma_1^v \quad (8)$$

其中，对于纯弹性过程，由胡克定律可得  $\sigma_1^e (= \sigma_1) = E_1 \epsilon_1^e$ 。而对于纯粘性过程，应力  $\sigma_1^v$  与应变  $\epsilon_1^v$  的时间导数成正比，与粘性流体相似，即：

$$\sigma_1^e (= \sigma_1) = E_1 \epsilon_1^e \quad (9)$$

$$\sigma_1^v (= \sigma_1) = \eta_1 \frac{d\epsilon_1^v}{dt} \quad (10)$$

其中  $E_1$  是杨氏模量， $\eta_1$  是粘度系数。

以下将总应力  $\sigma$  与总应变  $\epsilon$  的关系用图 1 中的粘弹性参数（杨氏模量和粘度系数）来表示。首先将 (7) 式两边对时间求导，得到：

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{d\epsilon_1^e}{dt} + \frac{d\epsilon_1^v}{dt}$$

由 (5) 式  $\epsilon = \epsilon_1$ ，可将上式等号左侧的  $\epsilon_1$  替换为  $\epsilon$ ，再用 (9)、(10) 式替换等式右侧的两项，得到：

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (11)$$

由 (4) 式和 (6) 式可得  $\sigma_1 = \sigma - \sigma_0 = \sigma - E_0 \epsilon$ ，带入上式可得：

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d(\sigma - E_0 \epsilon)}{dt} + \frac{(\sigma - E_0 \epsilon)}{\eta_1}$$

整理可得：

$$\sigma = E_0 \epsilon + \frac{\eta_1}{E_1} (E_0 + E_1) \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{\eta_1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt}$$

记  $\eta_1/E_1 = \tau_1$ ，则有：

$$\sigma = E_0 \epsilon + \tau_1 (E_0 + E_1) \frac{d\epsilon}{dt} - \tau_1 \frac{d\sigma}{dt} \quad (12)$$

该微分方程表明，应力  $\sigma$  和应变  $\epsilon$  之间的关系不再是线性的（即不满足胡克定律），应力  $\sigma$  和应变  $\epsilon$  都是时间的函数。要知道  $\epsilon(t)$ ，必须给定  $\sigma(t)$ ，反之亦然。

有两个特殊情况，就是  $d\epsilon/dt = 0$  和  $d\sigma/dt = 0$ ，分别称为应力弛豫条件和蠕变条件。在应力弛豫条件下，对材料突然施加不随时间变化的应变  $\epsilon$ ，即  $d\epsilon/dt = 0$ 。此时应力  $\sigma(t)$  仅取决于材料的粘弹性参数（杨氏模量和粘度系数），且 (12) 式的解为：

$$\sigma(t) = \epsilon (E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}) \quad (13)$$

该式表明，在  $t = 0$  时，只有弹性部分会对应力产生影响， $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$ 。随后  $\sigma(t)$  随时间呈指数衰减，衰减时间常数为  $\tau_1$ 。

### (3) 多重粘弹性过程

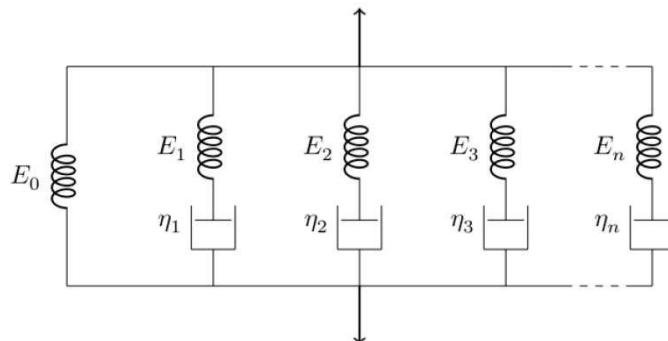


图 2 多重粘弹性过程模型[1]

如图 2 所示，标准线性模型可扩展到包括多重粘弹性过程，包含  $n$  种不同的粘弹性成分。

在应力弛豫条件( $d\epsilon/dt = 0$ )下，各项粘弹性应力仍应随时间呈指数衰减，因而(13)式所示的解可扩展为：

$$\sigma(t) = \epsilon \left( E_0 + \sum_k E_k e^{-t/\tau_k} \right), k = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

其中  $E_k$  为第  $k$  个粘弹性项的杨氏模量、 $\eta_k$  为粘度系数， $\tau_k = \eta_k/E_k$  为衰减时间常数。该式表明，在  $t = 0$  时，仍然只有弹性部分会对应力产生影响， $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$ 。随后各项  $E_k e^{-t/\tau_k}$  随时间呈指数衰减，衰减时间常数为  $\tau_k$ 。

## 2. 实验目的

探究细线在应力弛豫条件( $d\epsilon/dt = 0$ )下的粘弹性行为。

## 3. 实验仪器

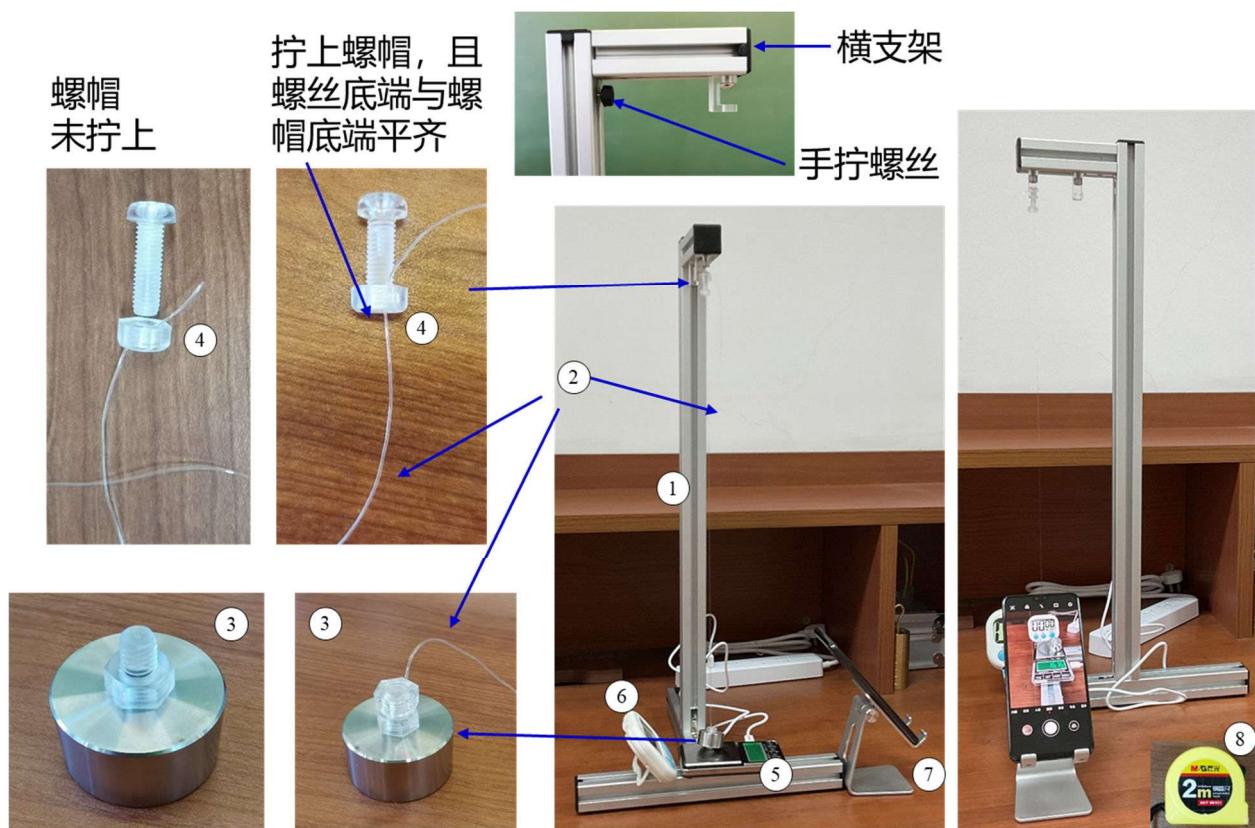


图 3 实验仪器

- ①架子，可使所测细线被垂直拉伸并保持恒定的应变；
- ②待测细线；
- ③中心带孔的不锈钢圆柱，一个塑料螺丝已从不锈钢圆柱的孔中穿过并拧有塑料螺帽。再取一个塑料螺帽，将细线穿过螺帽，然后将螺帽拧在螺丝上，从而将细线固定；
- ④塑料螺丝和塑料螺帽。将细线的另一端穿过塑料螺帽，然后将螺帽拧在螺丝上，使螺丝的底端和螺帽的底端平齐（螺丝刚好没有凸出来），从而将细线固定；
- ⑤电子天平，量程为 600 g，分辨力为 0.01 g。按“ON/OFF 开关”键开机，待自检结束后屏幕显示“0.00”，单位为“g”后再开始使用；

- ⑥计时器。开关在侧面；
- ⑦手机支架和（自带）手机；
- ⑧卷尺。

#### 4. 实验内容

##### A) 测试应力弛豫条件( $d\epsilon/dt = 0$ )下细线的应力——时间关系

A.1 取一个塑料螺帽，将细线穿过螺帽，然后将螺帽拧在不锈钢圆柱上的塑料螺丝上，从而将细线的一端固定。

将细线的另一端用另一组塑料螺丝和塑料螺帽固定。将细线的另一端穿过塑料螺帽，然后将螺帽拧在螺丝上，使螺丝的底端和螺帽的底端平齐（螺丝刚好没有凸出来），从而将细线的另一端固定。

用卷尺测量细线没有被拉长的情况下、在两个螺帽之间可自由拉伸的长度，作为其初始长度 $l_0$ 。**使细线的初始长度约为 40~42 cm。记录该长度。**

A.2 用电子天平测量中心带孔的不锈钢圆柱和一个塑料螺钉、2个塑料螺帽的总质量 $M_0$ ，记录该质量。

A.3 为了获得细线的应力随时间的变化关系，需对其进行长时间的测量。

松开图3中横支架下方的黑色塑料手拧螺丝，将横支架下移约15 cm，拧上手拧螺丝。

把连接了细线的不锈钢圆柱放在电子天平上，把细线另一端的螺丝头放置在铝型材架子上端的小塑料支架上。细线此时未被拉伸，处于松弛状态。

放置好手机支架、手机和计时器（计时器的开关在侧面），打开手机录像功能，调整好手机位置和角度，记录计时器和电子天平的示数。使计时器开始计时。

松开手拧螺丝，缓慢上移横支架，细线逐渐被拉伸且电子天平的示数开始减小。当电子天平的示数约为 $(10 \pm 3)$  g时，拧上手拧螺丝。

测量约35分钟。

A.4 测量悬挂在架子上、被拉长的细线的长度，作为其最终长度 $l$ 。

由最终长度 $l$ 和初始长度 $l_0$ ，用(2)式计算细线的应变 $\epsilon$ 。

##### B) 数据分析

B.0 在进行B部分的数据分析之前，换一根较短的细线进行测试。取一根较短的细线，换下A部分中的细线。**使细线的初始长度约为 30~32 cm。记录这根较短的细线的初始长度。**将细线悬挂在架子上，不锈钢圆柱应该够不到电子天平。这样在不锈钢圆柱的作用下，就会对细线产生恒定的应力。在悬挂足够长的时间以后（30分钟以上），细线最终到一个静止的应变。

B.1 对于A.3部分测试的各组数据，计算细线下端受到的拉力 $F$ 。重力加速度取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。画图表示拉力 $F$ 随时间的变化关系。

B.2 对于B.1题计算的拉力 $F$ 数据：它不能用纯弹性过程来解释。请说明**如果**细线是纯弹性的，拉力 $F$ 随时间如何变化。

由于电子天平不动，细线的应变 $\epsilon$ 是固定的，符合应力弛豫条件 $d\epsilon/dt = 0$ ，因而可用(14)式分析数据。将(14)式改写为：

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/S}{\epsilon} = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (15)$$

为了方便数据处理，上式中的指数衰减项是按照衰减时间常数 $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$ 排序的。以下求细线的各项参数，即（15）式中的各个杨氏模量 $E_k$ 和衰减时间常数 $\tau_k$ 。

对于（15）式，如果考虑 $d(\frac{\sigma}{\epsilon})/dt$ ，而不是 $\frac{\sigma}{\epsilon}$ ，数据更容易被分析，因为这样可以逐项处理（15）式中的各指数衰减项。

$d(\frac{\sigma}{\epsilon})/dt$ 由相邻两个数据点通过 $\Delta(\frac{\sigma}{\epsilon})/\Delta t$ 计算。

B.3 计算所测各组数据的 $\sigma/\epsilon$ ，计算时设细线的直径为 0.5 mm。再计算 $d(\frac{\sigma}{\epsilon})/dt$ 的值。

B.4 由（15）式写出 $d(\frac{\sigma}{\epsilon})/dt$ 的表达式，记为（16）式。

由（16）式可知，对于各指数衰减项，由于 $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$ ，当时间 $t$ 足够大时，仅需考虑（16）式中包含 $\tau_1$ 的项，而其他项可忽略不计。

B.5 如何判断时间超过多少时为足够大、可忽略除 $\tau_1$ 以外的其他项？方法为计算 $\ln(-d(\frac{\sigma}{\epsilon})/dt)$ 并画出其随时间变化的关系图。当超过某个时间 $t_1$ ， $\ln(-d(\frac{\sigma}{\epsilon})/dt)$ 与时间呈线性关系时，该时间 $t_1$ 即为足够大。

从图中判断时间 $t_1$ 。对于时间大于 $t_1$ 的数据，通过直线拟合确定参数 $E_1$ 和 $\tau_1$ 。

B.6 对于时间大于 $t_1$ 的数据，（15）式中也仅需考虑 $E_0$ 项和包含 $\tau_1$ 的项，即 $\frac{\sigma}{\epsilon} = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}$ ，其他项可忽略。由已确定的参数 $E_1$ 和 $\tau_1$ ，利用时间大于 $t_1$ 的数据，确定参数 $E_0$ 。

B.7 从 B.3 题计算的各组 $\sigma/\epsilon$ 数据中减去弹性项和包含 $\tau_1$ 的项，即减去 $E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}$ ，计算对应的数值。

B.8 由 B.7 题得到的数据，确定（15）式的第二粘弹性项的参数 $E_2$ 和 $\tau_2$ （注意：这里不能使用时间大于 $t_1$ 的数据）。

B.9 按照 B.7 和 B.8 的方法，确定第三粘弹性项的参数 $E_3$ 和 $\tau_3$ ，……

B.10 由 B 部分确定的各项杨氏模量 $E_k$ 和衰减时间常数 $\tau_k$ ，由（15）式计算拉力 $F$ 的理论值。将理论值随时间的变化关系画在 B.1 题的图中，与实验数据相比较。

B.11 回到 B.0 部分中的较短的细线。确保细线被悬挂了 30 分钟以上，这样就可以认为这根线的应变达到了稳定值 $\epsilon = \sigma/E$ 。测量悬挂在架子上、被拉长的细线的长度，作为其最终长度。直接计算这根短线的 $E$ 。并计算其与 B.6 部分计算的 $E_0$ 的相对变化量。

## 参考文献

1. 2018 年第 49 届国际物理奥林匹克竞赛实验试题 2。

## II-3 阻尼振动和受迫振动

### 1. 实验目的

振动是自然界的普遍运动形式。机械简谐振动——物体（质点）在平衡位置附近做往复的运动，其位移按余（正）弦规律随时间变化，是最简单、最基本的振动。相应地，电流、电压、电场强度和磁场强度围绕某一平衡值做周期性变化，称为电磁振动或电磁振荡。

各种振动的物理机制可能不同，但它们具有共同的特征。本实验借助波耳共振仪探究阻尼振动、受迫振动以及共振的基本规律。实验的主要目的为：

1. 观测不同阻尼对简谐振动的影响，了解阻尼振动。
2. 分析受迫振动的基本规律，测试幅度—频率特性和相位—频率特性。
3. 探究受迫振动的瞬态过程：振动系统在共振频率信号激励下从静止到稳态的过程。

### 2. 实验仪器

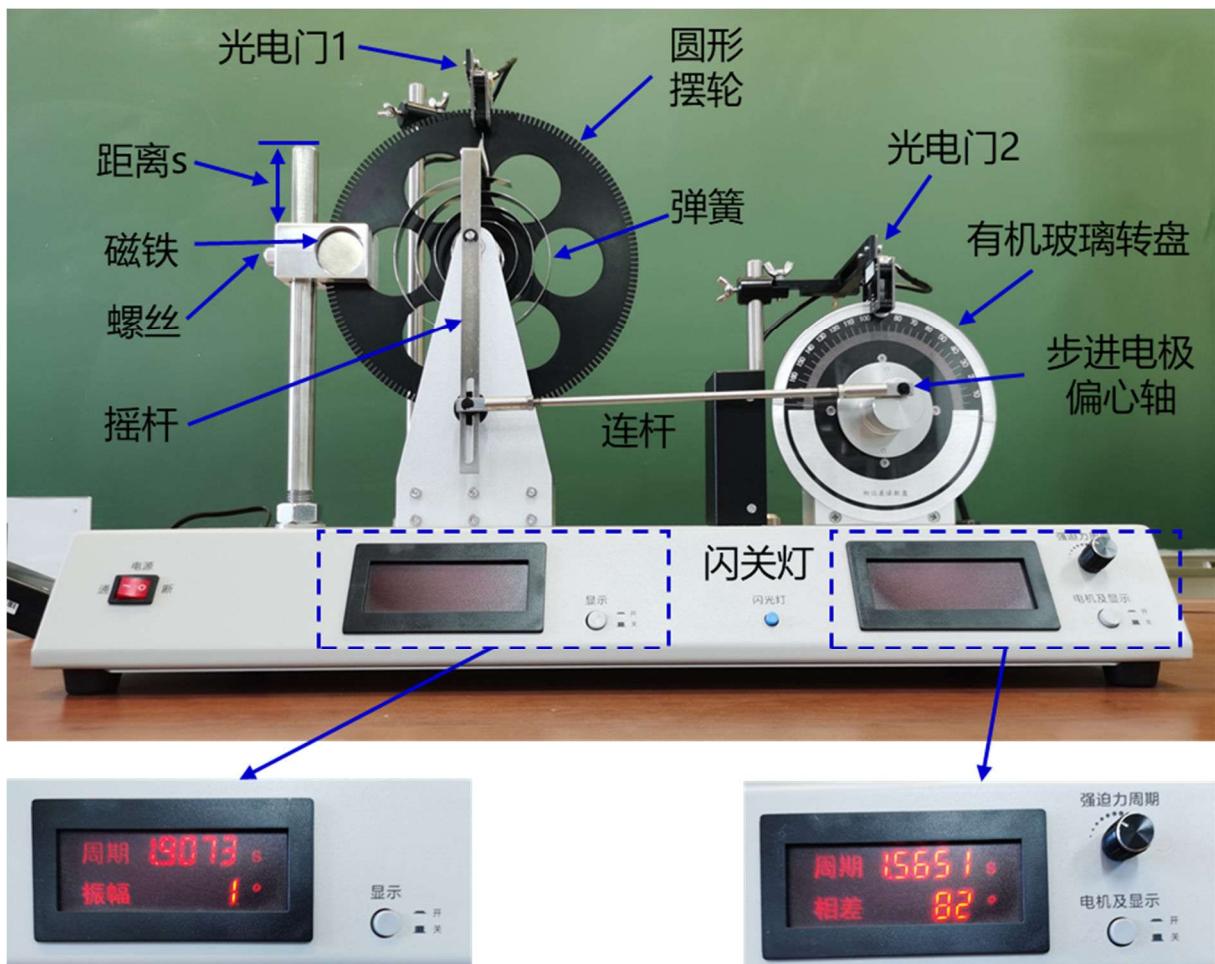


图 1 波耳共振仪

本实验所用仪器是专门研究振动的波耳共振仪，仪器结构如图 1 所示。

圆形摆轮与弹簧连接，构成待测振动系统。弹簧的另一端固定在摇杆上方。

摆轮边沿有一圈周期为  $2^\circ$  的槽形缺口，光电门 1 通过测定缺口移动的个数来测量振动的幅度。摆轮有一长缺口，在摆轮完全不受外激励、静止时，长缺口位于竖直位置（平衡位置的标志），它是摆轮振动周期和振幅测量的参考点，也是控制受迫振动时闪光灯开关、并测量受迫振动与激励信号之间相位差的参考点。

在无阻尼的情况下，用手拨动摆轮使其偏离平衡位置后松手，由摆轮和弹簧构成的振动系统即开始自

由振动。

阻尼的产生方式：阻尼是由永久磁铁产生的、作用于摆轮的阻尼力矩。松开固定磁铁的螺丝、上下调整磁铁距其固定杆顶部的距离  $s$ ，可改变阻尼力矩。

摆轮转角  $\theta$  和振动周期的测试方法：摆轮上的长缺口通过光电门 1 时，仪器开始测定缺口移动的个数，当长缺口又 1 次通过光电门 1 时，停止计数，显示窗口指示刚才测量到的振幅（单位为度）。摆轮周期测量也是这个原理。打开“显示”按钮，屏幕可显示周期和振幅。

外激励的施加方式：外激励由转速稳定且可调的步进电机的偏心轴通过连杆和摇杆加到振动系统上。由于连杆的长度和摇杆的长度远大于偏心轮的偏心半径，电机匀速转动时对系统的作用可近似为简谐激励。改变电机转速就改变了外激励周期。打开“电机及显示”按钮，屏幕可显示外激励源的周期以及摆轮振动与外激励源之间的相位差。

摆轮振动与外激励源相位差的测试方法：(1)使用闪光灯。有机玻璃转盘同电机一同转动。有机玻璃转盘上带有标志电机位置的白色细线（即“0”位标志线）。按下闪光灯开关。当摆轮的长缺口通过光电门 1（即摆轮的平衡位置）时，闪光灯点亮，照亮有机玻璃转盘的“0”位标志线，此刻“0”位标志线指示的角度即外激励超前摆轮振动的角度，或摆轮滞后于外激励的角度。闪光灯在长缺口来回通过光电门 1 时都要闪亮，因此每周期闪两次。摆轮完全不受外激励的情况下，静止时，长缺口位于竖直位置，如果光电门 1 处于竖直位置，闪光灯照亮“0”位标志线的两次示值应完全一致。但由于整体结构的一致性差，这一点并不能处处保证。实际上两次角度示值可能有少许偏差，我们可取其平均值作为外激励与摆轮振动的相位差。闪光灯只有在测量受迫振动的相位差时才允许使用，尽量减小使用次数，以延长其寿命。(2)使用光电门 2。光电门 2 和光电门 1 一起，可测出摆轮振动与外激励源相位差，并显示在屏幕上。

#### 波耳共振仪控制按钮的说明：

电源开关：打开或关闭仪器电源；

显示按钮：打开后可显示摆轮振动周期和振幅；

闪光灯开关：持续按下可打开闪光灯；

电机及显示按钮：打开后可显示外激励源周期以及摆轮振动与外激励源相位差。

**注意：**打开电源开关前须确认“电机及显示”按钮处于关闭（弹起）状态。必须在有永久磁铁提供阻尼且阻尼足够大时才能打开“电机及显示”按钮。

### 3. 实验原理与实验内容

#### A) 观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律

我们知道，无阻尼自由振动时，摆轮受到弹簧的恢复力矩与摆轮偏离平衡位置的角度  $\theta$  成正比、方向与  $\theta$  相反， $M = -k\theta$ 。设摆轮的转动惯量为  $J$ ，弹簧劲度系数为  $k$ ，忽略弹簧的等效转动惯量。则摆轮转角  $\theta$  的运动方程为：

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \quad (1)$$

其解为简谐振动形式：

$$\theta = \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \quad (2)$$

其中  $\theta_0$  为摆轮的初始振幅， $\omega_0 = \sqrt{k/J}$  为无阻尼自由振动的固有角频率， $\varphi_0$  为初始相位。振动系统总的机械能为摆轮动能和弹簧弹性势能之和：

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k \theta^2 = \frac{1}{2} k \theta_0^2 \quad (3)$$

总能量  $E$  与初始振幅的平方成正比，且无阻尼时总机械能守恒。

阻尼作用是与速度成正比的磁阻尼，其大小等于摆轮角速度  $\dot{\theta}$  与阻尼力矩系数  $\gamma$  的乘积、方向与速度相

反,  $M_r = -\gamma \dot{\theta} = -\gamma d\theta/dt$ 。有粘滞阻尼时摆轮的运动方程为:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

设阻尼系数  $\beta = \gamma/2J$ , 整理可得:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (5)$$

设上式的通解为  $\theta = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$ , 带入 (5) 式并整理可得:

$$\omega^2 - 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0$$

其解为:

$$\omega = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

根据  $\omega_0$  和  $\beta$  之间的大小关系, (5) 式的解可分为三种情况:

$$(1) \text{ 欠阻尼, } \beta < \omega_0: \quad \theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0) \quad (6)$$

其中  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  为欠阻尼振动的角频率,  $T_d = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  为振动的周期。

$$(2) \text{ 临界阻尼, } \beta = \omega_0: \quad \theta = \theta_0 e^{-\omega_0 t} \quad (7)$$

$$(3) \text{ 过阻尼, } \beta > \omega_0: \quad \theta = e^{-\beta t} \left( \theta_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + \theta_3 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (8)$$

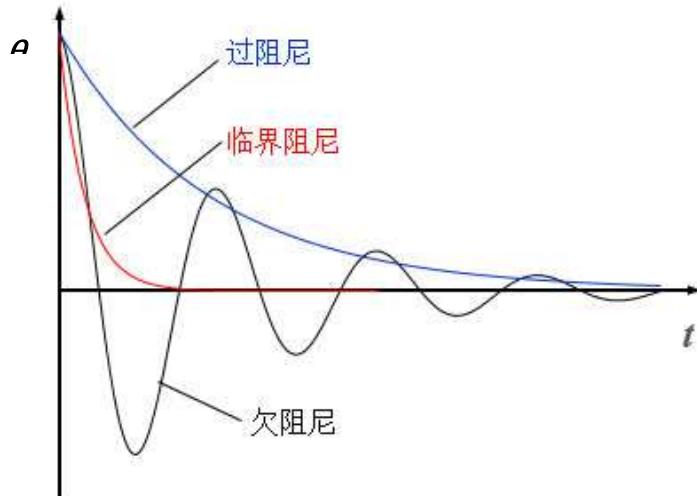


图 2 欠阻尼、临界阻尼、过阻尼状态时的摆轮轨迹示意图

三种阻尼状态下摆轮的轨迹示意图如图 2 所示, 其特点为:

- 欠阻尼状态时, 摆轮振荡的角频率  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  小于无阻尼自由振动时的固有角频率  $\omega_0$ , 同时振幅随时间按照指数规律衰减;
- 临界阻尼状态时, 恰好不发生周期性振荡。摆轮位移随时间以指数规律衰减, 且以最短的时间回到(接近)平衡位置;
- 过阻尼状态时, 摆轮位移随时间以指数规律缓慢衰减。

A.0 说明  $\beta$  的单位(量纲)是什么。

欠阻尼状态时，如果用外力使摆轮离开平衡位置然后释放，摆轮将作周期性振荡且振幅随时间按指数规律衰减，轨迹为 $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$ 。设  $t=nT_d + t_0$ ，摆轮振幅 $\theta_n = \theta_0 e^{-\beta(nT_d+t_0)}$ ，该式两边取对数可得：

$$\ln \theta_n = \ln \theta_0 - \beta t_0 - n(\beta T_d) \quad (9)$$

只要每个周期测量一次振幅值 $\theta_n$ ，得到一组振幅数据，再对 $[\ln \theta_n, n]$ 用最小二乘法直线拟合，就可以用实验的方法求出 $\beta$ 。

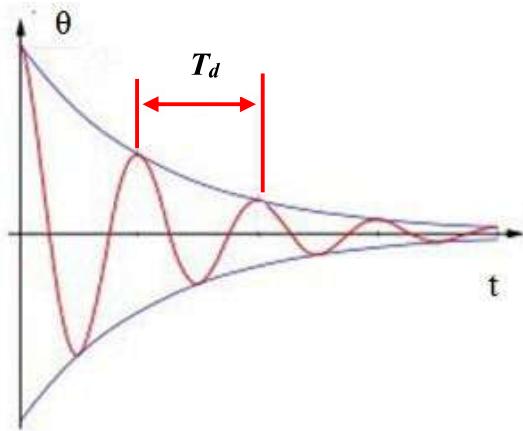


图 3 欠阻尼振动的幅度  $\theta$  随时间  $t$  的变化曲线

#### A.1 测量最小阻尼时（取下永久磁铁）的阻尼系数 $\beta$ 和固有角频率 $\omega_0$ 。

调整仪器使波耳共振仪处于工作状态：确认“电机及显示”按钮处于关闭（弹起）状态。打开电源开关，取下永久磁铁，光电门 1 和光电门 2 可以手动微调，避免与摆轮或有机玻璃转盘接触。手动调整电机偏心轮使有机玻璃转盘上的 0 位标志线指示 0 度，检查摇杆和(静止)摆轮的长缺口是否竖直，亦即确保使摆轮处于无激励状态，检查光电门 1 是否处于摆轮长缺口位置(平衡位置)。然后用手拨动摆轮使其偏离平衡位置  $150^\circ \sim 180^\circ$ ，松开手后，检查摆轮的自由摆动情况。正常情况下，振动衰减应该很慢。注意，摆轮、光电门 1、弹簧之间不能有摩擦。

实际测量的量为振幅值 $\theta_j$ 和振动周期 $T_d$ 。测量 200 个振幅 $\theta_i$ 和周期 $T_d$ 。同时记录振幅和周期数据很难，可以用手机录像。

由 (9) 式通过直线拟合计算阻尼系数及其不确定度 $\beta \pm U_\beta$ 。由于数据点较多，有 200 多组，可以选取 1/10 的数据进行拟合（如选取 $\theta_1, \theta_{11}, \theta_{21} \dots$ 和 $T_1, T_{11}, T_{21} \dots$ ）。

周期测量的不确定度约定为 0.002 s。

#### A.2 用最小阻尼时的阻尼系数 $\beta$ 和振动周期 $T_d$ 计算固有角频率 $\omega_0$ 。

计算结果表明：因为阻尼振动角频率 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，在阻尼很小的情况下，可以用阻尼振动角频率 $\omega_d$ 代替 $\omega_0$ 。此外，应该指出，原理上可以认为弹簧的劲度系数 $k$ 为常数，与摆角无关，因此 $\omega_0$ 为常数。实际上由于制造工艺和材料性能的影响， $k$ 随着角度的改变有微小的变化，使不同振幅时系统的固有频率有微小的变化。有时需要考虑这些变化，如共振点附近受迫振动相频特性与 $\omega_0$ 的关系，这时需要测出固有角频率与不同振幅的相关数据，减少实验值与理论值的偏差。

**A.3 测量其他 2 种阻尼状态的振幅：**当磁铁距其固定杆顶部的距离  $s$  为 20 mm 时；以及当距离  $s$  最大即阻尼最大时。

注意，尽量使最后一组数据的振幅大于  $20^\circ$ ，角度过小会导致测量误差过大。

测量后求出 $\beta \pm U_\beta$ 。

**品质因数** $Q$ 是衡量振动系统性能的无量纲物理量，其定义为 $2\pi$ 乘以振动系统存储的总能量 $E$ 再除以一个周期内损失的能量 $\Delta E$ ：

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} \quad (10)$$

品质因数 $Q$ 高表示摆轮在一个周期内损失的能量少，因而振动可持续更多的周期（更长的时间）。不同的振动系统的 $Q$ 不同。 $LC$ 共振电路的 $Q$ 值通常为 $10^2$ 量级，音叉、钢琴弦为 $10^3$ ，原子钟、加速器中的超导谐振器以及激光器光学共振腔的 $Q$ 值可达到 $10^{11}$ 甚至更高。

以下讨论阻尼振动时的品质因数 $Q$ 。对于摆轮—弹簧振动系统的阻尼振动，当阻尼系数 $\beta$ 较小时，可以认为振动系统的总能量 $E$ 仍近似与振幅的平方成正比，(3)式近似成立。但由于阻尼的存在，总机械能不再守恒。由(10)式品质因数的定义可得振动系统的 $Q$ 值为：

$$Q = \frac{2\pi \cdot k\theta_n^2/2}{k\theta_n^2/2 - k\theta_{n+1}^2/2} = \frac{2\pi}{1 - (\theta_{n+1}/\theta_n)^2} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T_d}} \approx \frac{2\pi}{2\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \quad (11)$$

可见振动系统的 $Q$ 与 $\beta$ 或阻尼常数 $\gamma$ 成反比。阻尼（损耗）越小， $Q$ 越高、振动持续时间越长。

A.4 利用 A.1 和 A.3 题拟合得到的不同阻尼状态下的 $\beta$ ，由(11)式计算相应的品质因数 $Q$ 。

### B) 分析振动系统受迫振动的基本规律，观测幅频特性

卷形弹簧的另一端有角频率为 $\omega$ 、振幅为 $A_D$ 的简谐信号激励下，其轨迹为 $A_D \cos(\omega t)$ （为简化起见，设激励源初相位为0）。当摆轮的位移为 $\theta$ 时，由于激励源的存在，弹簧的转角变为 $\theta - A_D \cos(\omega t)$ ，相应的弹簧恢复力矩为 $-k(\theta - A_D \cos(\omega t))$ 。则(4)式所示摆轮的运动方程变为：摆轮的一端将跟随激励源作简谐运动，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 A_D \cos(\omega t) \quad (12)$$

欠阻尼情况，其通解为：

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0\right) + \theta_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (13)$$

通解(13)是形如(6)式的阻尼振动项和频率与激励源频率相同的简谐振动项 $\theta_m \cos(\omega t - \varphi)$ 的叠加。阻尼振动项反映了一定初始条件后的过渡过程， $t \rightarrow \infty$ 时该项为0。一般 $t > \tau$ 之后（ $\tau$ 为阻尼振动振幅衰减到 $e^{-1}$ ，即36.8%所需时间），就有稳态解 $\theta = \theta_m \cos(\omega t - \varphi)$ 。受迫振动系统达到稳态时做与激励源频率相同的谐振振动。稳态解的振幅和相位差分别为：

$$\theta_m = \frac{\omega_0^2 A_D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad (14)$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (15)$$

上两式表明，受迫振动达到稳态后**摆轮振幅** $\theta_m$ 以及**摆轮与激励源的相位差** $\varphi$ 是激励源频率 $\omega$ 、振幅 $A_D$ 以及摆轮固有频率 $\omega_0$ 和阻尼系数 $\beta$ 的函数。相位差 $\varphi$ 的取值范围为 $0 < \varphi < \pi$ ，反映摆轮振动总是滞后于激励源的振动。

振幅随频率变化的曲线称为幅频特性曲线，相位差随频率的变化称为相频特性。测试并分析幅频、相频特性有助于深入理解受迫振动的规律。

B.1 由 (14) 式可知, 当振幅  $\theta_m$  达到最大, 振动系统发生共振。此时, 系统的频率  $\omega$  为共振频率。写出共振频率、及共振处振幅最大值的表达式(与品质因数  $Q$  有关吗?) 和相位差  $\varphi$ 。

推导证明在弱阻尼状态下, 共振频率近似等于振动系统的固有频率  $\omega_0$ 。

B.2 说明如何判断受迫振动达到了稳态?

B.3 测试幅频特性和相频特性

开启“电机及显示”开关, 调节“强迫力周期”旋钮以改变电机运动角频率  $\omega$ 。选择 2 个不同阻尼系数(应该与 A.3 中取一致), 测定幅频和相频特性曲线。

测试要求:

1. 必须在有永久磁铁阻尼且阻尼足够大的情况下测试受迫振动。如果无阻尼或阻尼较小, 会导致摆轮振幅过大、损伤弹簧。
2. 每次调节强迫力周期后, 摆轮要经过多次摆动后振幅和周期才能稳定, 这时再记录数据。
3. 要求每条曲线至少有 15 个数据点。测试周期范围为  $0.93T_0 \sim 1.07T_0$ , 数据点分布在共振点两侧的数目应大致相等, 且共振点周围取点要密集一些。

B.4 将不同阻尼系数下的幅频特性曲线画在一副图中, 相频特性曲线画在一副图中。

由 (14) 式推导可得, 从幅频特性曲线也可得到振动系统的品质因数  $Q$ :

$$Q \approx \frac{\omega_r}{|\omega_+ - \omega_-|} \quad (16)$$

其中  $\omega_r$  为幅频特性曲线中振幅达到最大时对应的频率,  $\omega_{\pm}$  为振幅等于  $\sqrt{2}/2$  振幅最大值时对应的两个频率值。

B.5 从幅频特性曲线中读出不同阻尼系数下的  $\omega_r$ 、 $\omega_{\pm}$ , 计算品质因数  $Q$ 。将结果与 A.4 题的结果相比较。

### C) 探究受迫振动的瞬态过程: 振动系统在共振频率激励下从静止到稳态的过程, 了解共振现象

在 B 部分推导和测试了受迫振动达到稳态后摆轮的幅频特性。本部分将观测和分析振动系统在共振频率激励源的激励下从静止达到稳态的过程。

C.1 阻尼状态为 A.3 部分测试的磁铁距其固定杆顶部的距离  $s$  为 20 mm 时的阻尼。强迫力周期设置为与摆轮一弹簧振动系统的固有角频率相同。关闭电机, 使摆轮尽可能静止。

打开电机开关, 观察摆轮从静止到稳态的瞬态过程。其幅度是逐渐增大还是直接达到稳态? 试解释瞬态过程为什么是这样的。

关闭电机, 检查摇杆和(静止)摆轮的长缺口是否竖直, 亦即确保初始时刻: 摆轮位移和速度都为 0。再打开电机开关, 重新使摆轮从静止状态开始振动, 测试并记录受迫振动瞬态过程的振幅。每个周期测量一次振幅值  $\theta_j$ , 直到达到稳态。

画出摆轮振幅随时间变化的曲线。

根据初始条件, 由 (13) 式推导出受迫振动瞬态过程中振幅随时间的变化关系式, 计算受迫振动瞬态过程中振幅的理论值(稳态解的振幅  $\theta_m$ : 使用测量结果), 并与测试数据画在一副图中相比较。

C.2 在共振频率激励下, 受迫振动达到稳态的条件为: 一个周期内电机提供给振动系统的能量与电磁阻尼导致的能量损耗相等。当用固有频率激励时, 稳态后, 系统总的机械能保持不变, 如同理想的简谐振动(无阻尼、无激励)一样!

试写出 C.1 题的振动系统达到稳态后, 电机在一个周期内提供的平均输入功率的表达式(用  $\theta_m$ 、 $\omega_0$ 、 $k$  和  $Q$  表示)。

认识共振现象：

在共振频率下，很小的周期性驱动力便可产生巨大的振动。自然界有许多共振现象。人类也在利用或者试图避免共振现象。一些共振的例子包括：乐器的音响共振、收音机电路的*LC*共振等。在工程机械中避免共振是必须考虑的问题，因为巨大的振幅能摧毁整个结构。例如桥梁在大风中会产生振动，如发生共振的话可能导致断塌。再如通过风洞试验能确保飞机在整个飞行过程中所受的力不与其固有频率相同，否则会导致危险。

一般来说一个系统（无论是力学的、声学的或电子的）通常有多个共振频率。在这些共振频率上激发振动比较容易，在其它频率则比较困难。假如激励源的振动频率比较复杂的话（例如敲一下音叉或拨一下琴弦，敲击或拨动相当于一个包含宽频信号成分的脉冲激励信号），系统一般会“挑出”其共振频率并随此频率振动，而将其它频率成分则很快衰减。因此，我们听到的是音叉或琴弦发出的包含多个共振频率（基频和倍频）的声音随着时间缓慢地衰减，而其他频率成分的声音几乎听不到。

## II-4&5 耦合摆

### 1. 引言

《费曼物理学讲义》第一卷第 21 章“谐振子”的开头部分讲到[1]:

在学习物理学时，通常分成立学、电磁学、光学等一系列课程，一门课程接着一门课程地学习。但是，有一件奇怪的事情却一再出现，即在物理学的不同课程中，甚至在其他学科中，出现的方程式往往是一样的。因此，这些不同领域的很多现象具有相似之处。举一个简单的例子，声波的传播在很多方面就与光波的传播类似。如果我们深入地研究声学，就会发现很多内容与我们深入研究光学时是相同的。所以，对一个领域中某种现象的研究可以扩大我们对另一个领域的认识。最好从一开始就认识到这种扩大是可能的，否则人们就可能对为什么要花这么多的时间和精力来研究看来仅仅是力学中的很小一部分，感到不可理解。

谐振子可以与很多其他领域的现象相对应。虽然在力学中分析的是弹簧振子、小振幅的单摆等现象，但实际上是在研究一种**微分方程**。这种方程在物理学和其他学科中反复出现，是值得我们认真研究的。包含这个方程的现象还有：谐振电路中电荷的来回振荡，音叉产生声波的振动，原子中的电子产生光波的类似振动，恒温器控制温度的伺服系统方程，化学反应中一些复杂的相互作用，菌落在养料供给和细菌产生的毒素的共同作用下的繁殖和生长，狐狸吃兔子、兔子吃青草等。所有这些现象都遵循一些相似的方程式，这就是为什么我们要深入地研究机械振子的原因。这些方程称为**常系数线性微分方程**，其包含几项之和，每一项都是因变量对自变量的微商再乘以一个常数 $a_i$ ，即：

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (1)$$

该方程称为n阶常系数线性微分方程。

### 2. 实验目的

本实验所涉及的耦合摆以及与耦合摆类似的耦合弹簧振子、耦合扭摆是基础研究和工程应用的重要基本模型。如固体物理学中用弹簧振子链为模型来模拟晶格振动，研究晶体的热力学和载流子输运特性。耦合摆或耦合扭摆作为基本模型，还广泛应用于地震、化学催化、生物大分子链等方面的研究。

实验目的：

1. 推导单摆、双耦合摆、三耦合摆直至五耦合摆的动力学方程，求解它们振动的**固有频率**和**模式**，并理解这两个概念。
2. 将上述推导的结论推广到N耦合摆，由动力学方程求解振动的固有频率、模式和色散关系。
3. 用实验的方法测试耦合摆的固有频率。
4. 观察并测试耦合摆在固有频率驱动力激励下的振动模式（即摆球振幅与位置的关系），通过三角函数拟合得到振动波长。再对若干组固有频率和波长值做直线拟合，验证耦合摆的色散关系。
5. 观察和测试通频范围之外的振动在耦合摆中的传播规律。
6. 学习利用示波器的快速傅里叶变换（FFT）功能对信号进行频谱分析。
7. 练习三角函数拟合方法。

**本实验不需要评估不确定度。**

### 3. 实验仪器

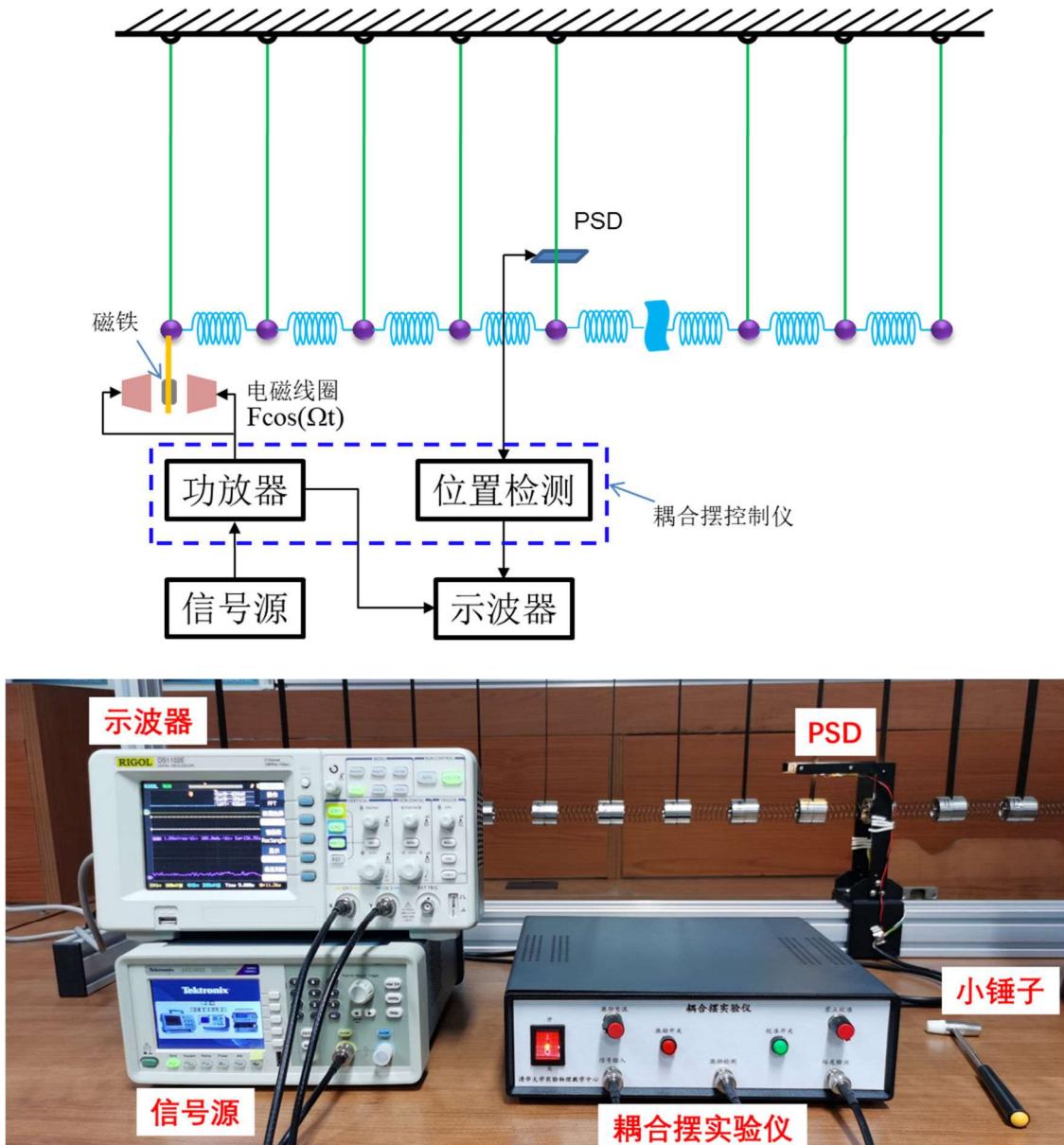


图 1 实验仪器

- ① 耦合摆，由 15 个相同摆长和相同摆球质量的单摆等距排列、通过劲度系数相同的弹簧连接而成；
- ② 信号源，泰克 AFG1022，双通道，25 MHz，采样率 125 MS/s；
- ③ 耦合摆实验仪，集成了功率放大器（功放器）和位置检测器（PSD）信号处理模块，其中：  
功放器用于放大信号源的输出信号，施加在电磁线圈上，驱动耦合摆中的 0 号摆球运动；  
位置检测器（PSD）可沿导轨移动，用于测试各个摆球的振幅；
- ④ 示波器，RIGOL DS1102E，双通道，100 MHz，采样率 1 GS/s，用于显示 PSD 测试的摆球振幅；
- ⑤ 小锤子，用于敲击摆球使耦合摆起振；
- ⑥ BNC 接头连接线，3 根。

#### 4. 实验原理与实验内容 【耦合摆实验分 2 次课完成：第一次做 B.1, B.2, C.1 内容；第二次做 B.3 内容】

##### A) 单摆至五耦合摆的振动特性分析

A 部分从单摆和弹簧振子开始，推导单摆、双耦合摆直至五耦合摆的动力学方程，求解它们振动的固有频率和模式表达式[3]（上课时会讲，讲义内容上课时都会讲），理解相关的物理概念。分析中假设这些摆都是理想无阻尼的。

##### (1) 单摆

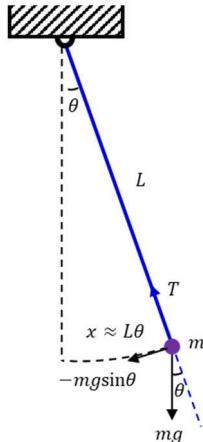


图 2 单摆

对于摆长为  $L$ 、摆球质量为  $m$  的单摆，如图 2 所示，当摆角  $\theta$  很小时，摆球的位移近似为  $x \approx L\theta$ 、所受到的合力为  $-mgsin\theta \approx -mg\theta \approx -mgx/L$ 。合力中的负号表示其方向与位移相反。根据牛顿第二定律可得：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgx}{L} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x \quad (2)$$

该微分方程的解为：

$$x = A_p \sin(\omega_p t + \varphi_{0p}) \quad (3)$$

其中  $A_p$  为单摆的振幅（下标  $p$  为 pendulum 的首字母）、 $\varphi_{0p}$  为初始相位，均可由摆动的初始条件确定； $\omega_p = \sqrt{g/L}$ ，是单摆做简谐运动的角频率。

##### (2) 弹簧振子

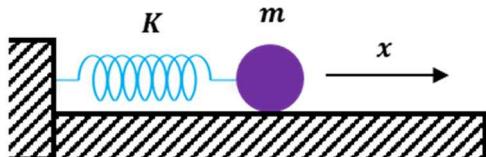


图 3 弹簧振子

对于由劲度系数为  $K$  的轻质弹簧（质量可忽略）与质量为  $m$  的小球组成的弹簧振子，如图 3 所示，当小球偏离平衡位置的位移为  $x$  时，所受到的弹性恢复力为  $-Kx$ 。这里的负号表示恢复力的方向与小球位移相反。根据牛顿第二定律可得：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad (4)$$

该微分方程的解为：

$$x = A_s \sin(\omega_s t + \varphi_{0s}) \quad (5)$$

其中  $A_s$ （下标  $s$  为 spring 的首字母）为振幅、 $\varphi_{0s}$  为初始相位，均可由振动的初始条件确定； $\omega_s = \sqrt{K/m}$  为弹簧振子做简谐运动的角频率。

## (3) 单摆与弹簧振子结合

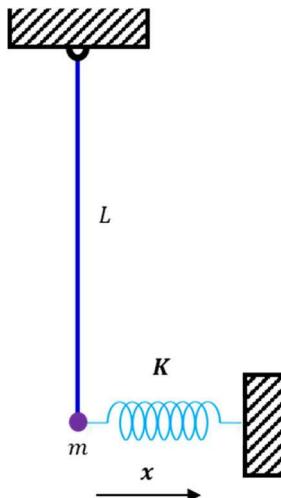


图 4 单摆与弹簧振子结合

将单摆与弹簧振子相结合，如图 4 所示。当摆球处于平衡位置、 $x = 0$  时单摆摆角  $\theta = 0$  且弹簧无形变。由(1)和(2)部分的分析可知，当摆球位移为  $x$  时，其所受到的合力为  $-mgx/L - Kx$ 。根据牛顿第二定律可得：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m \frac{g}{L} x - Kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L} x - \frac{K}{m} x = -(\omega_p^2 + \omega_s^2)x \quad (6)$$

上式表明摆球仍做简谐运动，其角频率为：

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2} \quad (7)$$

## (4) 双耦合摆[2] (费曼物理学讲义第一卷第 49 章)

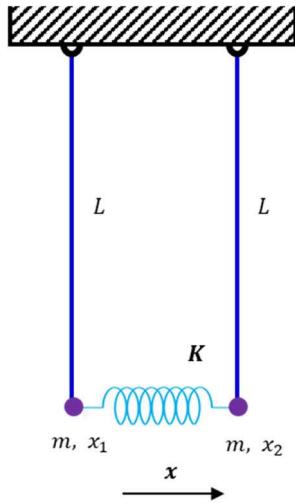


图 5 双耦合摆

两个摆长均为  $L$ 、摆球质量均为  $m$  的单摆通过劲度系数为  $K$  的轻质弹簧相连，形成双耦合摆，如图 5 所示。设两个摆球的位移分别为  $x_1$ 、 $x_2$ 。对于第一个摆球，所受到的弹簧恢复力为  $-K(x_1 - x_2)$ ，其中  $x_2$  之前的负号表示由于第二个摆球的位移使弹簧的形变减小了  $x_2$ 。类似的，第二个摆球受到的弹簧恢复力为  $-K(x_2 - x_1)$ 。两个摆球的动力学方程可写为：

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{g}{L}x_1 - \frac{K}{m}(x_1 - x_2) \quad (8)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{g}{L}x_2 - \frac{K}{m}(x_2 - x_1) \quad (9)$$

设方程的解为  $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ 、 $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ ，代入上式并整理可得：

$$(\omega_p^2 + \omega_s^2)x_1 - \omega_s^2 x_2 = \omega^2 x_1 \quad (10)$$

$$-\omega_s^2 x_1 + (\omega_p^2 + \omega_s^2)x_2 = \omega^2 x_2 \quad (11)$$

上两式可改写为：

$$\begin{bmatrix} \omega_p^2 + \omega_s^2 & -\omega_s^2 \\ -\omega_s^2 & \omega_p^2 + \omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

则方程的求解转换为计算上式中  $2 \times 2$  矩阵的特征值和特征向量。其解为：

①  $\omega_1 = \omega_p$ ,  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 即  $x_1 = x_2$ 。两个摆球以同频率  $\omega_p$  (即单摆频率)、同振幅和同相位做简谐振动,

弹簧从来没有形变, 就好像不存在一样。由于假设振动无阻尼, 两个摆会以固定的振幅和频率一直振动。

②  $\omega_2 = \sqrt{\omega_p^2 + 2\omega_s^2}$ ,  $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 即  $x_1 = -x_2$ , 两个摆球以同频率  $\omega_2$  做同振幅、反相振动。此时弹簧提供一个恢复力, 因而两个摆以比第一个解  $\omega_1 = \omega_p$  更高的频率  $\omega_2 = \sqrt{\omega_p^2 + 2\omega_s^2}$  做固定振幅然而反相的简谐振动。

注意在第二个解中由于两个摆球的振动幅度相同、相位相反, 弹簧的中点是不动的, 类似图 4 中弹簧右端固定的情况, 但振动频率  $\omega_2 = \sqrt{\omega_p^2 + 2\omega_s^2}$  比图 4 振动频率  $\sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2}$  更高。这是因为图 5 中两个摆球振动反相, 弹簧的形变及其提供的恢复力是图 4 中的 2 倍, 因而  $\omega_2 = \sqrt{\omega_p^2 + 2\omega_s^2}$  中  $\omega_s^2$  前的系数为 2。

由以上分析可知, 双耦合摆具有两种以不变的振幅振动的方式: 两个摆在所有时间中以同一频率  $\omega_p$  同向 (即同相位) 振动; 或者以更高的频率  $\sqrt{\omega_p^2 + 2\omega_s^2}$  沿相反方向 (即反相) 振动。对于任何一种方式, 每个摆球都以相同频率完全按正弦规律运动。这一特征就是我们称之为模式的基本特征。

事实上, 我们还知道, 如果对双耦合摆施加任意初始激励后使其自由振动, 则双耦合摆的振动都是两个模式以适当振幅和相位组成的振动之和, 或者说都可分解为适当振幅和相位的两个模式的振动, 而每个模式都非常简单——只随时间做固定频率的正弦振动。

### (5) 三耦合摆

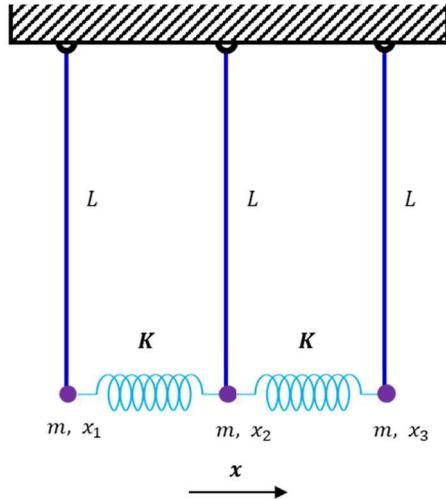


图 6 三耦合摆

列出三个摆球的动力学方程:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{g}{L}x_1 - \frac{K}{m}(x_1 - x_2) \quad (13)$$

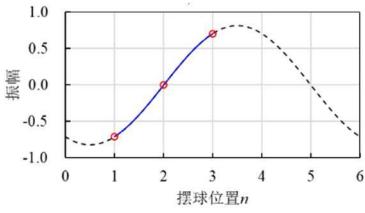
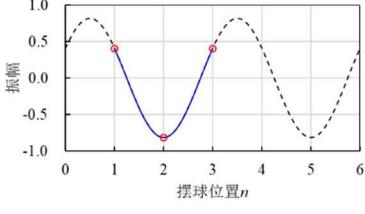
$$\begin{aligned}\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{g}{L}x_2 - \frac{K}{m}(x_2 - x_1) - \frac{K}{m}(x_2 - x_3) \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} &= -\frac{g}{L}x_3 - \frac{K}{m}(x_3 - x_2)\end{aligned}$$

上式可改写为：

$$\begin{bmatrix} \omega_p^2 + \omega_s^2 & -\omega_s^2 & 0 \\ -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 \\ 0 & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + \omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

用 Mathematica 程序求解矩阵的特征值和特征向量，结果见下表第 2、3 列。下表第 1 列  $\kappa$  为模数 (mode number)，第 4 列为特征向量所代表的各个摆球的振幅与位置的关系图，图中红色圆圈为各个摆球的振幅 (做了归一化处理)，蓝色实线为摆球振幅—位置关系拟合曲线 (用 Matlab 或 Origin 程序做三角函数拟合，拟合方法见讲义第 12 页说明，拟合表达式见最后一列)，黑色虚线为将上述拟合曲线延长到假设存在的多个摆球，以方便地观察到一个以上的振幅变化周期 (即波长)。

表 1 三耦合摆的振动特性

$\kappa$	特征值 (固有频率)	特征向量	特征向量作图 (归一化) 并作曲线拟合	拟合曲线表达式， 并求出波数 $k$ 和波长 $\lambda$
0	$\omega_p^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		
1	$\omega_p^2 + \omega_s^2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\pi \frac{n-2}{3}\right)$ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \lambda = 6$
2	$\omega_p^2 + 3\omega_s^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(2\pi \frac{n+1/4}{3}\right)$ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \lambda = 3$

表中最后一列的曲线拟合式可写为统一的形式：

$$x_\kappa(n, N=3) = \frac{\sin\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{3}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^3 \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{3}\right)}} \quad (14)$$

其中  $\kappa$  为模数， $n = 1 \sim 3$  为摆球位置， $N = 3$  为耦合摆的摆球数量， $n_0$  为三耦合摆的波节点位置。

## (6) 四耦合摆

运动方程：

$$\begin{bmatrix} \omega_p^2 + \omega_s^2 & -\omega_s^2 & 0 & 0 \\ -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 & 0 \\ 0 & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 \\ 0 & 0 & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + \omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

表2 四耦合摆的振动特性

$\kappa$	特征值 (固有频率)	特征向量	特征向量作图(归一化) 并作曲线拟合	拟合曲线表达式, 并求出波数k和波长 $\lambda$
0	$\omega_p^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		
1	$\omega_p^2 + (2 - \sqrt{2})\omega_s^2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\pi \frac{n - 2.5}{4}\right)$ $k = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lambda = 8$
2	$\omega_p^2 + 2\omega_s^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\pi \frac{n + 0.5}{4}\right)$ $\lambda = 4$
3	$\omega_p^2 + (2 + \sqrt{2})\omega_s^2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(3\pi \frac{n - 7/6}{4}\right)$ $\lambda = \frac{8}{3}$

表中的曲线拟合式可写为：

$$x_\kappa(n, N=4) = \frac{\sin\left(\pi\kappa \frac{n - n_0}{4}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^4 \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n - n_0}{4}\right)}} \quad (16)$$

### (7) 五耦合摆

运动方程：

$$\begin{bmatrix} \omega_p^2 + \omega_s^2 & -\omega_s^2 & & & \\ -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 & & \\ & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 & \\ & & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 \\ & & & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + \omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

表3 五耦合摆的振动特性

$\kappa$	特征值 (固有频率)	特征向量	特征向量作图(归一化) 并作曲线拟合	拟合曲线表达式, 并求出波数k和波长 $\lambda$
0	$\omega_p^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		

1	$\omega_p^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \omega_s^2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(\pi \frac{n-3}{5}\right)$ $k = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \lambda = 10$
2	$\omega_p^2 + \frac{5-\sqrt{5}}{2} \omega_s^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1-\sqrt{5} \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(2\pi \frac{n+\frac{3}{4}}{5}\right)$ $\lambda = 5$
3	$\omega_p^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \omega_s^2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(3\pi \frac{n-4/3}{5}\right)$ $\lambda = \frac{10}{3}$
4	$\omega_p^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{2} \omega_s^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1+\sqrt{5} \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$		$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(4\pi \frac{n+1/8}{5}\right)$ $\lambda = \frac{5}{2}$

表中的曲线拟合式可写为：

$$x_\kappa(n, N=5) = \frac{\sin\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{5}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^5 \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{5}\right)}} \quad (18)$$

### B) N耦合摆

当  $N = 6$  时，振动特性仍可用 Mathematica 求解，且摆球振幅—位置关系仍与 (14)、(16)、(18) 式的规律符合。当  $N \geq 7$  时，用 Mathematica 难以求解运动方程的特征值（固有频率）和特征向量。因此，在 B 部分将把 A 部分的结论推广到  $N$  耦合摆，首先从动力学方程出发求得色散关系 ( $\omega \sim k$  关系)，之后用实验的方法观察和测试  $N$  耦合摆的固有频率、振动模式（即摆球振幅—位置关系），再通过三角函数拟合得到振动波长，最后通过直线拟合验证耦合摆的色散关系。

由 A 部分的分析可推测：

- 对于  $N$  耦合摆，具有  $N$  个固有频率  $\omega_\kappa$  和  $N$  个振动模式，对应的模数为  $\kappa = 0 \sim (N-1)$ ；
- 当模数  $\kappa = 0$  时，对应于固有频率  $\omega_0 = \omega_p$ ，即所有单摆都以同频率  $\omega_p$  和同相位做简谐振动，好像所有的弹簧都不存在时一样；
- 当模数  $\kappa = 1 \sim (N-1)$  时，第  $n$  个摆球的振幅  $x_\kappa(n)$  与模数  $\kappa$  和摆球位置  $n$  的关系为：

$$x_\kappa(n, N) = \frac{\sin\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{N}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{N}\right)}} \quad (19)$$

其中  $n_0$  为振幅为 0 的波节点位置。由上式还可求得模数  $\kappa$  对应的波数  $k$  及波长  $\lambda$ ：

$$k = \frac{\pi\kappa}{N}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2N}{\kappa} \quad (20)$$

4. (19)式所示为N耦合摆中各个摆球的幅度，各个摆球同时还以角频率 $\omega_\kappa$ 做简谐振动。因此，将(19)式进一步写为：

$$\begin{aligned} x_\kappa(n, t) &= \frac{\sin\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{N}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{N}\right)}} \cos(\omega_\kappa t) \\ &= A_\kappa \sin\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{N}\right) \cos(\omega_\kappa t) \\ &= A_\kappa \sin(kn + \varphi) \frac{e^{i\omega_\kappa t} + e^{-i\omega_\kappa t}}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $A_\kappa = 1/\sqrt{\sum_{n=1}^N \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n-n_0}{N}\right)}$ ,  $k = \pi\kappa/N$ ,  $\varphi = -\pi\kappa \frac{n_0}{N}$ 。上式表明，对于模数 $\kappa$ ，各个摆球以固有频率 $\omega_\kappa$ 和固定的振幅做同频率简谐振动。

列出N耦合摆中各个摆球的动力学方程：

$$\text{第1个摆球: } \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{g}{L}x_1 - \frac{K}{m}(x_1 - x_2) \quad (22)$$

$$\text{第2~(}N-1\text{)个摆球: } \frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{g}{L}x_n - \frac{K}{m}(x_n - x_{n-1}) - \frac{K}{m}(x_n - x_{n+1}) \quad (23)$$

$$\text{第}N\text{个摆球: } \frac{d^2x_N}{dt^2} = -\frac{g}{L}x_N - \frac{K}{m}(x_N - x_{N-1}) \quad (24)$$

将(21)式的解代入(23)式，可得：

$$-\omega^2 x_n = -\omega_p^2 x_n - \omega_s^2(-x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1})$$

等式两边都除以 $x_n$ ，可得：

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_s^2(-e^{ik} + 2 - e^{-ik}) = \omega_p^2 + 2\omega_s^2(1 - \cos k) = \omega_p^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

从而可得到N耦合摆的色散关系为：

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)} = \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\frac{\pi\kappa}{2N}\right)} \quad (25)$$

### B.1 测试耦合摆的固有频率。

用小锤轻轻向左敲击最右端的摆球使耦合摆开始振动（两种敲击办法：多次随机敲击；或敲击两次：第一次敲击后，待该摆球向右运动时再敲击一次使其反向运动）。缓慢移动位置灵敏探测器 PSD 至耦合摆的某一个摆球，用 PSD 和示波器测试摆球的位移随时间的变化。通过数字示波器的傅里叶变换(FFT)功能对信号进行频谱分析，测试耦合摆的N个固有频率。

如有固有频率少于10个，可以重复测试或更换一个摆球测试。要求测出10个以上的固有频率。

**B.2** 已知耦合摆中弹簧的劲度系数为 $K = 18.9 \text{ N/m}$ ，摆球摆长为 $L = 0.500 \text{ m}$ ，摆球质量为 $m = 0.148 \text{ kg}$ 。用这些参数计算 $\omega_p$ 和 $\omega_s$ 的参考值，再用(25)式计算固有频率的理论值，并与B.1题的测试结果相比较（注意：由于耦合摆中摆球上方的悬片以及摆球间弹簧的质量不可忽略、摆动有阻尼等因素的影响，固有频率的理论值与测试结果有偏差）。

### 仪器使用说明

1. 打开信号源、示波器、耦合摆实验仪的电源开关。注意：示波器的电源开关位于仪器上方；耦合摆实验仪的“激励开关”和“校准开关”均应处于弹起（即关闭）状态。

2. 连接仪器（已连好，请检查连线是否正确）

将信号源的“Out1”连接至耦合摆实验仪的“信号输入”，用耦合摆实验仪内的功放器对信号源 Out1 信号进行放大、再输出至激励线圈；

将耦合摆实验仪的“幅度输出”（即 PSD 所测摆球振动信号）连接至示波器“CH1”，作为被测信号；

将耦合摆实验仪的“激励检测”连接至示波器“CH2”，将激励信号作为参考信号。

3. 用示波器的 FFT 功能测试耦合摆的固有频率

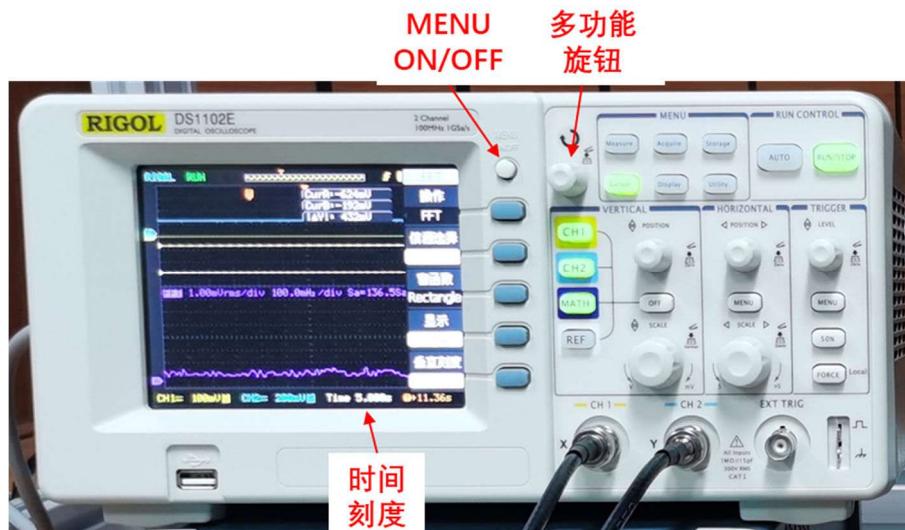


图 7 示波器照片

缓慢移动位置灵敏探测器 PSD，使其对准某一个摆球。

将示波器的触发源设置为 CH1，触发电平设置为 0.00 V。具体步骤为：按示波器“TRIGGER”区域的“MENU”按钮，屏幕上右侧显示触发菜单。利用触发菜单右侧的按键和/或示波器的多功能旋钮（见图 7 所示）将“触发模式”设置为“边沿触发”（可先按“触发模式”右侧按钮、显示触发模式，再按“触发模式”右侧的按钮改变触发模式，或旋转多功能旋钮改变触发模式、再按多功能旋钮选定），将“信源选择”设置为“CH1”、“边沿类型”设置为上升沿图案、“触发方式”设置为“自动”。按屏幕右侧上方的“MENU ON/OFF”按钮（图 7）可关闭屏幕上的触发菜单。

调节示波器“HORIZONTAL”区域的“SCALE”旋钮，将水平刻度调整到每格 5.000 s（示波器屏幕底部右侧显示：Time 5.000 s，见图 7）。

用小锤轻轻向左敲击最右端的摆球，使耦合摆开始振动。敲击力度以不使最左侧摆球下方的悬片碰触激励线圈为宜，否则摆球上方的长悬片会发生颤振，导致示波器测试到不属于耦合摆固有频率的振动频率。

（等待约 30 s 后）示波器屏幕显示所测摆球的振幅随时间的变化情况。

调整示波器“VERTICAL”区域的“SCALE”旋钮和“POSITION”旋钮，使波形在垂直方向上处于屏幕中间且不超出屏幕垂直范围。

当信号在水平方向充满屏幕时，按示波器“RUN CONTROL”区域的“RUN/STOP”按钮使其变为红色（通常会闪烁一段时间后再变为红色），使示波器停止采集信号。

打开示波器的 FFT 功能，测试耦合摆的固有频率谱：按示波器“VERTICAL”区域的“MATH”按钮使其变亮，屏幕右侧显示 FFT 菜单。利用菜单右侧的按键或多功能旋钮将“操作”设置为“FFT”、“信源选

择”设置为“CH1”、“窗函数”设置为“Rectangle”、“显示”设置为“分屏”、“垂直刻度”设置为“ $V_{RMS}$ ”。此时屏幕分为上下两部分。上半部分为示波器 CH1 所测的摆球振幅—时间关系，下半部分为对所测信号做 FFT 变换后的固有频率谱，其横坐标为频率、纵坐标为幅度。

分别调整示波器“VERTICAL”和“HORIZONTAL”区域的“SCALE”旋钮和“POSITION”旋钮，在垂直和水平方向缩放、移动频谱，观察频谱峰。当旋转“HORIZONTAL”区域的“POSITION”旋钮移动频谱时，屏幕左下角显示  $Center = *** \text{ mHz}$  或  $\text{Hz}$ ，为屏幕的垂直中心线所对应的频率值（该数值在无操作情况下持续约 2 s 后会消失，再次移动频谱时会自动出现）。也就是说，将某个频谱峰移至屏幕垂直中心线时，显示的数值即为该频谱峰的频率。测出所有较强频谱峰对应的频率，即为耦合摆的固有频率谱。固有频率的范围为约  $0.7 \text{ Hz} \sim 3.5 \text{ Hz}$ 。

一次测试通常不能测得所有固有频率，可以多次测试或更换摆球测试。要求测出 10 个以上的固有频率。

此外，如果在测试中需要调整示波器上半部分屏幕所显示的 CH1 信号的垂直/水平刻度和位置，需要先按示波器“VERTICAL”区域的“CH1”按钮，再旋转“VERTICAL”和“HORIZONTAL”区域的“SCALE”和“POSITION”旋钮进行调节。相应地，调整 FFT 窗口的垂直/水平刻度和位置，需要先按示波器“VERTICAL”区域的“MATH”按钮。

### B.3 测试并验证耦合摆的色散关系。

从 B.1 题测得的固有频率谱中，选取约  $1 \text{ Hz} \sim 3.2 \text{ Hz}$  范围内 4 个频率值。测试并计算耦合摆被这 4 个固有频率信号激励且振动达到稳定振动状态后，振动模式所对应的波长  $\lambda$ 。

测试和计算  $\lambda$  波长的步骤为：

①首先在实验室测试耦合摆被某个固有频率信号激励时，耦合摆中每个摆球的振动幅度。测试时注意判断耦合摆是否达到稳定振动状态，并注意判断各个摆球振幅的正负号（以 0 号摆球的振动为基准，当摆球与 0 号摆球反相时，幅度记为负）。在实验报告中需说明你是如何判断耦合摆达到稳定振动状态的，以及如何具体判断摆球振幅的正负号。

②课后以摆球序号  $n$  为自变量、摆球幅度  $x$  为因变量，用 Origin、Matlab 或其他程序进行三角函数拟合，拟合式为  $x = A \sin(kn - \varphi)$ ，拟合得出波数  $k$ 。由  $\lambda = 2\pi/k$  可计算出波长。

实验报告中需附上 Origin 或 Matlab 的拟合图。

③验证色散关系：由 4 组固有频率  $\omega_k$ （即激励信号频率）及求得的波数  $k$ ，利用（25）式做直线拟合，验证色散关系。

由拟合结果可求得  $\omega_p$  和  $\omega_s$ 。与 B.2 题计算的  $\omega_p$  和  $\omega_s$  参考值相比较。

## 仪器使用说明

### 1. 设置信号源

将信号源波形设置为正弦波，频率设置待测固有频率，幅度设置为  $200 \text{ mVpp}$ （该幅度值在整个实验过程中保持不变）、偏置为  $0 \text{ mV}$ 。按下信号源“Out1”上方的“On/Off”按钮使其变亮，使信号源输出信号。

2. 按下耦合摆实验仪上的“激励开关”按钮，使其处于打开状态。调整“励磁电流”旋钮，使耦合摆的振动达到稳定振动状态，能够明显观察到摆球的振动且所有摆球的最大振幅不超过约  $1 \text{ cm}$ 。

### 3. 设置示波器

关闭“VERTICAL”区域的“MATH”按钮，打开“CH2”按钮，使“CH1”和“CH2”均处于打开状态，其中“CH1”为 PSD 测试的摆球振动信号，“CH2”为耦合摆实验仪的激励信号。

分别调整示波器“VERTICAL”和“HORIZONTAL”区域的“SCALE”旋钮和“POSITION”旋钮，使

屏幕显示合适的波形，即示波器两个通道的波形在水平方向约为3~6个周期，在垂直方向上幅度尽量大但不出屏范围。

用示波器的自动测量功能测试所需的信号：按示波器“MENU”区域的“Measure”按钮，选择需测试的信源及被测量（使用屏幕右侧的按钮或示波器的多功能旋钮进行设置）。

4. 沿导轨缓慢移动位置探测器 PSD，依次测量每个摆球的幅度（记录示波器峰峰值 Vpp）及其正负号。同时注意观察示波器显示的摆球的振动频率，应与信号源的激励信号频率相同。

### 三角函数拟合说明

#### 1. Origin 程序拟合说明（以 OriginPro 8.5 为例）

打开 Origin 程序，在表格中输入拟合数据，第 1 列为自变量，第 2 列为因变量。

选中输入的两列数据，点击“Analysis”->“Fitting”->“Nonlinear Curve Fit...”，在弹出的窗口中选择“Setting”->“Function Selection”->“Category->Waveform”->“Function->Sine”，点击“Fit”，完成拟合。

记录拟合结果页中的参数值（Parameters 区域的  $y_0$ 、 $x_c$ 、 $w$  和  $A$ ）。双击“Fitted Curves Plot”下侧的拟合图，把图片放大。复制图片（点击菜单“Edit”->“Copy Page”），把图片粘贴在实验报告中。

Origin 使用的三角函数拟合模型是：

$$y = y_0 + A \sin\left(\pi \frac{x - x_c}{w}\right)$$

由拟合结果可计算波数  $k (= \pi/w)$  和波长  $\lambda$ 。

#### 2. Matlab 程序拟合说明

在 Matlab 主程序中输入拟合数据， $x = [0 1 2 3 4 \dots]$ ， $y1 = [\dots]$ ， $y2 = [\dots] \dots$ （可以把多组待拟合的因变量数据  $y1$ 、 $y2 \dots$  全部录入）。

点击菜单“APP”->“Curve Fitting”，在弹出的“Curve Fitting Tool”窗口中：“X data”选择“x”，“Y data”选择“y1”，点击右侧上方下拉菜单，选择“Sum of Sine”作为拟合模型，“Number of terms”为“1”，完成拟合。

记录“Results”拟合结果区域的参数值  $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c_1$ 。复制右侧的拟合图，把图片粘贴在实验报告中。

Matlab 使用的三角函数拟合模型是：

$$y = a_1 \sin(b_1 x + c_1)$$

由拟合结果可计算波数  $k (= b_1)$  和波长  $\lambda$ 。

### C) 耦合摆的通带以及带外频率的波的振动特性

由色散关系可知，耦合摆的固有频率存在下限和上限：

1. 下限频率  $\omega_{min} = \omega_p$ ，对应的波长为无穷大。
  2. 上限频率  $\omega_{max} = \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\pi \frac{N-1}{2N}\right)}$ 。当  $N$  较大时， $\omega_{max} \approx \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2}$ 。对应的波长  $\lambda = \frac{2N}{N-1} \approx 2$ 。即耦合摆中传播的振动的最小波长为 2 个摆球间距。波长小于两个摆球间距的振动在物理上是无意义的。
  3. 耦合摆的通带，即允许传播的振动的频率范围为  $\omega_{min} \sim \omega_{max}$ ，带宽为  $\Delta\omega = \omega_{max} - \omega_{min}$ 。
- 本部分将分析并测试通带外的振动在耦合摆中的传播。

由(25)式的色散关系可得：

$$\sin^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{4\omega_s^2}$$

由  $\sin^2 \theta = (1 - \cos(2\theta))/2$ ，可得：

$$\cos k = 1 + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega_s^2} \stackrel{\text{def}}{=} C \quad (26)$$

在耦合摆通带之外，当  $\omega < \omega_{min} (= \omega_p)$  时，由 (26) 式可得  $\cos k > 1$ ；当  $\omega > \omega_{max} (= \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2})$  时，可得  $\cos k < -1$ 。即在耦合摆通带之外， $k$  无实数解，必然是复数。

设  $k = k_{Re} + ik_{Im}$ ，其中  $k_{Re}$  和  $k_{Im}$  为实数、分别是  $k$  的实部和虚部，且  $k_{Im} \neq 0$ （因为在耦合摆通带之外， $k$  无实数解，必然是复数，所以虚部不为 0）。

由欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  可得：

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{ii\theta} - e^{-ii\theta}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^\theta}{2i} = i \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = i\sinh\theta \quad (27)$$

$$\cos(i\theta) = \frac{e^{ii\theta} + e^{-ii\theta}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^\theta}{2} = \cosh\theta \quad (28)$$

则：

$$\begin{aligned} \cos k &= \cos(k_{Re} + ik_{Im}) \\ &= \cos k_{Re} \cos(ik_{Im}) - \sin k_{Re} \sin(ik_{Im}) \\ &= \cos k_{Re} \cosh k_{Im} - i \sin k_{Re} \sinh k_{Im} \end{aligned} \quad (29)$$

虽然  $k$  为复数，但由 (26) 式可知， $\cos k = 1 + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega_s^2}$  必须为实数。因而， $k_{Re}$  和  $k_{Im}$  应取适当的值，使得  $\sin k_{Re} \sinh k_{Im} = 0$ 。由  $k_{Im} \neq 0$  可知  $\sinh k_{Im} \neq 0$ ，因而必然有  $\sin k_{Re} = 0$ ，则：

$$k_{Re} = 0, \pm m\pi \quad (m \text{ 为自然数}) \quad (30)$$

由于  $k = k_{Re} + ik_{Im}$  为复数，(21) 式可写为：

$$x_\kappa(n, t) = A_\kappa e^{i(\omega t - kn + \varphi_0)} = A_\kappa e^{k_{Im}n} e^{i(\omega t - k_{Re}n + \varphi_0)} \quad (31)$$

该式表明，对于耦合摆通带之外的振动，随着摆球序号  $n$  的增加，各个摆球的幅度以指数规律  $e^{k_{Im}n}$  变化，且相位变化的周期即波长为：

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_{Re}} = \frac{2\pi}{\pm m\pi} = \pm \frac{2}{m} \quad (\text{当 } m \neq 0 \text{ 时}) \quad (32)$$

由于耦合摆中可传播的振动的最小波长为 2 个摆球间距，小于两个摆球间距的波在物理上无意义，因而  $m$  只能取 1，即：

$$k_{Re} = 0, \pm \pi \quad (33)$$

(1) 当  $k_{Re} = 0$  时，由 (29) 式可知：

$$\cos k = \cosh k_{Im} = \frac{e^{-k_{Im}} + e^{k_{Im}}}{2} \geq 1 \quad (34)$$

再由 (26) 式即  $\cos k = 1 + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega_s^2} \stackrel{\text{def}}{=} C$  式可知， $\cos k \geq 1$  对应于  $\omega \leq \omega_p$ ，即频率低于通带时的情况。

由  $\cos k = \cosh k_{Im} = (e^{-k_{Im}} + e^{k_{Im}})/2 = C$ ，可解得：

$$e^{k_{Im}} = C \pm \sqrt{C^2 - 1} \quad (35)$$

代入 (31) 式可得：

$$x_\kappa(n, t) = A_\kappa e^{k_{Im}n} e^{i(\omega t - k_{Re}n + \varphi_0)} = A_\kappa \left( C - \sqrt{C^2 - 1} \right)^n e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (36)$$

上式中舍去了  $e^{k_{Im}} = C + \sqrt{C^2 - 1}$ 、振幅随着  $n$  的增加而增大的解。因而当  $\omega \leq \omega_p$  时，各摆球同步（同相位）振动，振幅随着  $n$  的增加而衰减。并且可以证明频率越低，振幅随  $n$  的增大而衰减越快。

(2) 当  $k_{Re} = \pm \pi$  时，由 (29) 式可知：

$$\cos k = -\cosh k_{Im} = -\frac{e^{-k_{Im}} + e^{k_{Im}}}{2} \leq -1 \quad (37)$$

再由(26)式 $\cos k = 1 + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega_s^2} \stackrel{\text{def}}{=} C$ 式可知, 当 $\cos k \leq -1$ 时, 对应于 $\omega \geq \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2} = \omega_{max}$ , 即频率高于通带时的情况。

由 $\cos k = -\cosh k_{Im} = -(e^{-k_{Im}} + e^{k_{Im}})/2 = C$ , 可解得:

$$e^{k_{Im}} = -C \pm \sqrt{C^2 - 1} \quad (38)$$

代入(31)式可得:

$$x_k(n, t) = A_k e^{k_{Im} n} e^{i(\omega t - k_{Re} n + \varphi_0)} = A_k \left(-C - \sqrt{C^2 - 1}\right)^n e^{i(\omega t - n\pi + \varphi_0)} \quad (39)$$

注意上式中舍去了 $e^{k_{Im}} = -C + \sqrt{C^2 - 1}$ 、振幅随着 $n$ 的增加而增大的解。因而当 $\omega \geq \omega_{max}$ 时, 相邻摆球之间的相位差为 $\pi$ 、即反相, 并且各个摆球的振幅随着 $n$ 的增加而衰减。还可以证明频率越高, 振幅随 $n$ 的增大而衰减越快。

由以上分析可知, 耦合摆相当于一个带通滤波器, 只有频率处于 $\omega_p \leq \omega \leq \omega_{max}$ 之间的振动才可以在(理想无阻尼的)耦合摆中(无衰减地)传输, 通带频率以外的振动随着波向前传输而逐渐衰减。

C.1 选取低于通带下限频率 $\omega_{min}(= \omega_p)$ 的1个频率(建议该频率高于0.6 Hz, 因为频率太低时, 振幅衰减快、摆动的摆球数量少), 对耦合摆0号摆球施加激励信号, 观察振动在摆链中的传播情况, 测试各个摆球的振幅。

画出摆球振幅—摆球序号关系图, 利用(36)式做直线拟合求出衰减系数 $C - \sqrt{C^2 - 1}$ , 再计算出 $C$ 的实验值。

由(26)式计算 $C$ 的参考值(其中 $\omega_p$ 和 $\omega_s$ 使用B.3③题的拟合结果), 并与实验值相比较。

#### D) 考虑阻尼时的振动情况

实际的耦合摆由于空气阻尼、摩擦等原因, 存在阻力作用。设阻力与速度成正比, 比值为阻尼系数 $\gamma$ , 即 $F = -\gamma \frac{dx_i}{dt}$ 。对于无限长耦合摆, (23)式所示动力学方程可改写为:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{g}{L} x_i - \frac{K}{m} (x_i - x_{i-1}) - \frac{K}{m} (x_i - x_{i+1}) - \frac{\gamma}{m} \frac{dx_i}{dt} \quad (40)$$

令 $\gamma/m = 2\beta$ , 整理可得:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_i}{dt} + \omega_p^2 x_i = \omega_s^2 (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \quad (41)$$

在弱阻尼、即 $\beta \ll \omega_p$ 和 $\beta \ll \omega_s$ 时, 求解无限长耦合摆的动力学方程, 可得:

$$x_k(n, t) = A_n e^{-\beta t} e^{i(\omega_k t - kn + \varphi)} \quad (42)$$

与无阻尼情况相比, 方程增加了一项时间衰减因子 $e^{-\beta t}$ 。

将(42)式代入(41)式, 可得体系的色散关系为:

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \beta^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (43)$$

#### 参考文献

1. 费曼, 莱顿, 桑兹著. 郑永令, 华宏鸣, 吴子仪等译. 费曼物理学讲义 新千年版, 第一卷第21章. 上海科学技术出版社. 2020. (英文版链接: [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_21.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html))
2. 费曼物理学讲义 新千年版, 第一卷第49章. 上海科学技术出版社. 2020.

3. M. Suzuki and I.S. Suzuki. Lecture Note on Oscillation and Waves. Department of Physics, State University of New York at Binghamton, Binghamton, New York 13902-6000, U.S.A.  
[https://bingweb.binghamton.edu/~suzuki/pdffiles/Oscillation\\_and\\_Waves\\_Note.pdf](https://bingweb.binghamton.edu/~suzuki/pdffiles/Oscillation_and_Waves_Note.pdf)

## II-6 迈克耳孙干涉仪

说明：本讲义针对 Thorlabs 教学套件，面向基础物理实验课程，主要在文献[1][2]的基础上编写。  
王宇航执笔，郭旭波审校。

### 1. 引言

迈克耳孙干涉仪是美国物理学家迈克耳孙于 1881 年发明的精密光学仪器。1887 年，迈克耳孙和莫雷利用该干涉仪的实验结果否认了“以太”的存在，直接导致了狭义相对论的诞生。1907 年，迈克耳孙因为“发明光学干涉仪并使用其进行光谱学和基本度量学研究”而成为美国第一个诺贝尔物理学奖获得者。由于其简单的结构和优异的精度，100 多年以来迈克耳孙干涉仪的基本原理、结构设计和用途得到了大量的讨论、优化和发展。本次实验将采用最基本的光学元件自主搭建迈克耳孙干涉仪，力图排除复杂的理论与技术细节，展示迈克耳孙干涉仪的核心物理思想。

### 2 实验目的

- (1) 了解迈克耳孙干涉仪的基本原理和结构；
- (2) 学会使用基本光学元件自主搭建迈克耳孙干涉仪；
- (3) 观察迈克耳孙干涉仪的常见工作模式；
- (4) 利用迈克耳孙干涉仪测量准单色光波长和相干长度。

### 3. 实验原理

#### 3.1 迈克耳孙干涉仪的基本原理

迈克耳孙干涉仪的基本结构如图 1(a)所示。 $M_1$  和  $M_2$  为相互垂直的平面镜。BS 是一个半透半反的平面镜，称为分束镜(Beam splitter)。它可以将入射光分为强度几乎相等的两束。分束镜与  $M_1$  和  $M_2$  的夹角均为  $45^\circ$ 。为简单起见，首先考虑正入射平面波(平行光束)的情况。如图 1(a)所示，光源 S 向左发出的一束平行光在分束镜分为反射光束 1 和透射光束 2 两束光。反射光束 1 垂直入射于平面镜  $M_1$ ，被  $M_1$  反射后回到分束镜，并部分地透过分束镜，到达屏幕。透射光束 2 垂直入射于平面镜  $M_2$ ，被  $M_2$  反射后回到分束镜，并部分地被分束镜反射，到达屏幕。在屏幕的同一位置，两束光相互叠加，发生干涉。而在光学中我们已经知道，光强均为  $I_0$  的两束光相干叠加后的光强(平均能流密度)为

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi) \quad (1)$$

也即屏上的实际光强由 1、2 两束光的相位差  $\Delta\varphi$  决定。而相位差则由光程差  $\Delta s$  决定。<sup>1</sup>

容易看出，光束 1、2 在光源→BS、以及 BS→屏幕的这两段路径上完全重合。这部分路径上两束光光程相等。而在 BS→ $M_1$ →BS 和 BS→ $M_2$ →BS 这两段路径上，光束 1、2 的光程可能不相等。假设 BS 到  $M_1$  的距离为  $L_1$ ，经过介质的折射率为  $n_1$ ；BS 到  $M_2$  的距离为  $L_2$ ，经过介质的折射率为  $n_2$ 。则到达光屏的 1、2 光束之间的光程差为

$$\Delta s = 2(n_2 L_2 - n_1 L_1) \quad (2)$$

相应的相位差为

<sup>1</sup> 简单起见，这里暂未考虑光线反射时可能的半波损失，以及 BS 玻璃基底对光程的影响。

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s \quad (3)$$

因此，当一个支路的光程连续变化时，屏上的光强将发生周期性明暗变化。例如，取折射率  $n=1$  时，当反射镜  $M_1$  或  $M_2$  沿着光线方向每移动半个波长，就发生一次明暗变化（即干涉条纹移动一个条纹）。可见光的波长仅为数百 nm，因此利用迈克耳孙干涉仪可以精确测量物体的微小位移。再比如，当 1 或 2 支路的介质折射率改变时，屏上的光强也将变化。由此可以测量介质折射率的微小变化。

本实验中的光路完全在空气中，以下我们设定  $n_1=n_2=1$ 。

**思考题 1** 由(1)式可知，当调节到相位差  $\Delta\phi=\pi$  时，屏幕光强为 0。那光源入射的那些光的能量去哪了？

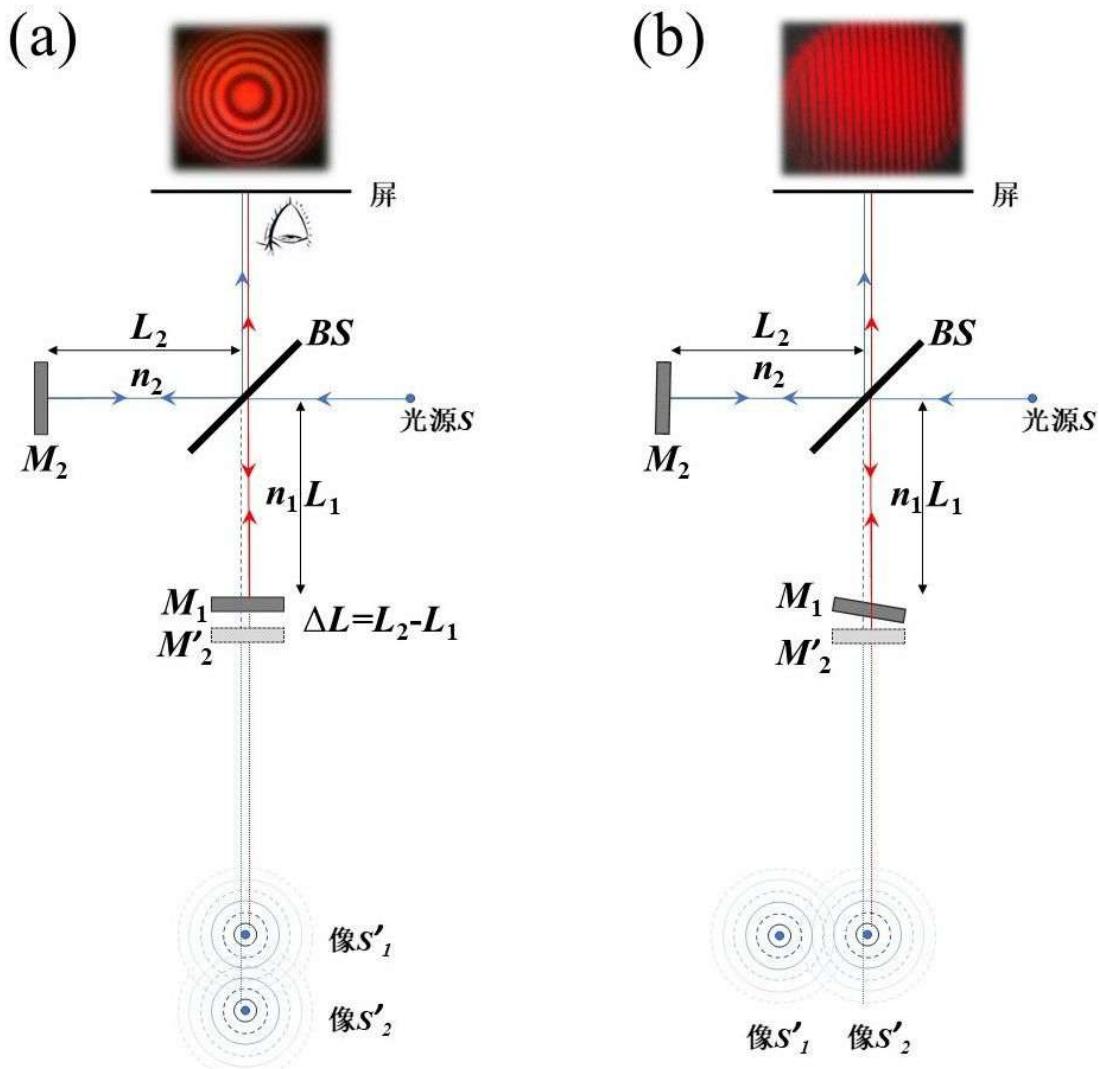


图 1. 迈克耳孙干涉仪原理图。图(a)为等倾干涉，图(b)为等厚干涉

### 3.2 点光源的等倾干涉与光波长测量

上述使用平行光源照射时，屏幕上被光照亮的全部区域光强相同，看不到明暗相间的干涉条纹，不利于观察。常使用点光源代替平行光源，可在屏上产生干涉条纹。点光源发出的是球面波，光线以点光源为中心向各个方向辐射。因此，光线并不一定垂直入射于平面镜  $M_1$  和  $M_2$ ，而是以不同的入射角  $\theta$  入射。由于分束镜 BS 和  $M_1$ 、 $M_2$  均为平面镜，可以利用平面镜成像的方法简化点光源干涉模型。如图 1(a)所示，若观察者站在屏的位置向  $M_1$  方向看去，除了透过分束镜看到对面的反射镜  $M_1$  以外，还会看到分束镜中  $M_2$  的像  $M_2'$ 。且  $M_1$  与  $M_2'$  平行，它们之间存在一层空气隙。此时屏上接收到的 1、2 两束光线好像是同一点光源 S 的光经  $M_1$  与  $M_2'$  两个平面镜分别反射而来。此时问题转化为我们所熟悉的点光源的（空气）薄膜等倾干涉问题，等效光路图如图 2 所示。点光源 S 发出的一束光线以入射角  $\theta$  经平行平面镜  $M_1$  和  $M_2'$  分别反射。形成的 1、2 两束反射光线之间的光程差为

$$\begin{aligned}\Delta s &= AB + BC - AD \\ &= \frac{\Delta L}{\cos \theta} + \frac{\Delta L}{\cos \theta} - 2\Delta L \tan \theta \sin \theta \\ &= 2\Delta L \cos \theta\end{aligned}\quad (4)$$

由(4)式可以看出，当  $M_1$  与  $M_2'$  的距离  $\Delta L$  固定时，同一个入射角  $\theta$  的光线反射后具有相同的光程差，投射在屏幕上形成同级别的干涉环。不同级别的干涉环角度不同，在屏上投出一系列同心圆环(如图 1(a)所示)。入射角  $\theta$  越大的圆环半径越大，光程差越小，级别越低。而越靠近圆心的级别  $k$  越高。圆心处的光程差

$$\Delta s = 2\Delta L = k\lambda \quad (5)$$

级别最高。若移动  $M_2$  使  $\Delta L$  增大，圆心的干涉级别  $k$  越来越高，原来级别的干涉环向外移动，就会观察到圆环从圆心一个个“冒”出来。反之，若  $\Delta L$  减小，则圆环一个个地向圆心“缩”回去。实验中若能测出  $M_2$  移动的距离  $d$  和冒出圆环数  $\Delta k$ ，即可求出入射光波长

$$\lambda = \frac{2d}{\Delta k} \quad (6)$$

值得注意的是，图 2 所示的点光源的等倾干涉原理图中，1、2 两束光线并不重合且相互平行。在有限远的屏幕上，它们是不可能交叠而发生干涉的。实际上，它们的稳定干涉图样定域于无穷远处。通常情况下，只有在屏幕前放置凸透镜，才能将同一角度的平行光会聚到焦平面的同一点上，从而观察到干涉条纹。由于眼睛的晶状体就是凸透镜，如果用眼睛代替屏幕直接观察平面镜的反射光，即可看到干涉图样。像这样，相干光叠加区只有特定位置才能观察到干涉图样的情况，称为定域干涉。

实际上，若以点光源照明，相干光叠加区的任意位置均存在稳定的干涉图样，称为非定域干涉。我们可以将点光源迈克耳孙干涉实验进一步简化。如图 1(a)所示，利用平面镜反射成像规则，可以画出点光源 S 在平面镜  $M_1$  和  $M_2'$  中的像  $S_1'$  和  $S_2'$ 。此时，所有空间的干涉

光场均可以视为仅来自  $S'_1$  和  $S'_2$  两个点光源。由干涉原理可知，空间中到  $S'_1$  和  $S'_2$  两个点的距离之差为常数的点，具有相同的相位差，是同一年级干涉条纹。因此，同一年级干涉条纹是以  $S'_1$  和  $S'_2$  两个点为焦点，以  $S'_1$  和  $S'_2$  连线为转轴的一个旋转双曲面。而不同级别的干涉条纹则构成一系列的旋转双曲面族，如图 3 所示。对于等倾干涉的情况，相当于垂直于  $S'_1$  和  $S'_2$  连线放置了一个平面接收屏。屏幕切割旋转双曲面族即得到一系列同心圆环。在本实验中，屏幕、点光源  $S$  与  $M_1$ 、 $M'_2$  距离很远（远场条件），而  $M_1$  和  $M'_2$  距离很近（薄膜）。图 2 中 1、2 两束光线距离无限接近，可近似看作交叠。此时，图 2 与图 3 分析方法得到的等倾干涉图样趋于一致。

**思考题 2** 如果不是用点光源，而是用扩展光源（比如面光源），还能否产生非定域干涉？

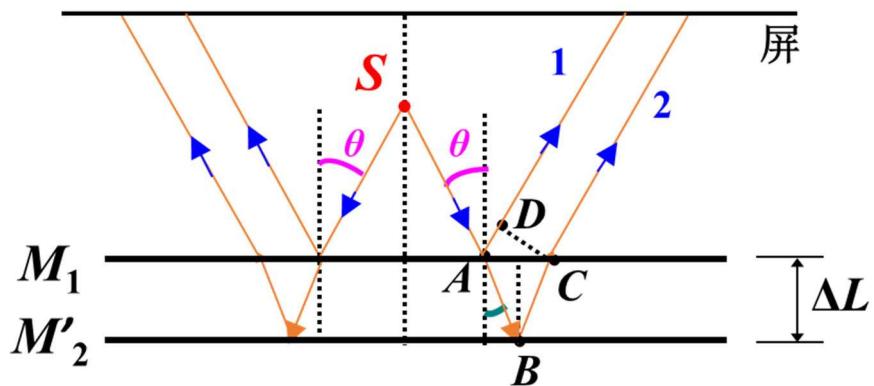


图 2. 等倾干涉的等效光路图

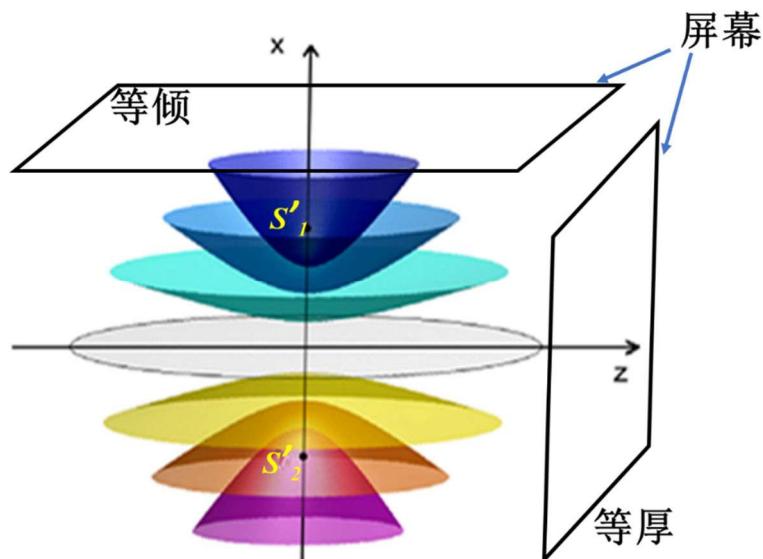


图 3. 2 个点光源在空间形成的干涉图样为一系列旋转双曲面

### 3.3 等厚干涉

在 3.2 的讨论中, 我们以  $M_2$  的像  $M_2'$  代替  $M_2$ , 与  $M_1$  构成上下表面平行的空气薄膜。将问题简化为了薄膜等倾干涉问题。利用迈克尔逊干涉仪也可以展示薄膜等厚干涉图样。将实验装置中的反射镜  $M_1$  转动一个小的角度  $\alpha$ , 则  $M_1$  和  $M_2'$  不再平行, 如图 1(b) 所示。此时  $M_1$  和  $M_2'$  构成了一个上下表面不平行, 厚度  $\Delta L$  不均匀的楔形空气薄膜。这正对应了普通物理中所熟悉的劈尖等厚干涉的模型。当点光源  $S$  较远时, 空气劈尖上不同位置的入射角  $\theta \approx 0^\circ$  近似相等。根据(4)式可得光程差

$$\begin{aligned}\Delta s &= 2\Delta L \cos \theta \\ &= 2\Delta L \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &\approx 2\Delta L \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \\ &= 2\Delta L - \Delta L \theta^2\end{aligned}\tag{7}$$

在  $M_1$  和  $M_2'$  的交线附近,  $\Delta L \approx 0$ , 光程差  $\Delta s \approx 2\Delta L$  仅与劈尖厚度有关, 产生的干涉条纹为直条纹。而在远离交线处,  $\Delta L$  比较大,  $\Delta L \theta^2$  不可忽略。此时干涉条纹变弯, 突向中央条纹。

等厚干涉同样可以用双点光源干涉的模型分析。如图 1(b) 所示,  $M_1$  镜的转动将使点光源的像  $S_1'$  向左移动。此时像  $S_1'$  和  $S_2'$  的左右距离较大, 而上下距离很小, 近似横向面对屏幕。此时  $S_1'$  和  $S_2'$  两个点光源与屏幕的几何关系, 就如同在图 3 的光场中, 作一个平行于  $S_1'$  和  $S_2'$  连线的平面。如图 3 所示, 这个屏幕平面切旋转双曲面族, 得到的中央干涉条纹为直线, 上下两侧远离中央的条纹弯曲, 与上段的分析结果一致。此外, 从图 3 中很容易看出, 点光源等厚干涉的光路实际上就是杨氏双缝干涉的光路。

### 3.4 相干长度的测量

以上讨论均基于波长为  $\lambda$  的单色光。而实际上绝对的“单色光源”是不存在的。实验室使用的所谓“单色光源”是以某波长  $\lambda_0$  为中心, 包含一定波长范围的光, 称为准单色光。准单色光的光谱可由光强-波长曲线, 即  $I-\lambda$  曲线表示 (如图 4(a) 所示)。中心波长为  $\lambda_0$  的单色光成分强度最强, 波长  $\lambda$  偏离中心波长  $\lambda_0$  时, 强度迅速减小。其中, 强度等于最大强度一半的波长范围  $\Delta\lambda$  称为谱线宽度。在发生干涉时, 每个波长成分的单色光都产生自己的干涉条纹。图 4(b) 展示了准单色光发生干涉时, 最大波长(带撇)、最小波长(不带撇)单色光强随光程差的变化关系(下图), 以及总的干涉光强随光程差的关系(上图)。对于同一个光程差  $\Delta s$ , 有的波长产生明纹, 有的产生暗纹。总的光强是各条纹的非相干叠加。如图 4(b) 所示, 随着光程差  $\Delta s$  增加, 干涉对比度变小。可以认为, 波长为  $\lambda_0 + \Delta\lambda/2$  成分的  $k$  级明纹与  $\lambda_0 - \Delta\lambda/2$  成分的  $k+1$  级明纹重合的光程差, 就是干涉条纹彻底消失的临界光程差:

$$\Delta s_c = \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)k = \left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)(k+1)\tag{8}$$

考虑到  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ , 可得

$$\Delta s_c = \lambda_0 k = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \quad (9)$$

只有在光程差小于此临界光程差  $\Delta s_c$  时才能观察到干涉条纹。 $\Delta s_c$  被称为光源的相干长度。

本实验中, 可移动  $M_2$  镜使干涉条纹消失, 通过  $M_2$  镜的移动距离估算相干长度。

**思考题 3** 如果光源中的波长成分不是按图 4(a)所示连续分布, 而是仅包含波长为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  两个等强度的单色光, 连续移动  $M_2$  镜时, 总光强随光程差的变化会如何?

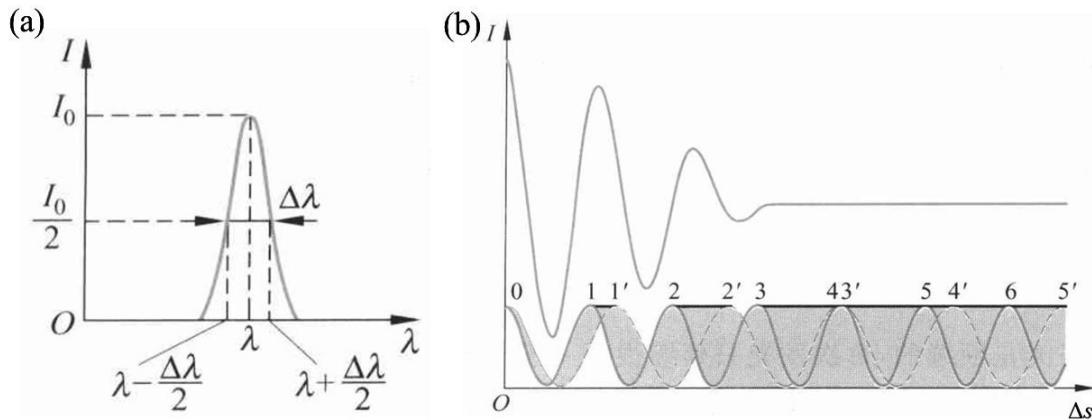


图 4. (a) 准单色光的光谱及其谱线宽度; (b) 准单色光中最大与最小波长成分干涉强度(上), 以及总干涉光强(下)与光程差的关系<sup>[6]</sup>

#### 4. 实验内容与步骤

##### 4.1 实验仪器及光学元件

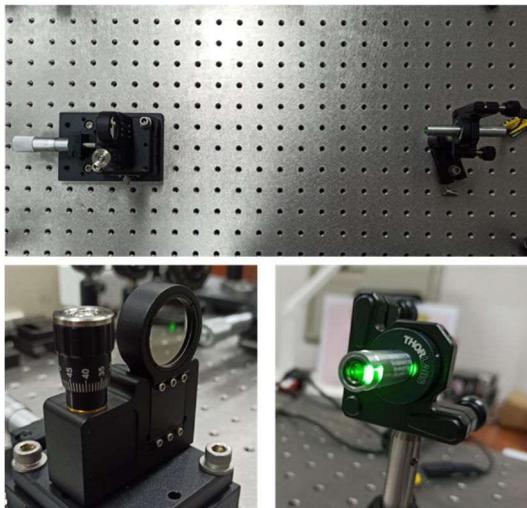


图 5. 实验仪器及组件

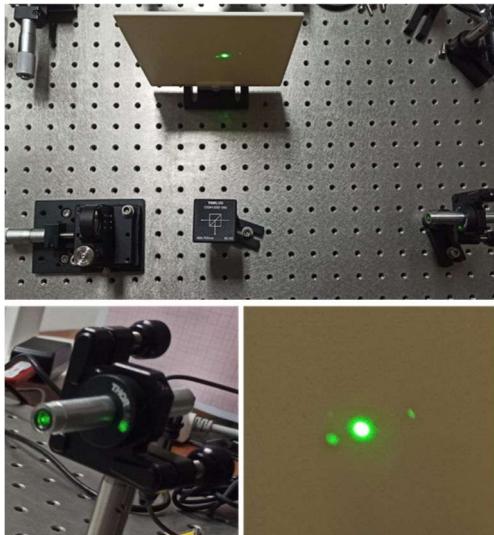
- (1) 可移动反射镜 M<sub>2</sub> 组件:本组件已组装好,并固定于光学平台上。水平银白色长旋钮为粗调旋钮,用于快速平移 M<sub>2</sub> 镜使 1、2 两光路光程近似相等。竖直黑色旋钮为细调旋钮,用于精确平移 M<sub>2</sub> 镜并读取位移。其中,细调旋钮的读数方法为:每旋转一圈平移 50μm;每圈分 50 小格;对应每小格平移 1μm。同时,应估读到 0.1μm 小数位。
- (2) 激光器:中心波长约 532nm,光谱主峰存在约 0.1nm 的劈裂。开启电源即亮。
- (3) 分束镜:为固定于立方体外壳中的分束棱镜。光线入射及出射方向已在外壳顶面标出。
- (4) 屏幕:为白色漫反射光屏,用于显示干涉条纹。
- (5) 反射镜 M<sub>1</sub>:反射镜固定于二维镜架上,不可平移。但可以独立调节俯仰角(上下方向)和偏摆角(左右方向)。
- (6) 凸透镜:焦距 50mm 双凸透镜。用于放置在激光器前,将激光会聚到焦点后再发散射出,从而将平行光源变为点光源。
- (7) 发光二极管:配备了红光(中心波长 639nm) LED 和白光 LED,由 micro-USB 供电。可近似看作点光源。
- (8) 直流电源:将 220V 交流转换为 5V 直流,通过 USB 口输出,为激光器和 LED 供电。

#### 4.2 迈克耳孙干涉仪的搭建

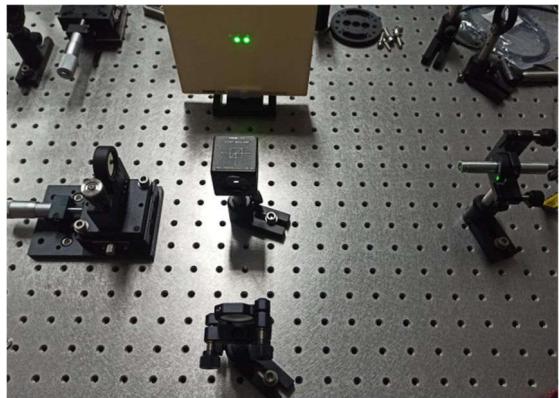
① 将反射镜 M<sub>2</sub> 的粗调和细调旋钮旋至居中位置附近。将激光器置于 M<sub>2</sub> 镜对面。激光器距 M<sub>2</sub> 镜的距离参考右图。开启激光器并调整激光器的角度和位置,使激光光斑位于 M<sub>2</sub> 镜的中心附近,同时使反射激光正好射入激光器发射孔。



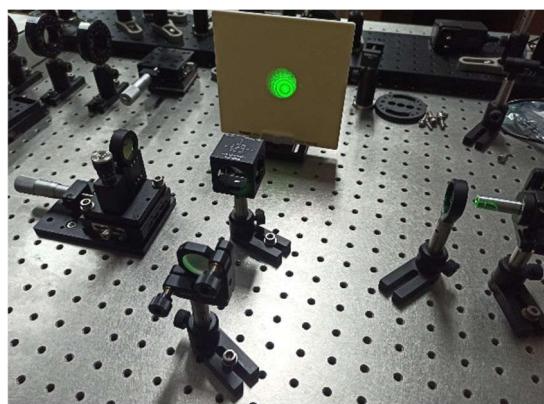
② 按如图位置放置分束镜和屏幕。调整分束镜的位置和角度,使入射激光大致穿过分束镜中心;同时,从分束镜入射面(右表面)反射回激光器的光斑刚好落在激光发射孔。这样,可保证光线正入射,分束角为 90°。此时,在屏幕上除了最亮的光斑外,还会有 2 个较暗的光斑,来自于分束镜和 M<sub>2</sub> 之间的多次反射,不影响实验。



③ 按如图位置放置反射镜  $M_1$ ，用刻度尺分别测量两个反射镜距分束镜的距离，使 1、2 两个光路的长度近似相等。这时在屏上将看到来自  $M_1$  和  $M_2$  的两个反射光斑。仔细调整  $M_1$  的角度和位置，使两个光斑完全重合！



④ 在激光器前方放置凸透镜，并微调其位置，将在屏上看到干涉圆环。若未出现干涉环，一般是因为  $M_1$  和  $M_2$  未完全垂直，可去掉凸透镜，重复步骤③，尽量使两个光斑重合。也可能是由于 1、2 光路光程差过大。可借助刻度尺再次确定  $M_1$  的正确位置。



#### 4.3 激光波长的测量

- ① 观察等倾干涉条纹：微调  $M_1$  角度旋钮，将干涉圆环的圆心调到屏幕视野中央。获得等倾干涉条纹。**拍摄等倾条纹并置于实验报告中。**
- ② 转动  $M_2$  粗调旋钮，使干涉圆环清晰可辨。转动  $M_2$  粗调或细调旋钮时，如干涉圆环的圆心偏离屏幕中央，需微调  $M_1$  镜角度旋钮，将干涉圆环的圆心调到屏幕中央。
- ③ 向同一个方向缓慢旋动细调旋钮，当观察到圆环显著“吐出”或“缩进”时，开始记录数据。持续沿同一方向转动细调旋钮，条纹中心每“吞吐”50 个条纹记一组数据，连续记录 10 组数据。利用最小二乘法通过（6）式计算激光器波长。

**表 1 激光器波长测量数据表**

变化条纹数 $\Delta k$	$M_2$ 位移 $d(\mu\text{m})$	变化条纹数 $\Delta k$	$M_2$ 位移 $d (\mu\text{m})$
0		250	
50		300	
100		350	
150		400	
200		450	

#### 4.4 LED 相干长度的测量

**LED 相干长度比激光短得多。观察 LED 的干涉条纹，关键是使 1、2 光路的光程差尽量小。**

- ① 快速转动  $M_2$  粗调旋钮，改变 2 光路长度  $L_2$ 。同时观察圆环吞吐情况，会发现向某个方向平移  $M_2$  时，圆环变粗；反向平移时，圆环变细。仔细调节  $M_2$  的细调旋钮使圆环尽量变得最粗。此时，中心条纹可能粗到覆盖整个可视范围。
- ② 微调  $M_1$  水平转角，使屏上圆心偏移一点点。这时在屏上出现较粗的条纹。这是等厚干涉条纹。拍摄等厚条纹并置于实验报告中。
- ③ 关闭激光器，(不要移动激光器的位置，后续实验步骤可能还需要使用激光来辅助调节)。将红色 LED 置于分束镜入射孔前方，向分束镜射入红光。缓慢调节  $M_2$  细调旋钮，并仔细观察，在屏上可见到红色 LED 光的干涉条纹。**拍照记录条纹。**
- ④ 小心转动  $M_2$  细调旋钮，先向某方向平移至干涉条纹完全消失。再向反方向平移至条纹刚刚出现，记录此时  $M_2$  位置  $d_1$ 。不改变运动方向，继续平移至条纹即将消失，记录此时  $M_2$  位置  $d_2$ 。则相干长度  $\Delta s_c = |d_2 - d_1|$ 。如此反复记录三组数据，计算红光 LED 的相干长度。并利用(9)式计算谱线宽度。

**表 2 红色 LED 相干长度测量数据表**

测量次数	条纹出现位置 $d_1(\mu\text{m})$	条纹消失位置 $d_2(\mu\text{m})$	相干长度 $\Delta s_c =  d_2 - d_1 $
1			
2			
3			

- ⑤ 将红色 LED 干涉条纹调至最清晰，小心将红色 LED 换为白光 LED。观察干涉条纹变为彩色。**拍照记录条纹。**
- ⑥ 重复④的测量过程，测量白光 LED 的相干长度。

**表 3 白光 LED 相干长度测量数据表**

测量次数	条纹出现位置 $d_1(\mu\text{m})$	条纹消失位置 $d_2(\mu\text{m})$	相干长度 $\Delta s_c =  d_2 - d_1 $
1			
2			
3			

#### 4.5 (选做) 测量激光器光谱的精细结构

本实验使用的激光器的光谱主峰存在约  $0.1\text{nm}$  的波长劈裂。即光谱成分中存在波长约  $532.0\text{nm}$  和  $532.1\text{nm}$  两个主要成分。这两个波长的光强度近似。请根据 3.4 的讨论，以及思考题 2 的提示，设计方法测量这两个光谱主峰的波长差。

提示：可以认为激光光谱只有这两个波长的光，没有其他波长的成分。当光程差连续增加时，干涉条纹会交替出现清晰-模糊-清晰的过程。

**思考题 4** 本实验中空程差是如何影响实验测量的，如何避免引入空程差？

### 5. 实验注意事项

- ① 不可用眼睛直视激光。
- ② 不可用手触碰光学元件的光学面。
- ③ 光学元件易碎，须小心轻拿轻放，不可撞击。
- ④ 本实验仪器非常敏感。须防止大的振动。

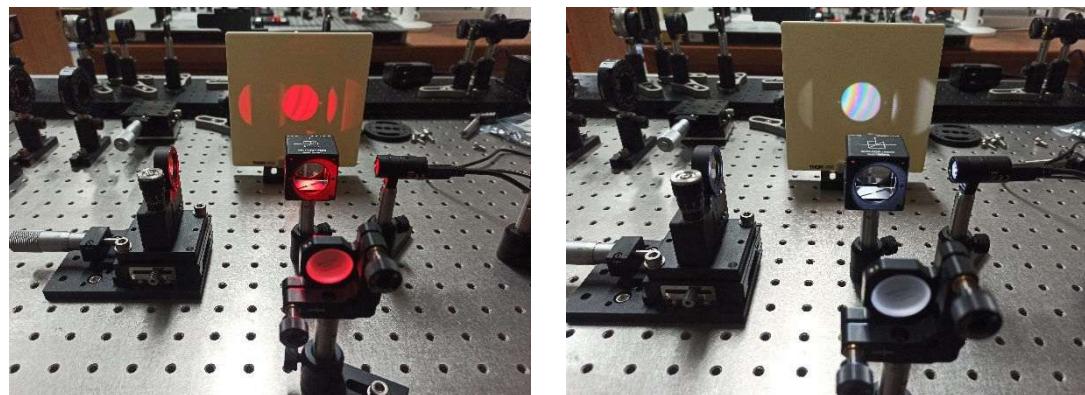
### 6. 实验后整理仪器

- ① 拆下本节课自行安装的各组件，并固定至光学平台右上角。
- ② 关闭激光器和 LED 电源。
- ③ **M<sub>2</sub> 反射镜组件不要拆掉！**
- ④ 将仪器摆放整齐，桌面清理干净，带走个人物品。

### 参考文献

- [1] 丁慎训，张连芳 主编，物理实验教程，清华大学出版社。
- [2] 吴平 主编，大学物理实验教程，机械工业出版社。
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson\\_interferometer](https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson_interferometer)。
- [4] 丁小冬，孙家林，迈克尔逊干涉仪的搭建及使用，实验讲义。
- [5] 张三慧 主编，大学物理学（第三版），清华大学出版社。
- [6] Thorlabs 公司 EDU-MINT2 实验仪器用户手册

附图：红光 LED 和白光 LED 的实验现象



## II-7 晶体学

(根据 2020 年国际物理奥林匹克竞赛实验试题改编)

### 1. 引言

晶体学实验从一维光栅出发，寻找衍射图样与晶体结构之间的对应关系，最后测定未知晶体的结构。实验内容几乎涵盖了通过衍射确定晶体结构的所有方面。

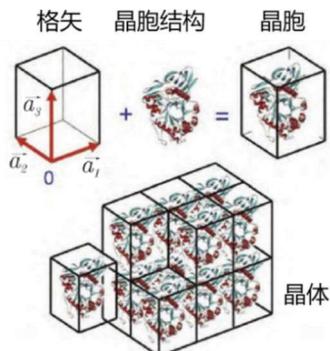


图 1 由晶胞周期性排列形成的晶体

如图 1 所示，晶体是指由 1 个基本单元（晶胞）在空间周期性排列形成的结构。设  $\rho(\mathbf{r})$  为描述晶体结构的实函数（例如晶体内原子的位置）， $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$  和  $\mathbf{a}_3$  为 3 个线性无关的矢量（称为晶格矢量，简称格矢，它们可以不互相垂直），那么整个晶体的结构符合下面的公式：

$$\rho(\mathbf{r} + e \cdot \mathbf{a}_1 + f \cdot \mathbf{a}_2 + g \cdot \mathbf{a}_3) = \rho(\mathbf{r}), \quad e, f, g \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

在一维或二维情况下，分别用 1 个 ( $\mathbf{a}_1$ ) 或 2 个晶格矢量 ( $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ ) 就足以描述晶体。晶体学实验的任务是确定晶体结构，也就是晶格矢量  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  和单个晶胞的结构  $\rho(\mathbf{r})$ 。

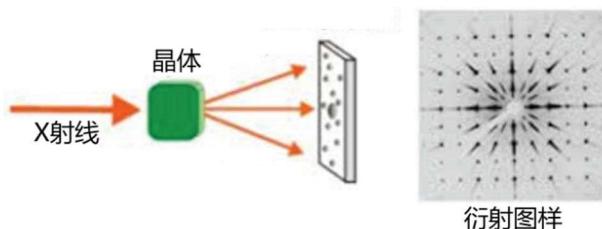


图 2 晶体学实验方案示意图

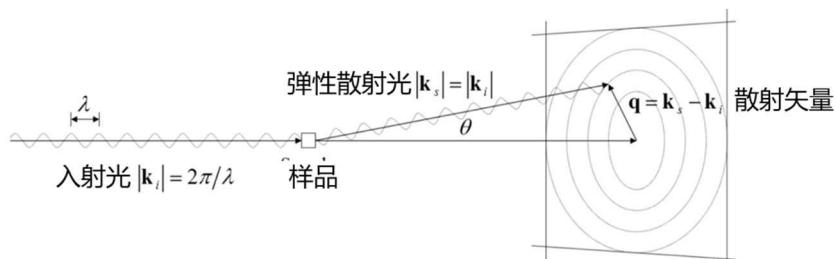


图 3 散射矢量示意图

由于晶体具有周期性，可以用衍射的方法来确定其结构（图 2）。如图 3 所示，强度为  $I_0$ 、波长为  $\lambda$ 、波矢为  $\mathbf{k}_i$  ( $|\mathbf{k}_i| = 2\pi/\lambda$ ) 的光垂直入射晶体样品。透过样品后的散射波可以用散射波矢  $\mathbf{k}_s$  或散射矢量  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  表示。对于弹性散射，散射和入射波矢的模相等， $|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_i|$ ，故有  $|\mathbf{q}| = 2k_i \sin(\theta/2)$ ，其中  $\theta$  为散射角。本

实验中可以认为 $\theta \ll 1$ , 且 $q \ll k_i$ 。

衍射光束的复振幅 $F(\mathbf{q})$ 称为结构因子, 它的模为 $|F|$ 、相位为 $\varphi$ :

$$F(\mathbf{q}) = |F| \exp(i\varphi) \quad (2)$$

测试到的衍射光强 $I(\mathbf{q})$ 是复振幅的模平方,  $I(\mathbf{q}) = |F|^2 = FF^*$ 。对测试到的衍射光强进行分析, 可得到晶体结构 $\rho(\mathbf{r})$ 。衍射射线的波长应与被研究的对象, 即晶体结构的尺度相关。如, 研究无机物(盐类或复杂的化合物)时, 晶体结构 $\rho(\mathbf{r})$ 描述了化合物中的原子位置。在这种情况下, 使用波长为1~10 Å的相干X射线。研究光学光栅时, 可使用可见光。

## 2. 实验目的

在A部分以衍射光栅(一维晶体)为例学习晶体衍射的基本规律。

在B、C和D部分分别确定未知晶体的晶格矢量、晶胞的对称性和晶胞结构细节。

## 3. 实验仪器

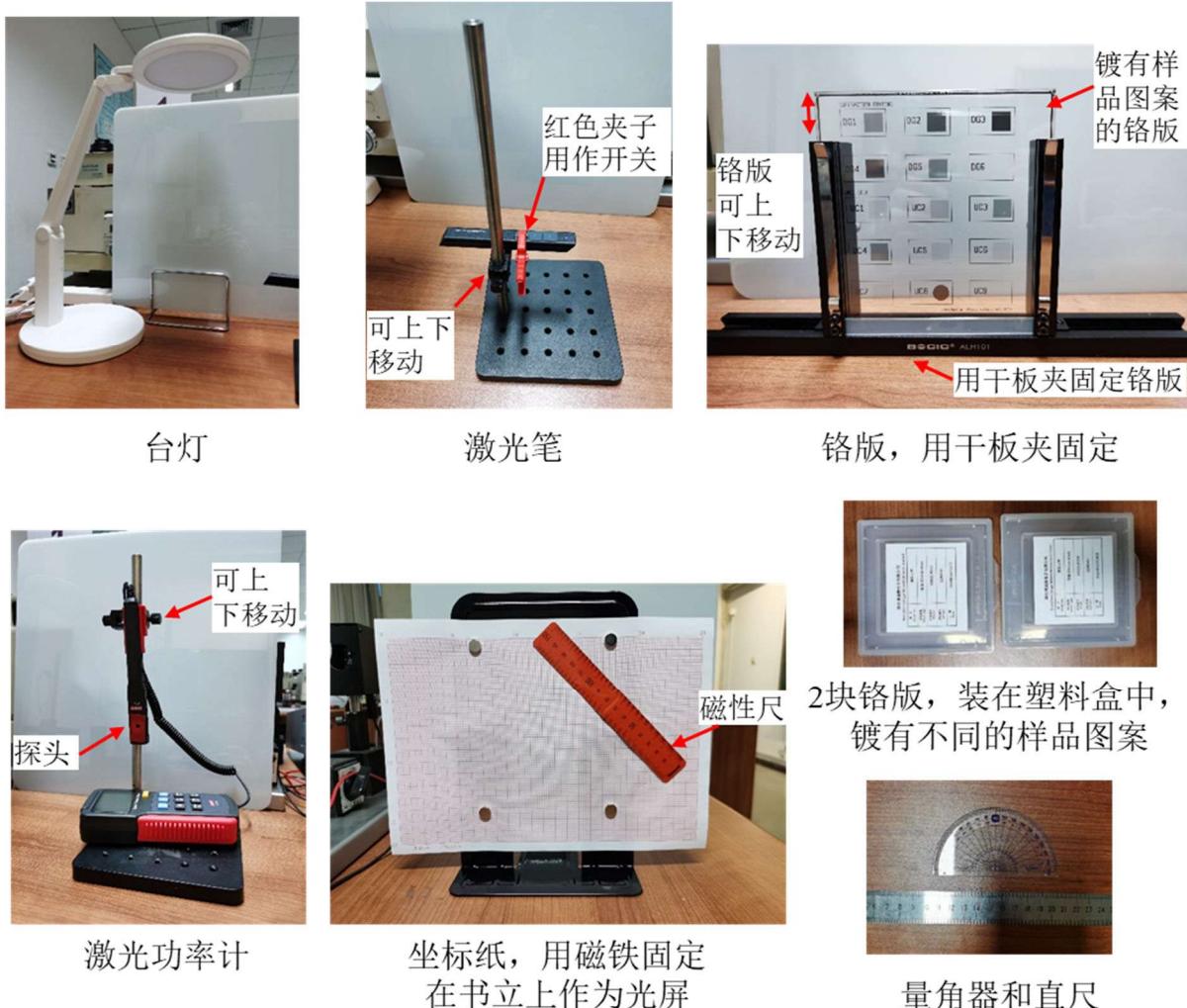


图4 实验仪器

### 实验注意事项:

**1. 注意激光安全。禁止直视激光, 禁止照射自己或同学。注意反射光的方向, 避免入眼造成伤害。每一部分操作结束、记录和分析数据时及时关闭激光笔。**

**2. 装有铬版的塑料盒较紧, 小心地打开, 避免铬版跌落。禁止触摸铬版上镀有图案的部分。**

#### 4. 实验原理与实验内容

##### A) 从狭缝到晶体

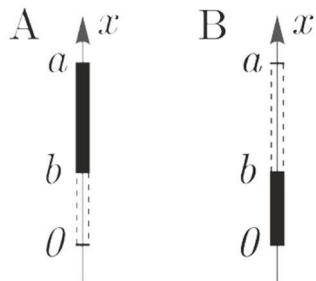


图 5 散射矢量示意图

衍射光栅是最简单的一维晶体。如图 5 所示，狭缝（虚线框透明部分）和狭缝间的区域（黑色不透明部分）构成晶胞，晶格矢量  $\mathbf{a}_1$  等于光栅常量  $a$ 。当观察光栅的夫琅禾费衍射时，光强与衍射角  $\theta$  的关系为：

$$I(\theta) = \frac{I_0}{N^2} \left[ \frac{\sin\left(\frac{N\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}} \right]^2 \quad (3)$$

其中  $I_0$  为  $\theta = 0$  时的光强， $N$  为被照射的光栅的狭缝数。

本实验使用散射矢量  $q = 2k_i \sin(\theta/2)$  代替衍射角  $\theta$ 。将 (3) 式进行变换可得：

$$I(q) = \frac{I_0}{N^2} \left[ \frac{\sin(Nqa/2)}{\sin(qa/2)} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(qb/2)}{qb/2} \right]^2 \quad (4)$$

由：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (5)$$

并结合 (4) 式，可得光栅常量为  $a$  的光栅的第  $h$  个衍射极大对应的散射矢量  $q$  为：

$$q = \frac{2\pi}{a} h, h \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

由 (6) 式可知，第 1 个衍射极大对应的散射矢量为  $q_1 = 2\pi/a$ ，第  $h$  个衍射极大的散射矢量可表示为：

$$q = q_1 h \quad (7)$$

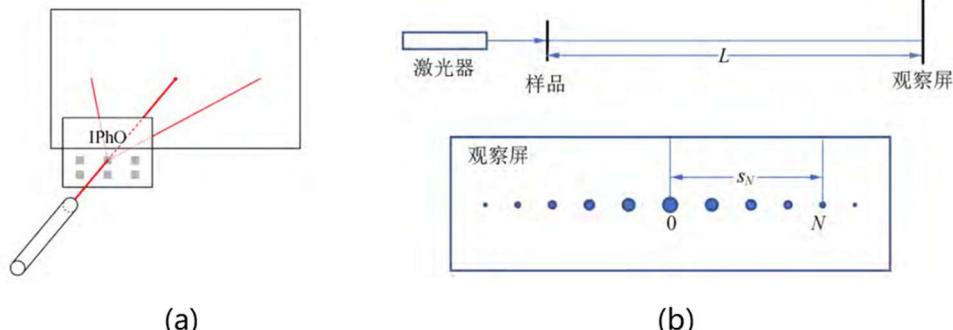


图 6 (a)激光笔、样品和观察屏放置示意图。(b)光栅（一维晶体）样品的衍射图样示意图

A.1 按照图(6)所示光路, 观察光栅(一维晶体)样品DG1~DG5的衍射图样, 用手机拍照(并把拍摄的照片放在实验报告中, 后续实验拍摄的照片也需要放在报告中。拍照时注意记录照片和样品编号的对应关系), 测试并记录数据, 确定每个样品的 $q_1$ 和 $a$ 。

**注意:**每一部分实验结束、记录和分析数据时及时关闭激光笔, 避免激光照射自己或同学。

衍射极大的位置和强度分别由晶体的周期( $a_1 = a$ )和晶胞参数(狭缝宽度 $b$ )决定。为简化计算, 可以引入被称为结构因子的复函数 $F(q)$ :

$$F(q) \sim \int \rho(x) \exp(iqx) dx \quad (8)$$

其中,  $\rho(x)$ 是晶体样品的振幅透射率(本题中可视为实数),  $q$ 是散射矢量, 积分区域为整个晶胞(本文所有结构因子表达式的积分区域也都是整个晶胞, 一般不再说明)。各衍射极大的相对强度为 $I(q) = |F(q)|^2$ 。

衍射图样中强度极大位置(衍射斑点)可以表示为:

$$\text{一维: } \mathbf{q} = h \cdot \mathbf{q}_1 \quad (9)$$

$$\text{二维: } \mathbf{q} = h \cdot \mathbf{q}_1 + k \cdot \mathbf{q}_2 \quad (10)$$

$$\text{三维: } \mathbf{q} = h \cdot \mathbf{q}_1 + k \cdot \mathbf{q}_2 + l \cdot \mathbf{q}_3 \quad (11)$$

其中 $h, k, l \in \mathbb{Z}$ 。以三维为例, 每个衍射斑点可以用一组数 $(h, k, l)$ 标记, 对应的复振幅和强度分别为 $F(h, k, l)$ 和 $I(h, k, l)$ 。

以下计算图5所示光栅的结构因子。设光栅常量 $a = pb$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ 。图5样品A的振幅透射率 $\rho(x)$ 为:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, b) \\ 0, & x \in [b, a] \end{cases} \quad (12)$$

代入(8)式, 经积分、化简后可得:

$$F_A(h) = 2 \frac{\sin(\pi h/p)}{q_1 h} \exp\left(\frac{i\pi h}{p}\right) = \begin{cases} \frac{2\pi}{q_1} \cdot \frac{1}{p}, & h = 0 \\ F_1(h), & h \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中 $p = a/b$ 。强度为0的极大点(称为缺级)满足:  $h = \pm pm$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ 。

同理, 对于图5的样品B, 可求得:

$$\begin{aligned} F_B(h) &= 2 \frac{\sin(\pi h)}{q_1 h} \exp(i\pi h) - 2 \frac{\sin(\pi h/p)}{q_1 h} \exp\left(\frac{i\pi h}{p}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{q_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right), & h = 0 \\ -F_1(h), & h \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

强度为0的极大点满足 $h = \pm pm$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ 。可以看出, 对于图5中的样品A和B, 非零级衍射斑点的强度完全相同。

## B) 二维晶体

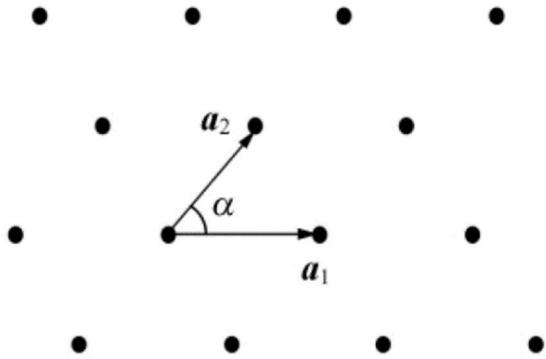


图 7 二维晶体

这一部分的内容是通过衍射图样确定晶体的晶格矢量。

考虑二维晶体的衍射。图 7 所示为以  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  为晶格矢量的二维晶体，习惯上取格矢间夹角  $\alpha \leq 90^\circ$ ，图中圆点表示晶体中的等价位置。如果平行单色光垂直照射到如图 7 所示的二维晶体面上，会在其后的屏上出现周期性的衍射图样，各极大位置可以用（10）式描述。

总可以在图 7 所示二维晶体中画一系列过圆点的平行线，使所有点落在这些平行线上。这样，在垂直于这些平行线的方向上，1 个二维晶体的衍射可以看成光栅常量为平行线间距的光栅的衍射。设  $\mathbf{q}_1$  和  $\mathbf{q}_2$  是衍射图样上距零级斑点最近的衍射斑点，且对应平行线间距最大时的衍射。平行线间距最大意味着平行线上相邻 2 点的距离最短，也就是说这样的平行线方向只能与  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  一致。不难导出，对应的线间距分别为  $a_2 \sin \alpha$  和  $a_1 \sin \alpha$ 。

从上面的讨论可以看出， $\mathbf{q}_1$  和  $\mathbf{q}_2$  分别与  $\mathbf{a}_1$  或  $\mathbf{a}_2$  之一垂直，不妨取  $\mathbf{q}_1 \perp \mathbf{a}_2$ ，则有：

$$|\mathbf{q}_1| = \frac{2\pi}{a_1 \sin \alpha}, |\mathbf{q}_2| = \frac{2\pi}{a_2 \sin \alpha} \quad (15)$$

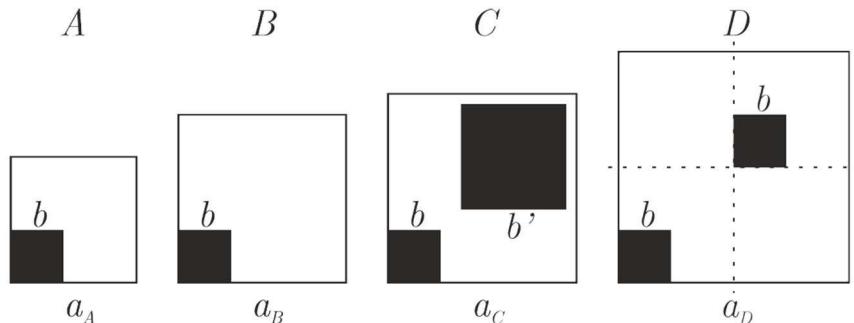
图 8 A~D4 个二维晶体的晶胞是正方形，除  $a_B > a_a$  外，其它尺寸比都未知

图 8 给出了 4 种正方形晶胞的结构，每个晶胞的 2 个晶格矢量的长度相等且相互垂直。晶胞内黑色正方形完全不透光，其他部分完全透光。对晶胞 C 有  $b' > b$ 。晶胞 D 中 2 个黑色方块完全相同，一个相对于另一个向右和向上分别移动了半个晶格矢量。

以下求图 8 所示结构 A 或 D 的非零级衍射斑点的结构因子。对于结构 A，由（13）式和（14）式的结果可知，如果透射率 0 与 1 互换（透光和不透光的区域互换），非零级衍射斑点的结构因子的模相同。因此，可以用透光和不透光区域正好相反的结构来代替晶体 A，进而计算结构因子：

$$\begin{aligned}
 F(h, k) &= \int_0^b \int_0^b \exp(iq_x x) \exp(iq_y y) dx dy \\
 &= \frac{a^2}{\pi^2} \left| \frac{\sin(\pi \frac{hb}{a})}{h} \cdot \frac{\sin(\pi \frac{kb}{a})}{k} \right| \exp\left[i\pi \frac{b(h+k)}{a}\right], h \neq 0, k \neq 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{或 } |F(h, k)| = \frac{a^2}{\pi^2} \left| \frac{\sin(\pi \frac{hb}{a})}{h} \cdot \frac{\sin(\pi \frac{kb}{a})}{k} \right| = \frac{a^2}{\pi^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi(h-k)b}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(h+k)b}{a}\right)}{2hk} \right| \tag{17}$$

容易推出，晶体 D 的结构因子为晶体 A 的结构因子乘以  $[1 + e^{i\pi(h+k)}]$ 。

B.1 观察样品 UC1~UC4 的衍射图样并拍照，测试并记录数据，确定  $a_{UC1}$ 、 $a_{UC2}$ 、 $a_{UC3}$  和  $a_{UC4}$ 。

B.2 分析并确定样品 UC1~UC4 与图 8 中各个晶胞的对应关系。

提示：1. 由 (17) 式可知，晶体 D 的衍射图样中会缺失  $h+k$  为奇数的斑点 ( $h+k$  为奇数时  $h-k$  也为奇数)。2. 已知图 8 中  $a_B > a_A$ 。3. 晶体 B 的 0 级斑点比晶体 C 强，因为晶体 B 的透光区域更大。

B.3 样品 UC5~UC7 是简单的二维晶体。观察并拍摄它们的衍射图样，确定各个样品的参数  $a_1$ 、 $a_2$  及其夹角  $\alpha$ 。

### C) 晶体的对称性

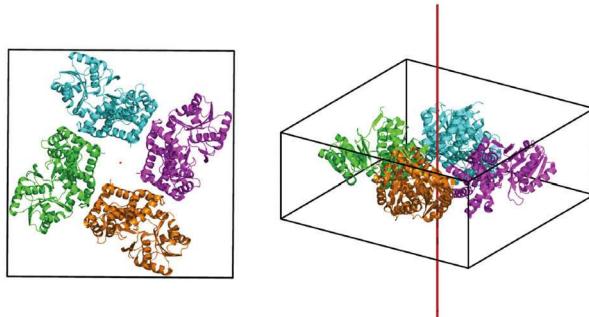


图 9 晶胞具有  $C_4$  对称的示例，绕右图中竖直线转  $90^\circ$  的整数倍后晶胞会复原

上一部分确定了晶体的晶格矢量，本部分将确定晶胞的对称性。

真实晶体的原胞中往往包含多个分子，它们之间具有一定的对称性（图 9）。了解这些对称性可以大大简化晶体结构的确定过程。晶体结构的对称性会引起衍射图样的对称性和系统性的缺级。

衍射斑点强度分布的典型对称性有：以某条直线为对称轴的镜像对称，用该直线的方程来表示；绕某条对称轴转过  $(360^\circ \cdot n/m, m, n \in Z)$  时，能使衍射图样复原的  $m$  阶旋转对称，用  $C_m$  标记。

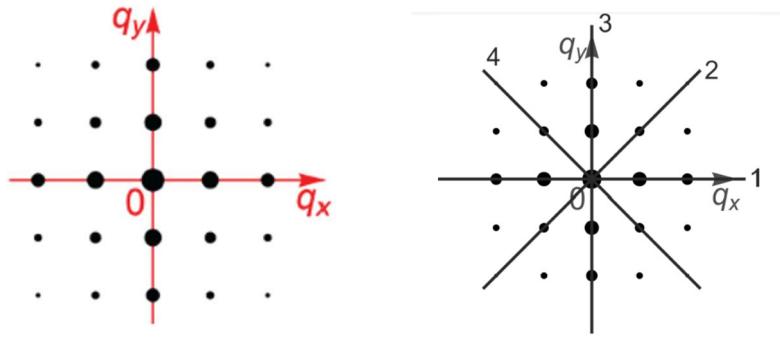


图 10 二维晶体的衍射图样（左）及其对称性（右）

图 10 左侧所示是一个二维晶体的衍射图样（仅画出了 $|h|, |k| \leq 2$ 的较强的衍射斑）。该二维晶体具有两个相互垂直且相等的晶格矢量（ $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ 且 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ ）。衍射图样的旋转对称中心为 $h = 0, k = 0$ ，具有的旋转对称性和镜像对称性见表 1。图 10 右侧还标出了镜像对称轴（即标号为 1~4 的四条直线）。

表 1 图 10 所示二维晶体衍射图样的对称性

对称性		衍射图样强度满足的方程
旋转对称	$C_1$	$I(q_x, q_y) = I(-q_x, -q_y)$
	$C_2$	$I(q_x, q_y) = I(q_x, -q_y)$
	$C_4$	$I(q_x, q_y) = I(-q_x, q_y)$
镜像对称	1: $q_y = 0$	$I(q_x, q_y) = I(q_x, -q_y)$
	2: $q_y = q_x$	$I(q_x, q_y) = I(q_y, q_x)$
	3: $q_x = 0$	$I(q_x, q_y) = I(-q_x, q_y)$
	4: $q_y = -q_x$	$I(q_x, q_y) = I(-q_x, -q_y)$

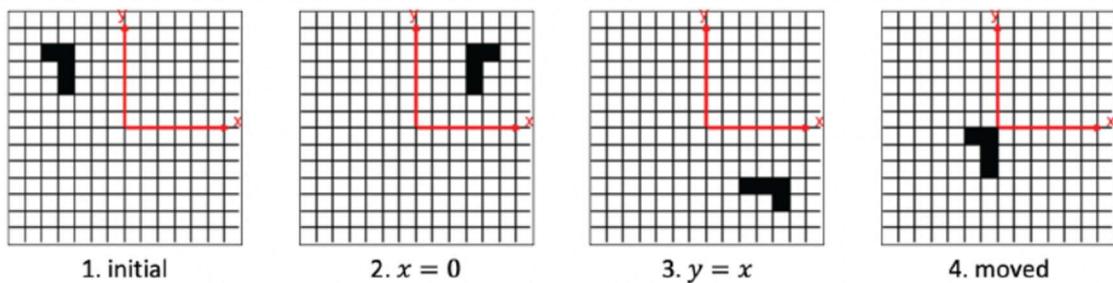


图 11 由晶胞 1 通过不同的对称性操作得到的晶胞结构 2~4

以下分析晶胞结构的对称性与衍射图样的对称性之间的关系。图 11 所示各个晶胞中的白、黑格子分别代表透光和不透光。晶胞 2 和 3 分别由晶胞 1 对 $x = 0$ 轴和 $y = x$ 轴做镜像变换得到，晶胞 4 由晶胞 1 平移 $(x_1, y_1)$ 得到。设由晶胞 1 行成的晶体的结构因子为：

$$F(q_x, q_y) = \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \rho(x, y) \exp[i(q_x x + q_y y)] dx dy \quad (18)$$

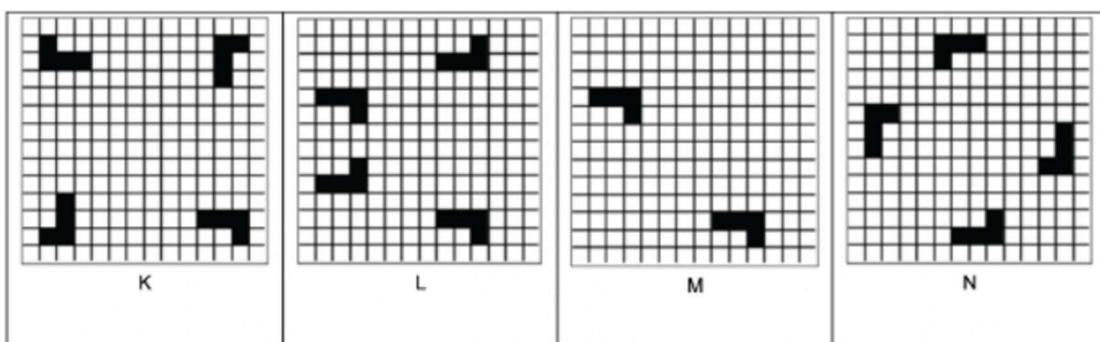
则晶胞 2 的结构因子与晶胞 1 的关系为：

$$\begin{aligned}
 F_2(q_x, q_y) &= \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \rho_2(x, y) \exp[i(q_x x + q_y y)] dx dy \\
 &= \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \rho(-x, y) \exp[i(q_x x + q_y y)] dx dy \\
 &= \int_{x_0}^{-x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \rho(x, y) \exp[i(-q_x x + q_y y)] d(-x) dy = F(-q_x, q_y)
 \end{aligned} \tag{19}$$

即如果晶胞具有对  $x = 0$  轴的镜像对称性，其结构因子以及衍射图样也具有对  $q_x = 0$  轴的镜像对称性。

同理，可以求得晶胞 3 的结构因子与晶胞 1 的关系为  $F_3(q_x, q_y) = F(q_y, q_x)$ 。晶胞 4 由晶胞 1 平移  $(x_1, y_1)$  得到，其结构因子  $F_4(q_x, q_y) = F(q_y, q_x) \exp[i(q_x x_1 + q_y y_1)]$ 。

C.1 说明下图所示晶胞形成的晶体具有哪些对称性。在图上画出镜像对称轴，在图下方标明旋转对称性。



C.2 观察并拍摄样品 PG1、2、5、8 的衍射图样，确定这些衍射图样有何对称性，并分析它们与晶胞 K、L、M、N 之间的对应关系。

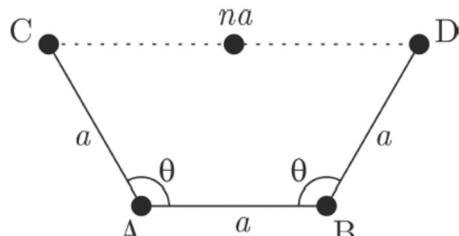


图 12 二维晶体的旋转对称性

二维晶体可以具有哪些旋转对称性？如图 12 所示，A 和 B 是晶体中的 2 个完全等价的格点。如绕 A 点逆时针旋转角度  $\theta$ ，则 B 点变化到 C 点。若此为晶体的对称操作，则晶体还和原来一样。这时再将晶体绕 A 点顺时针旋转角度  $\theta$ ，晶体会回到未做任何操作前的状态。即，如逆时针旋转  $\theta$  角是对称操作，则顺时针旋转  $\theta$  角也必定是。又因所有格点等价，对 A 点成立的对 B 点也必定成立。因此，C 和 D 必为晶体格点。CD 显然平行于 AB。由晶体的平移对称性可以断定 CD 的长度一定是  $a$  的整数倍，即：

$$\cos \theta = \frac{1 - n}{2} \tag{20}$$

其中  $n$  为整数，由此可得二维晶体只能具表 2 所示的旋转对称性。

表 2 二维晶体具有的旋转对称性

$n$	$\cos\theta$	$\theta$	对称性
-1	1	0°	$C_1$
0	1/2	60°	$C_6$
1	0	90°	$C_4$
2	-1/2	120°	$C_3$
3	-1	180°	$C_2$

C.3 观察并拍摄样品 UC8 的衍射图样。它可能是晶体吗？请说明原因。

#### D) 相位问题

在确定了晶体的晶格矢量和对称性后，这一部分内容是确定晶体的完整结构。

入射光经晶体样品散射后的衍射图样的复振幅（即结构因子）由傅里叶变换给出：

$$F(\mathbf{q}) \sim \int \rho(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (21)$$

由结构因子经过傅里叶逆变换也可反推出晶胞结构：

$$\rho(\mathbf{r}) \sim \int F(\mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{q} \quad (22)$$

对离散的衍射斑点，积分可以变成求和：

$$\rho(\mathbf{r}) \sim \sum |F(\mathbf{q})| \exp(i\varphi) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (23)$$

实际上，(23) 式中只需对最亮的一些衍射斑点求和即可，因为这些最亮的斑点的贡献最大。

实验中可以测试衍射斑点的强度  $I(\mathbf{q})$ ，得到结构因子的模  $|F(\mathbf{q})|$ ，但不能给出相位  $\varphi$ ，因此由 (23) 式不能直接解出  $\rho(\mathbf{r})$ 。这个问题被称为相位问题。

解决相位问题的方法通常是先取近似的初始相位，用 (23) 式得到  $\rho(\mathbf{r})$ ，再将得到的  $\rho(\mathbf{r})$  代入 (21) 式来计算新的相位，不断重复，直到收敛。如果已知某晶体的结构与待测晶体类似，可使用该晶体的相位作为待测晶体的初始相位。

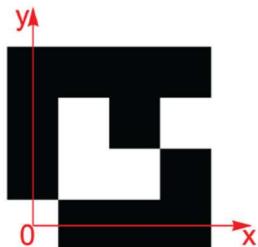
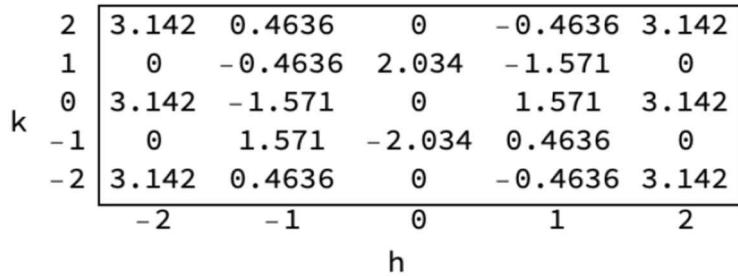


图 13 MR0 晶胞结构（白-透光，黑-不透光）



图 14 MR1 晶体可能的晶胞结构

MR0 和 MR1 的晶胞都有  $4 \times 4$  阶的透光 ( $\rho = 1$ ) 或不透光 ( $\rho = 0$ ) 方块组成。MR0 的晶胞结构已知，如图 13 所示。MR1 的结构未知，但应为图 14 之一。图 15 给出了 MR0 晶体  $|h|, |k| \leq 2$  的衍射斑点的相位。

图 15 MR0 晶体  $|h|, |k| \leq 2$  的衍射斑点的相位 (单位: rad)

D.1 观察并拍摄样品 MR1 的衍射图样。确定晶体 MR1 的晶胞是图 14 中的哪一个。

## 参考文献

- 荀坤, 李智, 穆良柱, 陈志坚, 陈晓林. 2020 年国际物理奥林匹克竞赛实验试题介绍及解答. 物理实验, 41(4), pp. 22-31, Apr. 2021.
- IdPhO-2021-E1: Crystallography. [EB/OL]. [2021-03-11]. <https://i20.mipt.ru>.

## II-8&9 傅里叶光学实验

### 1. 引言

“显微成像是诸多衍射现象干涉的结果。”

——恩斯特·阿贝

依据阿贝成像原理，在显微成像中光被样品散射，散射光被成像系统接收，干涉后形成像。傅里叶光学从干涉和衍射的角度解释成像，并依照傅里叶变换的原理给出了光学滤波等光学信息处理方法。历史上，傅里叶光学在显微镜的设计上发挥了很大的作用。近些年，随着激光器、光电技术的发展，光学信息处理在遥感、医疗等领域得到了广泛的应用。

本实验中使用 4f 光路（一种无限共轭成像光路）研究傅里叶光学的相关现象。本实验中探究了 4f 光路和科勒照明光路的性质。通过修改傅里叶面上的图像进行滤波、模糊、微分等操作。此外本实验还探究了光学系统分辨率、逆傅里叶图像的性质和相干性对成像的影响。

### 2. 实验目的

学习傅里叶光学的基本原理，并使用傅里叶光学的基本原理进行光学滤波等图像处理。

了解显微成像光路和科勒照明光路的原理，了解限制成像分辨率的因素。

### 3. 实验仪器



图 1. 主要实验仪器

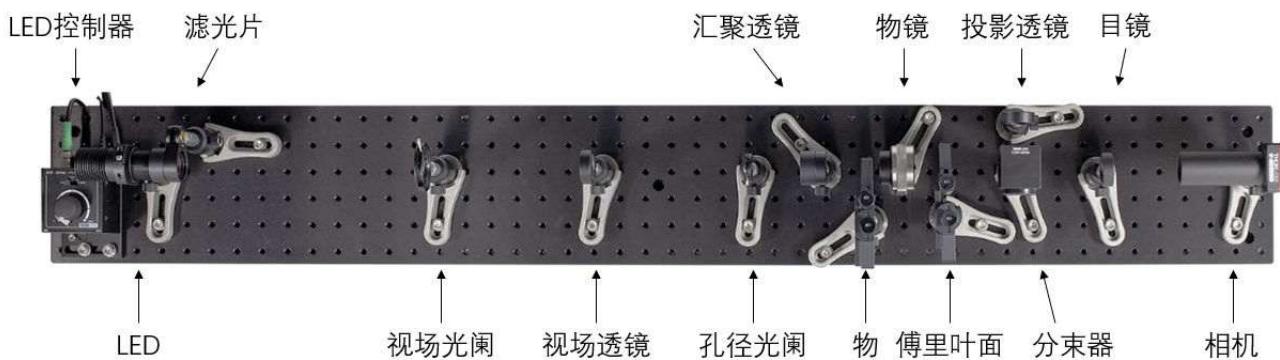


图 2. 实验光路

- (1) LED 光源, 1 个, 白光, 最大电流 1300 mA。
- (2) 彩色相机, 1 个,  $1440 \times 1080$  个  $3.45 \mu\text{m}$  方形像素。
- (3) 物镜, 1 个, 30mm 双胶合透镜, 配伸缩套筒。
- (4) 狹缝, 1 个, 可调大小和方向, 用于傅里叶面滤波。
- (5) 光屏, 1 个, 用于观测傅里叶面的像。
- (6) 光阑, 2 个 12mm, 1 个 25mm, 共 3 个。
- (7) 带通滤光片, 1 个, 中心波长 550 nm, 半高全宽 40 nm。
- (8) 视场透镜和目镜, 两者型号相同, 共 2 个, 150mm 双胶合透镜。
- (9) 会聚透镜, 1 个, 150mm 双胶合透镜。
- (10) 投影透镜, 1 个, 75mm 双凸透镜。
- (11) 物屏 (EDU-TGB1), 1 个, 共 14 个图案。
- (12) 挡光屏 (EDU-TGC1), 或称为光学掩膜, 1 个, 共 3 种遮挡图案。

#### 实验注意事项:

- (1) 人身安全: 禁止直视激光; 人眼需始终高于光路平面; 感光卡的反射光禁止正对自己或同学; 从光屏正面的上方观察; 禁止配戴手表、戒指等做实验。
- (2) 设备安全: 禁止触摸光学表面; 所有光学元件需用螺丝锁紧、螺丝垫片光滑的一面接触元件底座; 看懂每一部分讲义后再做实验; 不使用的激光器及时关闭; 触摸光学表面或损坏仪器及时报告上课老师。
- (3) 在希望拆卸光学元件时提前告知老师; 若更改了光路, 还原后再离开实验室。

## 4. 实验原理与实验内容

### A) 显微成像光路的性质

显微镜是用于放大微小物体的光学仪器。一般的显微镜直接使用眼睛观察, 由成实像的物镜和成虚像的目镜组成。本实验中使用相机作为接收器件, 与一般的显微镜不同, 使用无穷共轭 (Infinity-Corrected) 光路 (如图 3)。在无穷共轭的光学系统中, 物 G 位于物镜的焦平面上, 发出的光线经过物镜后为平行光, 此平行光经目镜 (Tube Lens) 直接投影在相机上。此光学系统的放大率为

$$V = -\frac{f_{\text{目镜}}}{f_{\text{物镜}}}$$

无穷共轭光学系统具有若干优势。由于物镜和目镜之间为平行光, 两者的间距可以随意调节, 这也是“无穷共轭”这个名称的来源。无穷共轭成像相比单透镜成像可以更加方便的修改放大倍数, 只需要更换目镜而不用更改光路总长度。由于每一个透镜的作用均为将点光源转换成平行光 (或相反), 故可以进行标准化的消像差设计, 不需要每个光路分别设计。此外, 还可以非常容易的在无穷共轭光路中的平行光部分插入光学元件, 如滤波片、分束镜等。

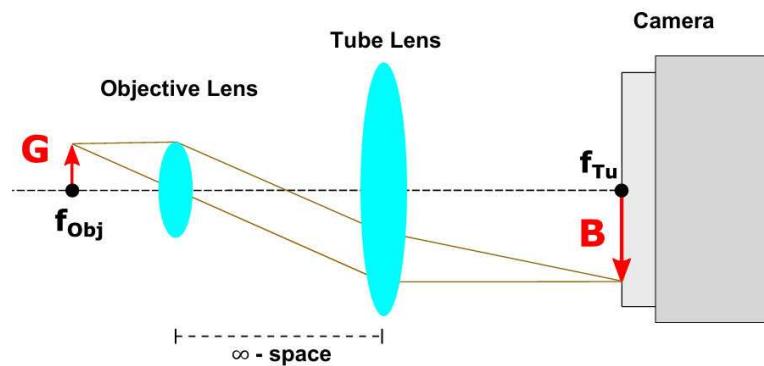


图 3. 无穷共轭显微镜光路图

在显微成像中，物体的照明同样影响成像质量，为了获得均匀的、可调光强的照明，我们搭建了科勒照明 (Köhler Illumination) 光路。我们将照明光源放在透镜的物方焦点上，从而在像方产生平行光照明。否则，由于照明光源具有不同的形状，如果直接使用光源的像照明会将光源的形状引入到后续显微系统的像中。使用科勒照明则可以排除光源的结构对成像的影响。科勒照明光路由两个透镜和两个光阑组成。

科勒照明的光路如图 4、图 5 所示，从左到右分别为光源、集光透镜 (Collector lens)、视场光阑 (Field Iris)、孔径光阑 (Aperture Iris) 和会聚透镜 (Condenser Lens)。光源放在集光透镜焦点外，集光透镜收集尽量多的光并在右方成光源的实像。孔径光阑放在光源的实像平面上，会聚透镜与孔径光阑的距离正好为其焦距，会聚透镜与物的距离同样为其焦距，这样可以在物的地方产生平行光。孔径光阑可以限制照明光的角度，如图 4，缩小孔径光阑时将挡住大角度的照明光，但不改变物被照亮的面积。视场光阑放在靠近集光透镜处，如图 5，可以改变物被照亮的面积，而不改变照明光的角度。原则上将光阑直接放在物平面上也可以起到相同的作用，但是这并不容易实现，所以人们通常采用将光阑通过透镜投影到物上的方法。使用视场光阑和孔径光阑可以独立的调节物体被照明到的范围和角度。在我们的试验系统中，还添加了一个视场透镜，如图 2。视场透镜的作用是增强集光透镜的聚光能力，增加光强。

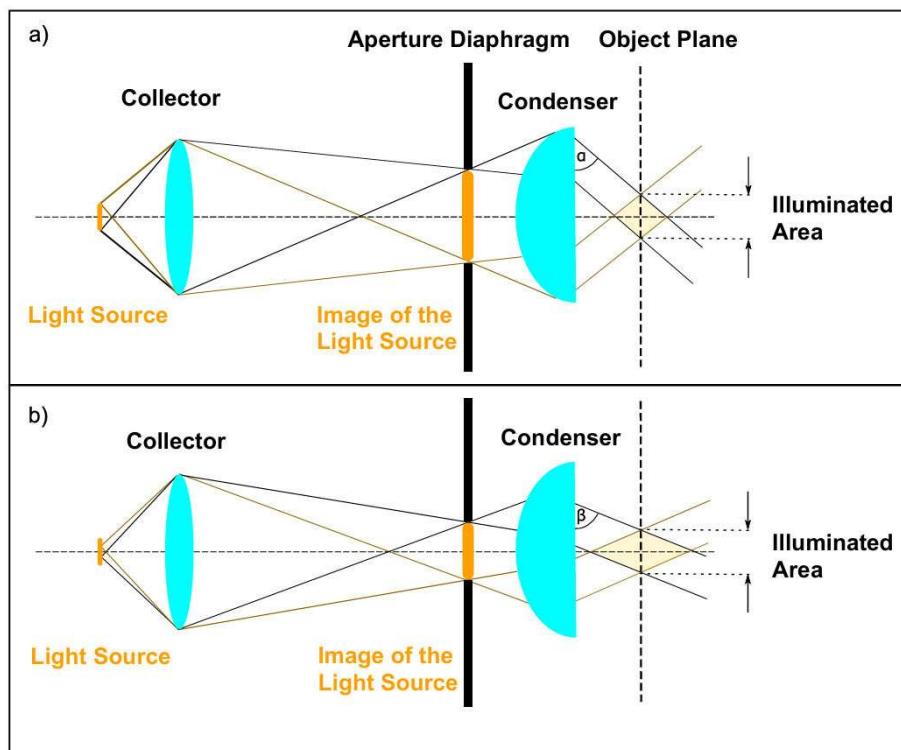


图 4. 孔径光阑作用示意图

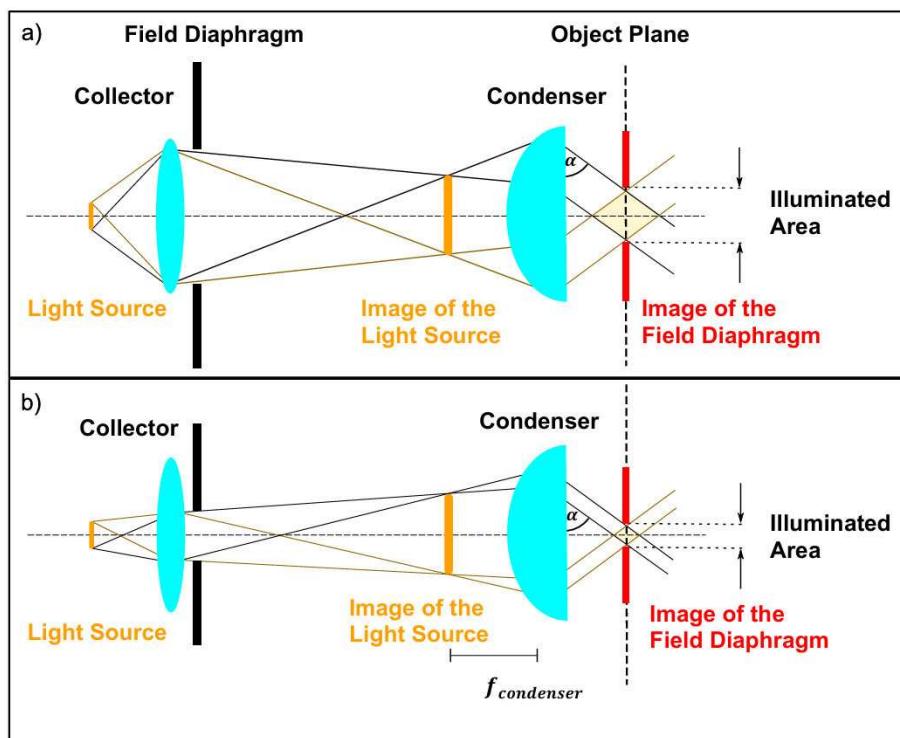


图 5. 视场光阑作用示意图

### A.1 成像光路调节

打开 LED 光源和相机，将物 F2 移动到视场内，调节物镜使相机上的像清晰（见附录 B），并拍照记录。

将一张白纸放在物镜后约 3cm 处，可以看到傅里叶面，前后移动白纸使傅里叶面的像清晰，拍照记录。

### A.2 探究光阑的作用

先将孔径光阑和视场光阑均关到最小，然后分别打开孔径光阑和视场光阑，记录相机上的图像、对物体的照明和傅里叶图像的变化。填写以下表格。

	打开孔径光阑	打开视场光阑
相机上像的变化		
对物体照明的变化		
傅里叶图像的变化		

### A.3 探究投影透镜的作用

将物 F10 移动到视场中，调节物镜使相机上的像清晰。将光屏放在投影透镜后的近处，然后逐渐向远处移动。在移动过程中可以观察到在两处有清晰的像，分别拍照记录，并解释这两个像形成的原因。

### B) 傅里叶光学和光学滤波

当光线通过狭缝、圆孔等光屏时，衍射效应会改变光的传播模式。我们可以将透镜看作一种会改变相位的光屏，从而可以使用衍射的方法处理成像问题。在下文的推导中我们会证明透镜在成像中的作用等效于一次傅里叶变换，我们将使用傅里叶变换分析成像问题，并利用傅里叶变换的性质处理图像的方法称为傅里叶光学。

我们首先回顾光场通过一个光屏的情况，如图 6。在  $z = -g$  处有一个点光源。在  $z = 0$  处有一个光屏，其形状可以使用屏函数  $\sigma(x, y)$  描述，屏函数描述了电场强度的透过率，假设透过光屏前的光场为  $E(x, y, 0)$ ，则透过光屏后的光场为  $E'(x, y, 0) = E(x, y, 0)\sigma(x, y)$ 。在完全透光的区域  $\sigma = 1$ ，在完全不透光的区域  $\sigma = 0$ ， $\sigma$  的取值为  $|\sigma| \in [0, 1]$  的复数（在下文中将解释屏函数可以带有相位的原因）。 $z = z_0$  处的光场可以使用基尔霍夫衍射公式给出

$$E(x', y', z_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint E(x, y, 0)\sigma(x, y) \frac{\cos\theta}{r} e^{ikr} dx dy$$

其中  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z_0^2}$ ， $\cos\theta$  为倾斜因子。

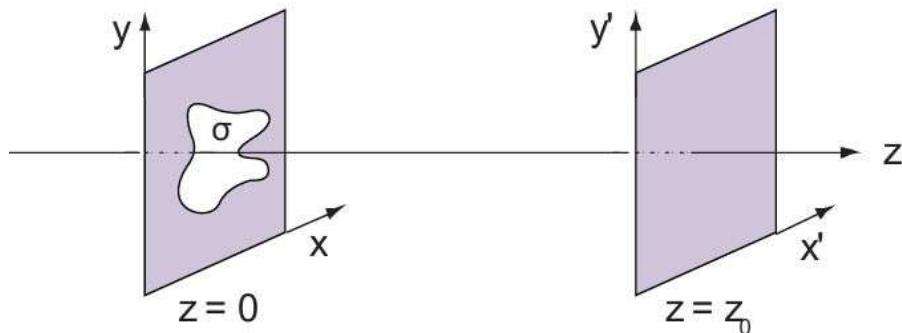


图 6. 衍射效应示意图

为了计算以上积分，需要引入一些近似条件。当满足傍轴条件（也称为菲涅尔近似） $x \ll z_0$ 、 $y \ll z_0$  时有

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z_0^2} \approx z_0 \left(1 + \frac{(x - x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y - y')^2}{2z_0^2}\right)$$

另外有  $\cos\theta \approx 1$ ，代入积分有

$$E(x', y', z_0) = \frac{e^{ikz_0}}{i\lambda z_0} \iint E(x, y, 0)\sigma(x, y) \exp\left(\frac{ik}{2z_0}((x - x')^2 + (y - y')^2)\right) dx dy$$

当进一步满足远场条件（也称为夫琅和费近似） $x^2 + y^2 \ll z_0\lambda$  时有

$$r \approx z_0 \left(1 - \frac{xx' + yy'}{z_0^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z_0^2}\right)$$

其中略去了  $\frac{x^2 + y^2}{2z_0^2}$  项，代入积分有

$$E(x', y', z_0) = \frac{e^{ikz_0(1 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z_0^2})}}{i\lambda z_0} \iint E(x, y, 0)\sigma(x, y) \exp\left(-\frac{ik}{z_0}(xx' + yy')\right) dx dy$$

注意到  $z_0$  满足远场条件时，在  $z = z_0$  处的光场正比于  $z = 0$  处光场的傅里叶变换，仅相差一个常数。当入射光为平面波  $E(x, y, 0) = E_0$  时，我们可以得到一个常见的结论，即无穷远处的光场是屏函数的傅里叶变换。

我们接下来考虑透镜在成像中的作用。一个焦距为  $f$  的透镜，可以将入射的平面波  $E = E_0 e^{ikz}$  聚焦成会聚于  $z = f$  的球面波  $E' = E_0' e^{ikr}$ ，其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - f)^2}$  为到焦点的距离。可以给出透镜的屏函数为

$$\sigma(x, y) = \frac{E'(x, y, 0)}{E(x, y, 0)} = \frac{e^{ikz}}{e^{ikr}} = e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}$$

由傍轴条件  $x \ll f$ 、 $y \ll f$ , 有

$$\sigma(x, y) = \exp\left(-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right)$$

其中略去了常数相位  $e^{-ikf}$ 。透镜的屏函数告诉我们, 如果将透镜看作光屏, 其仅改变光场的相位而不改变光场的振幅。

现在将透镜的屏函数代入满足傍轴条件的基尔霍夫衍射公式, 可以说明透镜在成像中的作用。取  $z_0 = f$ , 可以计算透镜焦平面上的光场

$$\begin{aligned} E(x', y', f) &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \iint E(x, y, 0) \exp\left(-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right) \exp\left(\frac{ik}{2f}((x - x')^2 + (y - y')^2)\right) dx dy \\ &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \exp\left(\frac{ik}{2f}(x'^2 + y'^2)\right) \iint E(x, y, 0) \exp\left(-\frac{ik}{f}(xx' + yy')\right) dx dy \end{aligned}$$

我们发现透镜焦平面上的光场分布与满足远场条件时的光场分布相同, 故透镜的作用是将无穷远处的衍射图案成像在其焦平面上, 或者说我们可以使用透镜在有限长的光路中实现远场条件。同时, 我们发现透镜焦平面上的图案是入射光场的傅里叶变换, 我们可以得到另一个常用的结论, 在成像光路中添加一个透镜等价于做一次傅里叶变换。

根据以上傅里叶光学的基本原理, 我们可以通过操控傅里叶面(透镜的焦平面)上的光场实现对光场空间频率的操控, 从而实现光学滤波等操作。考虑如图 7 的 4f 成像光路, 从显微成像的角度来看, 是一个放大率为 1 的无穷共轭成像光路。而按照傅里叶光学的角度来看, 第一个透镜对物进行了第一次傅里叶变换, 我们将其焦平面称为傅里叶平面, 第二个透镜对傅里叶平面进行了第二次傅里叶变换再次得到物。故从傅里叶光学的视角来看, 无穷共轭成像是对物进行两次傅里叶变换得到像。本实验的光路, 如图 2, 为物镜和目镜焦距不同的 4f 系统, 此外增加了科勒照明光路和傅里叶面的成像光路。

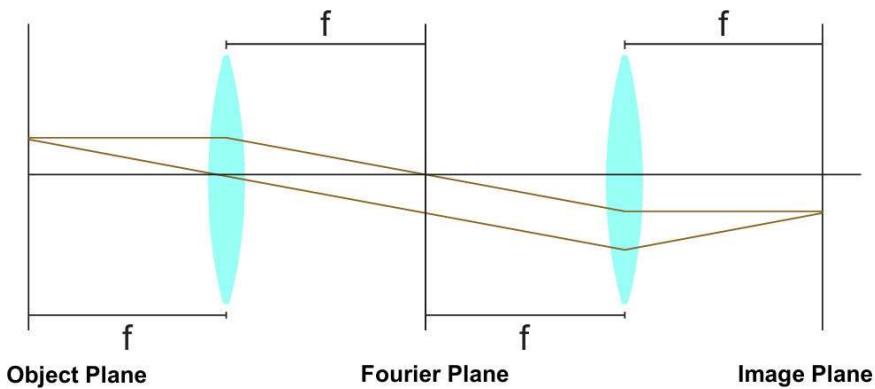


图 7. 4f 系统光路图

通过傅里叶平面上的操作可以实现光学滤波。如图 8, 使用计算机模拟软件进行了方格图像的光学滤波, 仅保留傅里叶图像的一列, 即竖直方向的频率信息, 可以得到仅有水平条纹的最终图像。如图 9, 使用计算机模拟软件进行了字母图像的光学滤波, 仅保留傅里叶图像的低频部分, 将导致图像变模糊。在本部分的实验中, 将对各种图像进行光学滤波, 并探究光学滤波的作用。

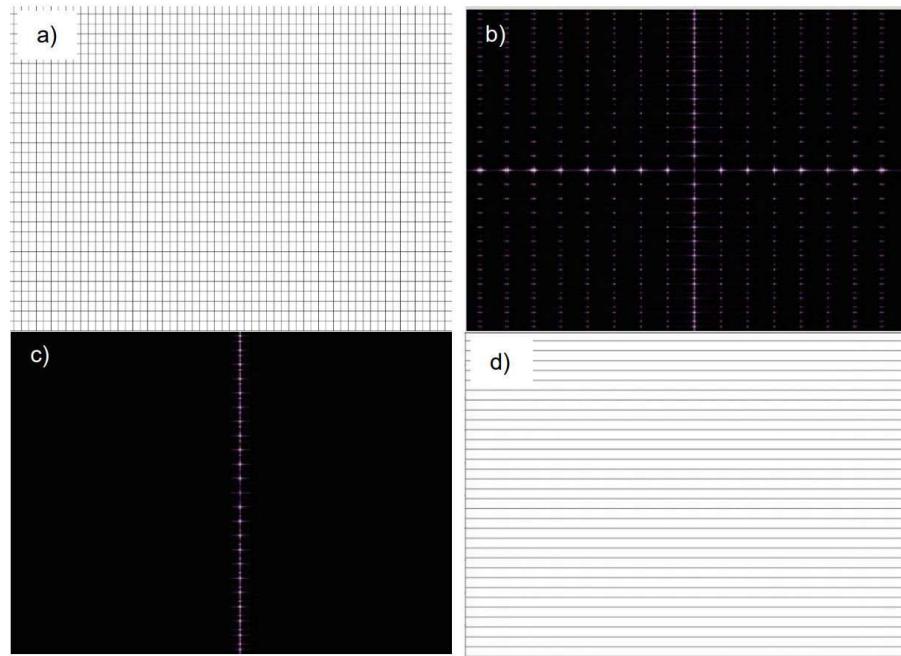


图 8. 方格图像光学滤波

(a) 原始图像 (b) 原始图像的傅里叶变换 (c) 滤波后的傅里叶图像 (d) 最终图像

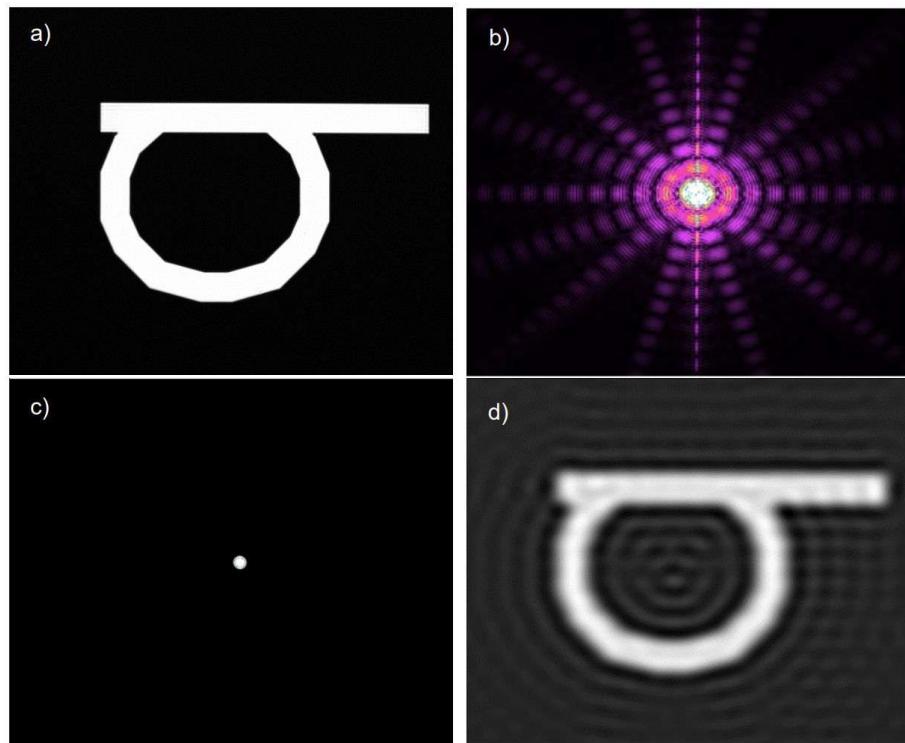


图 9. 字母图像的光学滤波

(a) 原始图像 (b) 原始图像的傅里叶变换 (c) 滤波后的傅里叶图像 (d) 最终图像

**B.1 方格图像的光学滤波**

将物 F2 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，移动光屏使傅里叶面的像清晰，拍照记录相机上和光屏上的图像。

将狭缝放在傅里叶平面上，分别将狭缝的方向调节到水平、竖直和 45 度倾斜，拍照记录相机和光屏上的像。填写以下表格。

	相机上的像	光屏上的像
无狭缝		
水平狭缝		
竖直狭缝		
45 度倾斜狭缝		

根据成像的原理，解释以上现象。

B.2 对 F6 倾斜方格图像重复 B.1 中的操作，并填写表格。指出斜方格和正方格的现象的不同之处，并解释原因。

**B.3 五角星图像的光学滤波**

将物 F7 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，移动光屏使傅里叶面的像清晰，拍照记录相机上和光屏上的图像，测量五角星的边长（以像素为单位）。

观察到傅里叶平面上共有 5 个方向的衍射条纹。将狭缝放在傅里叶平面上，旋转狭缝使 5 组条纹分别透过狭缝，观察相机平面上的图像。可以观察到共有 3 种不同的条纹间距，记录每种间距的狭缝角度，拍照，并测量条纹间距（以像素为单位）。

	相机上的像	光屏上的像	条纹间距测量值
无狭缝			此处填写五角星的边长
角度 1: (填写测得的角度)			
角度 2: _____			
角度 3: _____			

依据傅里叶光学的原理，计算狭缝处在各角度时条纹间距的理论值分别为多少，并与测量值比较。

**B.4 点阵图像的光学滤波**

将物 F11 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，移动光屏使傅里叶面的像清晰，拍照记录相机上和光屏上的图像。观察傅里叶图像的缺级现象，数出缺少的级次，并解释原因。

将狭缝插入傅里叶平面，旋转狭缝，观察到几乎所有的方向相机上均成条纹状的像，解释原因。

**B.5 笑脸图像的光学滤波**

将物 F9 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。

将竖直方向的狭缝插入傅里叶平面，仅保留 0 级光斑，拍照记录相机上的图案。观察到此时笑脸上的竖线消失了，且笑脸变得不完整，解释其原因。

移动狭缝位置，仅保留 1 级或 2 级光斑，拍照记录相机上的图案。结合 C 部分中提到的巴比涅原理，解释此时的现象。

提出一个方法保留竖线仅使笑脸消失，说明方法并解释原因。

	相机上的像	狭缝的图像（傅里叶面）
无狭缝		此处放傅里叶面的图像
仅保留 0 级		
仅保留 1 级		
仅保留 2 级		
使笑脸消失的方法：_____		

**B.6 AB 图像的光学滤波**

将物 F12 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。

将狭缝插入傅里叶平面，旋转狭缝使相机上仅出现 A、仅出现 B 以及 AB 同时出现，记录狭缝的朝向并拍照记录相机上的图像。解释观察到的现象。

	狭缝角度	相机上的像	傅里叶面的像
无狭缝	_____		
仅出现 A			
仅出现 B			
同时出现 AB			

**B.7 房屋图像的光学滤波**

将物 F10 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。

将狭缝插入傅里叶平面，旋转狭缝使房屋的不同部分变模糊，记录狭缝的朝向并拍照记录相机上的图像。解释观察到的现象。

观察到的现象	狭缝角度	相机上的像	傅里叶面的像
无狭缝	_____		

**B.8 保留偶数级的光学滤波**

将物 F8 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。将 EDU-TGC1 (Micro-Structured Mask) 放在傅里叶平面上，使用条状部分挡住所有的奇数阶衍射，观察相机上的像和傅里叶面的像。

对物 F5 重复以上操作，使用星形部分挡住所有的奇数阶衍射，拍照记录。

	相机上的像	光屏上的像
F8 全部阶		
F8 偶数阶		
F5 全部阶		
F5 偶数阶		

描述遮挡全部奇数阶后图像和原来的不同之处，并解释原因。

**B.9 高频信息对成像的影响**

将物 F14 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。

将光阑（还有一个未使用的）插入傅里叶面，保持光阑和衍射光斑同心，逐渐缩小光阑，观察傅里叶面和相机上的像。

将狭缝插入傅里叶平面，缩小狭缝使其遮挡住一部分衍射斑，观察傅里叶面和相机上的像。

	相机上的像	光屏上的像
无遮挡		
光阑开		
光阑关		
狭缝		

解释形成这些现象的原因。

**C) 阿贝成像原理**

阿贝依据傅里叶光学的原理，提出了成像时高频信息的丢失限制了分辨率。如图 10，假定成像时使用相干平行光照明，如果将物视作无穷多个正弦光栅的线性叠加（即傅里叶变换），那么物的高频信息具有更大的衍射角，导致不能被透镜接收到，这些丢失的高频信息导致了成像变模糊。阿贝使用数值孔径来描述光学系统的分辨率

$$NA = n \sin\alpha$$

其中  $n$  为物方折射率， $\alpha$  为光学系统可以接收到的最大的光线角度。假定一个光学系统可以分辨的最小周期为  $d$ ，其对应的衍射角为  $\sin\alpha = \frac{2\pi/d}{2\pi/n\lambda} = \frac{\lambda}{nd}$ ，其中  $\lambda$  为光波长，即最小的分辨周期为  $d = \frac{\lambda}{NA}$ 。

另外一种理解衍射导致的分辨率限制的方法是考察两个邻近的物点的像的重合情况。由于光学系统的有限孔径像点为艾里斑，具有有限大小  $r = 1.22 \lambda f/D$ ，其中  $f$  为焦距、 $D$  为光学系统直径，有  $NA \approx 2f/D$ 。由瑞利判据，为了分辨清楚两个相距  $d$  的物点，应有  $d > r$ ，故可分辨的最小距离为  $d = 1.22\lambda f/D = 0.61\lambda/NA$ 。我们发现两种方法给出了几乎相同的结果。

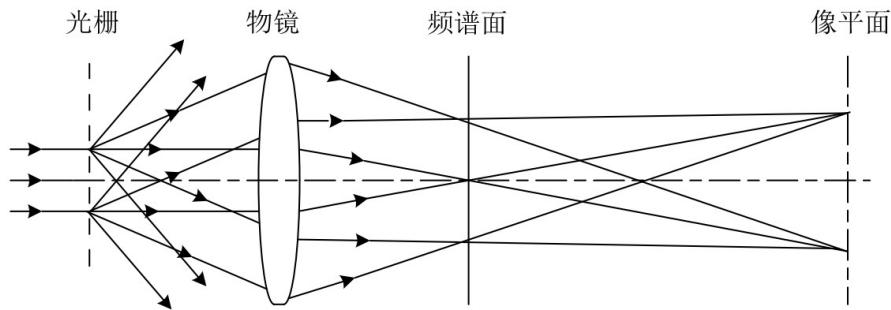


图 10. 阿贝成像原理示意图

### C.1 衍射限制的分辨率

使用光阑限制物镜的直径，即改变接收到光的空间频率，观察成像的清晰度变化。

## D) 图像编辑

我们接下来研究傅里叶光学在图像编辑和图像处理中的应用。我们首先研究 0 级衍射光在成像中的作用。由于 0 级衍射光不包含信息，我们通过对 0 级光进行处理，来修改图像的背景而不损失图像信息。如图 11 给出了计算机模拟遮挡 0 级光去掉背景的结果，说明可以通过遮挡 0 级光增强对比度。

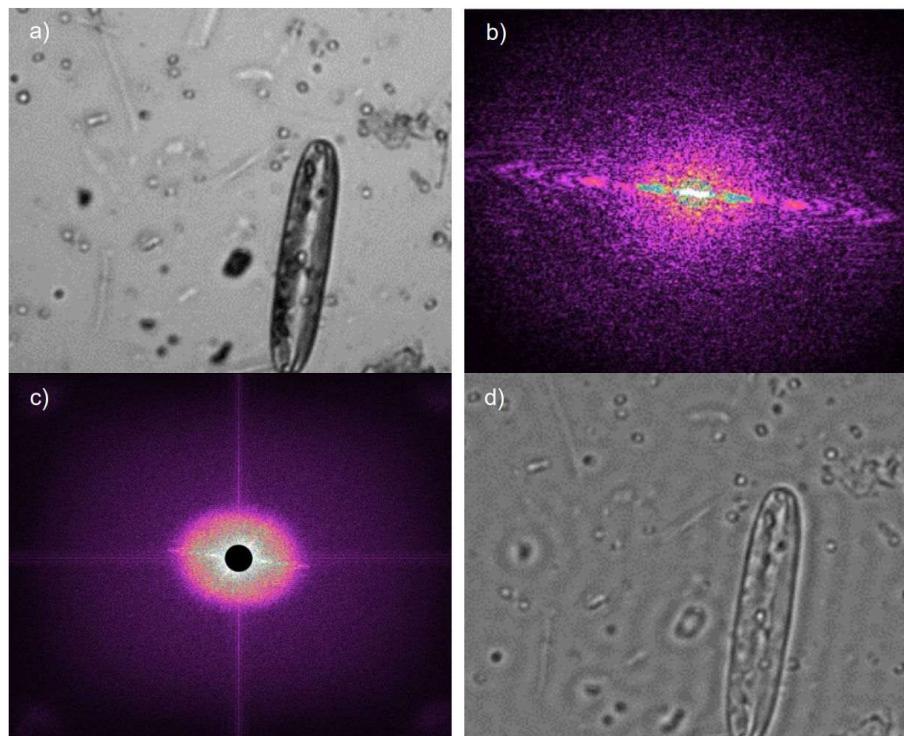


图 11. 高通滤波提升图像对比度

(c) 原始图像 (b) 原始图像的傅里叶变换 (c) 滤波后的傅里叶图像 (d) 最终图像

### D.1 巴比涅原理

巴比涅原理表明，两个互补的光屏的衍射图样相同。依据傅里叶光学的原理，互补光屏具有完全相同的频率信息，但是直流信息不一定相同。本部分使用互补光屏探究直流信息在成像中发挥的作用。

将物 F14 移动到视场内，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。将 EDU-TGC1 (Micro-Structured Mask)放在傅里叶平面上，使用点状部分挡住 0 阶衍射，观察相机上的像和傅里叶面的像。

对物 F5 重复以上步骤。

	相机上的像	光屏上的像
F14 全部阶		
F14 非 0 阶		
F5 全部阶		
F5 非 0 阶		

解释形成这些现象的原因。

### D.2 图像编辑

将 EDU-TGB1 上任意一个字母移动到视场中央，调节物镜使相机上成像清晰，拍照记录相机上的图案。将光阑插入傅里叶平面，关小光阑遮挡住高阶项，此时图片形成了虚焦效果。将 EDU-TGC1 插入傅里叶平面，使用点状部分挡住衍射光斑的中心，只保留光斑的边缘部分，此时只剩下了字母的边缘，达成了微分效果。

	相机上的像	光屏上的像
未遮挡的字母		
遮挡边缘		
遮挡中央		

解释虚焦和微分图像编辑的原理。

### D.3 硅藻图像的光学处理

找老师领取硅藻样本，将其固定在固定架 FP01 上。移开之前使用的物，将硅藻放在物镜焦平面上，调节物镜使成像清晰，拍照记录。将 EDU-TGC1 (Micro-Structured Mask)放在傅里叶平面上，使用点状部分挡住中心部分来增加对比度，观察相机上的像和傅里叶面的像。

	相机上的像	光屏上的像
未遮挡		
遮挡中央		

### D.4 逆傅里叶图像

找老师领取逆傅里叶样本，将其固定在可调固定架 XYF1/M 上，将其放在物镜焦平面上，调节物镜使成像清晰。为了对焦准确，可以先平移物使其边缘出现在视场内，然后调整焦距使边缘清晰，最后将物移动到希望观察的区域。拍照记录傅里叶面上的像。

(选做) 拍照记录相机上的图案，使用代码计算其傅里叶变换(可以参考附录 C 的代码)。我们会发现并不能得到傅里叶面上的像，这是因为相机只记录了强度信息，丢失了相位信息，具体的解释见附录 C。

#### D.5 相干性对成像的影响（选做）

将孔径光阑更换为水平狭缝 S200RD（宽度 200 $\mu\text{m}$ ）。将物 F8 调到视场中心，此时傅里叶面上的图案为三条水平线。将可变狭缝放在傅里叶面上，先将狭缝竖直放置保留衍射光的相干性。然后旋转狭缝使三条条纹在水平方向完全不重合，使照明光完全失去相干性，在相机上可以观察到条纹消失。失去相干性后完全丢失了物的信息，这可以说明成像是光相干传播的结果。

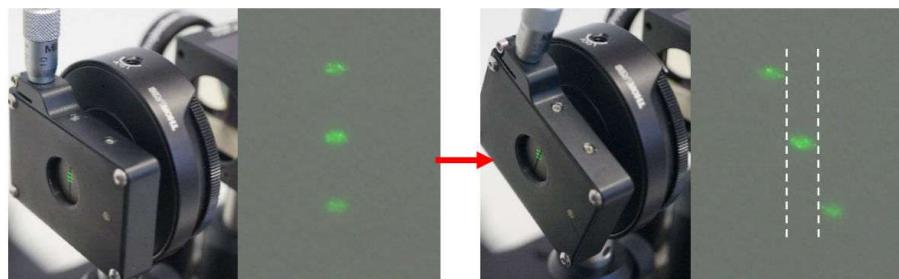


图 12. 相干性对成像的影响操作示意图

#### D.6 暗场显微镜（选做）

暗场显微指完全挡住背景光，仅收集被样品散射的光，这样观察到的视场背景是黑色的，只有样本的边缘是亮的，可以极大的提高衬比度。为了达成暗场的目标，需要挡住傅里叶平面内所有未被散射的光。在物面上首先不放样品，将 EDU-TGC1 (Micro-Structured Mask) 放在傅里叶平面上，使用最大的点状图案挡住所有的光，然后在能挡住全部光的前提下将孔径光阑开到尽量大。然后将硅藻样品放在物镜焦平面上，形成暗场图像，如图 13 所示。

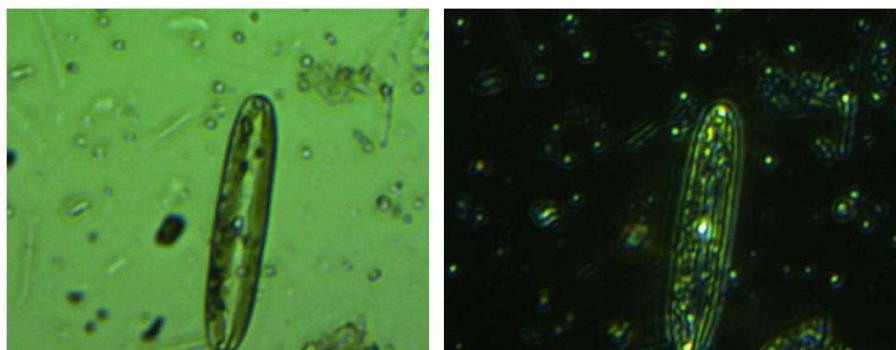


图 13. 暗场显微镜效果图

#### 参考文献

1. Quantum cryptography demonstration kit manual, Thorlabs inc.,  
[https://www.thorlabs.com/newgroupage9.cfm?objectgroup\\_id=11829](https://www.thorlabs.com/newgroupage9.cfm?objectgroup_id=11829)

## 附录 A. 光路搭建说明

本附录中将给出搭建实验光路的步骤并说明每一步的现象，作为实验时的参考。实验光路图见图 2。下文中元件名称后的数字为元件编号。

表 S1. 元件名称编号对照表

元件编号	元件中文名	元件英文名	元件型号
1	相机	Camera	CS165CU/M
2	发光二极管光源	LED	MCWHL7
3	集光透镜（安装在 LED 上）	Collector Lens	ACL2520U-A
4	滤光片	Bandpass Filter	FBH550-40
5	目镜	Tube Lens	AC254-150-A
6	物镜	Objective Lens	AC254-030-A
7	物	Target	EDU-TGB1
8	会聚透镜	Condenser Lens	AC254-050-A
9	孔径光阑	Aperture Iris	ID12/M
10	视场透镜	Field Lens	AC254-150-A
11	视场光阑	Field Iris	ID25/M
12	分束器（或分束镜）	Beam Splitter	BS028
13	投影透镜	Projection Lens	LB1901
14	光学掩膜	Micro-Structured Mask	EDU-TGC1
15	狭缝	Slit	VA100/M+ RSP1D/M

### 1. 粗调元件高度

将所有光学元件光心到面包板的高度调整到约 10cm，不同光学元件之间的高度差应小于 1mm。调整时，先确定相机（1）的高度，将相机（1）压紧在面包板上，然后将所有原件贴紧相机（1）套筒比较高度，用此方法可以准确的调节元件之间的相对高度。调节高度时应同时调整元件朝向，使锁紧旋钮在侧边，以便后续调节光路时方便锁紧。同时，本步应该确保所有的安装座底座 BE1/M 与 PH50/M 之间已用 3mm 扳手拧紧，以防后续光路调节过程中将透镜碰歪。

### 2. 安装相机（1）

将相机（1）固定在面包板一端尽头中间处，相机（1）应尽量与面包板平行（目测即可），以减小后续成像的离轴像差。使用叉式压板 CF125 将相机（1）牢固地压在面包板上，锁紧螺丝时应用力拧紧，以防后续碰歪相机（1）（相机（1）是整个光路的对准标准，若碰歪了需要重调全部元件）。使用叉式压板时应合理选择螺丝孔，使螺丝尽量靠近光学原件增加其力臂，以便产生尽量大的压力。且选择的螺丝孔应位于光路侧面，方便后续操作。另外锁紧螺丝必须搭配垫圈使用，否则会由于摩擦导致光学元件滑动。如图 S2，中间的叉式压板位于光路内，挡住了右侧的光学元件；右侧的叉式压板固定螺丝距离太远，且叉式压板的支点不位于光学平台内。



图 S1. 粗调高度示意图



图 S2. 叉式压板安装示意图



图 S3. LED (2)、相机 (1)、目镜 (5) 安装位置示意图

### 3. 安装 LED (2) 光源及滤光片 (4)

首先调整安装在 LED (2) 上的集光透镜 (3) 的焦距，拧松集光透镜 (3) 的卡环，前后调整集光透镜 (3) 使得出射光大致平行。将 LED (2) 固定在面包板另一端尽头中央，将光屏放在相机 (1) 后，打开 LED (2)，微调 LED (2) 的角度使得相机 (1) 处在被照亮区域的中央。LED (2) 的水平角度通过旋转底座调整，竖直角度通过微调集光透镜 (3) 的焦距调整，(这是因为集光透镜 (3) 的光轴并不与套筒光轴重合)。调整好集光透镜 (3) 焦距后，如图 S2，锁紧其卡环。之后将绿色滤光片 (4) 辫到朝向水平，紧贴 LED (2) 放置。

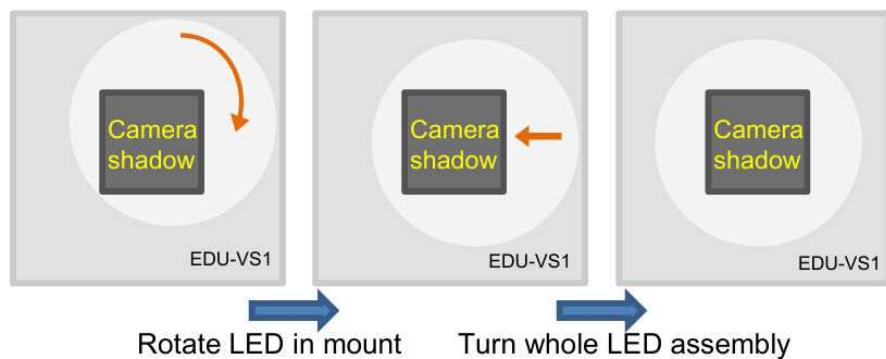


图 S4. 调整 LED (2) 步骤图

### 4. 安装目镜 (5)

首先分辨目镜 (5) 正反，拿起目镜 (5) 观察两个表面的反光，将曲率小 (更平) 的一面朝向相机 (1)，这一面反射光的像更小，固定在距离相机 (1) 约 15cm 处。打开相机 (1)，调整目镜 (5) 左右和上下位置，使 LED (2) 发出的光处在相机 (1) 中央 (可能需要减小 LED (2) 光强并缩短相机 (1) 曝光时间)。之后关闭 LED (2)，在目镜 (5) 前插入一面反射镜 (使用分束器 (12))，使用目镜 (5) 做单透镜成像，调整透镜前后位置，使至少 4m 外的物在相机 (1) 上的像清晰，此时相机 (1) 大约在目镜 (5) 焦平面上，物距越远相机 (1) 越接近焦平面。前后调整目镜 (5) 时需要保持目镜 (5) 垂直于光轴，否则会导致目镜 (5) 前后位置不准，并引入离轴像差。之后反复打开 LED (2) 调整上下左右，关闭 LED (2) 调整前后，过程中始终保持目镜 (5) 与光轴垂直，若干个循环后同时调整好透镜三个方向的位置和角度，将目镜 (5) 的全

部螺丝用螺丝刀拧紧。调好后拆掉分束镜（12）。

#### 5. 安装物镜（6）

将目镜（5）的微调旋钮复原到中间位置（共可以转7圈），分辨目镜（5）正反，将曲率曲率小（更平）的一面朝向LED（2），固定在距离目镜（5）约20cm处。将光屏放在相机（1）与目镜（5）中间，打开LED（2），调整物镜（6）的上下左右和角度，使光屏上被会聚的光处于阴影中间，此时物镜（6）处在光轴上。由于物镜（6）和目镜（5）之间为平行光，物镜（6）的前后位置不需要仔细调整。

#### 6. 安装物（7）

将物（7）的调节旋钮复原到中间位置，分辨物（7）的正反，将镀膜的一面朝向相机（1）。打开LED（2），将光屏放在LED（2）后，调节物（7）的前后使相机（1）上的像大致清晰，调节物（7）的角度使反射光照到LED（2）。同时调好后锁紧物（7），完成粗调。之后调节物（7）的平移旋钮至合适的位置，调节相机（1）曝光时间和LED（2）光强，调节物镜（6）的微调旋钮，使相机（1）上的像清晰。前后调节物镜（6）的微调旋钮，观察画面不同位置是否同时变清晰，如果不是则说明物面（7）与物镜（6）焦面存在夹角，需要微调物（7）的角度后对焦，重复上述调节过程直至同时清晰。

#### 7. 安装会聚透镜（8）

将会聚透镜（8）曲率大的一面朝向LED（2），安装在距离物（7）约5cm处，前后移动会聚透镜（8），使其照亮部分的边缘在物（7）上清晰。同时调节会聚透镜（8）的上下左右位置，使照亮光源照亮的区域处在相机（1）中心。



图 S5. 物镜（6）、物（7）、会聚透镜（8）安装位置示意图

#### 8. 安装孔径光阑（9）

将孔径光阑（9）安装在距离会聚透镜（8）5cm处，改变孔径光阑（9）的左右和高度，使其阴影处于会聚透镜（8）中心。

#### 9. 安装视场透镜（10）

将视场透镜（10）安装在距离孔径光阑（9）15cm处，改变视场透镜（10）的左右和高度，使通过其的光处于孔径光阑（9）中心。

#### 10. 安装视场光阑（11）

将视场光阑（11）安装在距离视场透镜（10）15cm处，改变视场光阑（11）的左右和高度，使相机（1）上的中心部分被照亮。

#### 11. 安装分束器（12）和投影透镜（13）

将分束器（12）安装在距离物镜（6）10cm处（中心到中心），安装时需要给狭缝（15）留出安装空间，调节分束器（12）上下左右，使光通过分束器（12）中央。之后在距离分束器（12）5cm处（中心到中心）安装投影透镜（13），将光屏放置在投影透镜（13）后方，调节光屏的位置使傅里叶面的像清晰。



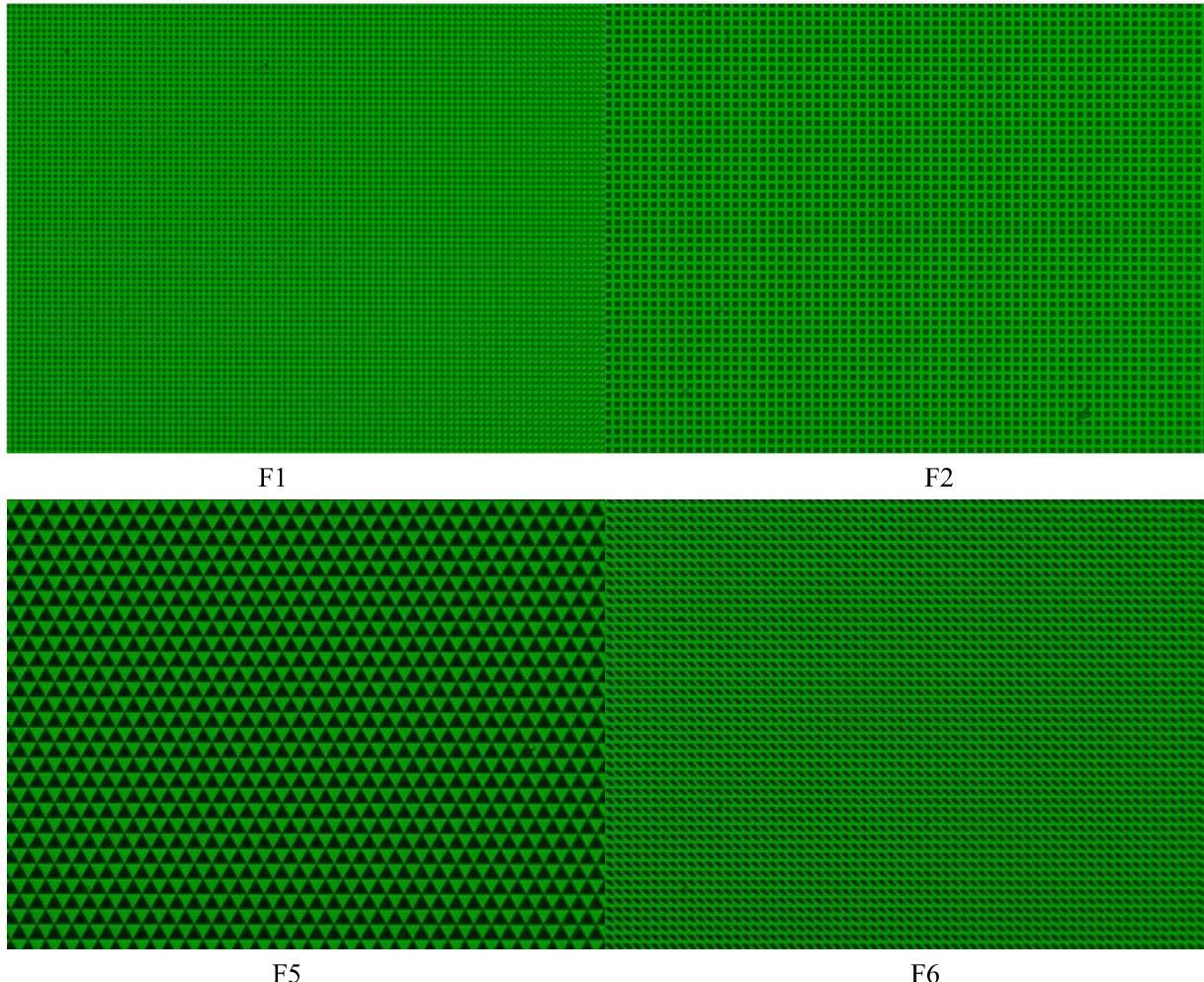
图 S6. 分束镜 (12)、投影透镜 (13)、光屏安装位置示意图

#### 12. 安装傅里叶面滤波器件

根据后续实验需要将光学掩膜 (14)、狭缝 (15)、光阑等元件安装到傅里叶面的位置，调节前后使傅里叶面的像在元件上清晰。

#### 附录 B.

为达到理想的实验效果，显微成像光路需要达到足够好的成像质量。本附录中的图片可以作为参考。



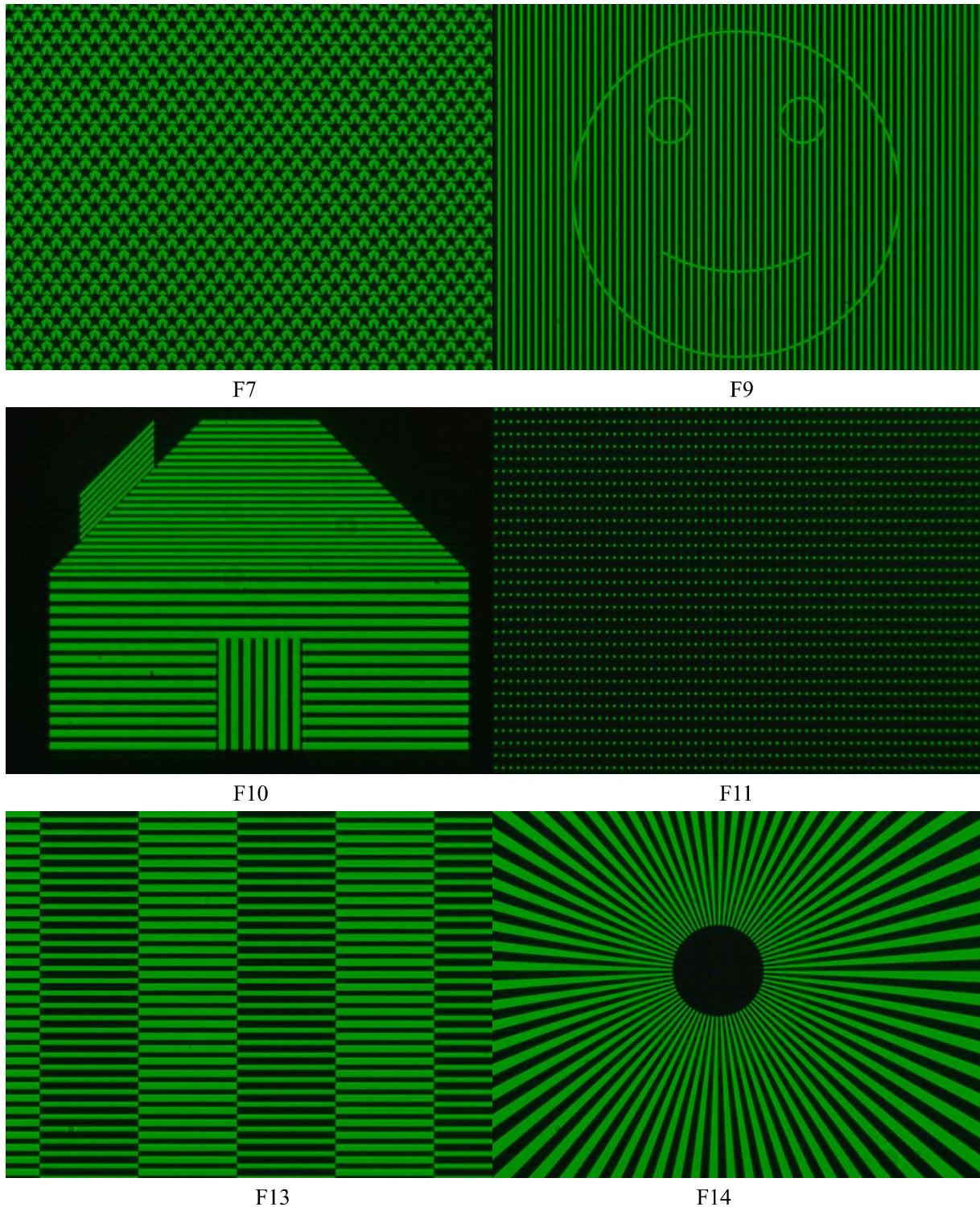


图 S7. 成像质量良好的图片

### 附录 C. 相位信息在傅里叶光学中的作用

当我们观察物镜后面的傅里叶平面时，人眼感知的是振幅，而不能感知相位。这意味着亮度分布本身并不包含衍射结构的完整信息。由于两次傅里叶变换会得到原始图像，一个常见的误解是认为将一个傅里叶面的亮度分布作为物，再次傅里叶变换可以得到原始图像。但是，由于亮度分布不包含必要的相位信息，将一个物（比如一个狭缝）的衍射图案的强度分布放在物平面时，傅里叶面上不会形成此物（狭缝）的像。

如图 S2 所示，我们使用老虎的图像作为示例图像。首先，将原始图像做傅里叶变换，如图 S2a。幅度

和相位分别如图 S2b 和图 S2c。在图 S2d 中，我们仅使用振幅分布进行了第二次傅里叶变换，生成的图像没有可辨别的结构。接下来，使用一个仅由噪声组成的图像（图 S2e）作为振幅，并与原始图像的相位信息一起做傅里叶变换，原始图像在生成的图 S2f 中清晰可见。我们得到的结论是相分布是信息的重要组成部分。即使使用随机振幅信息，相位的傅里叶变换也能够再现可识别的图像。因此，傅里叶变换不能仅简化为振幅信息。

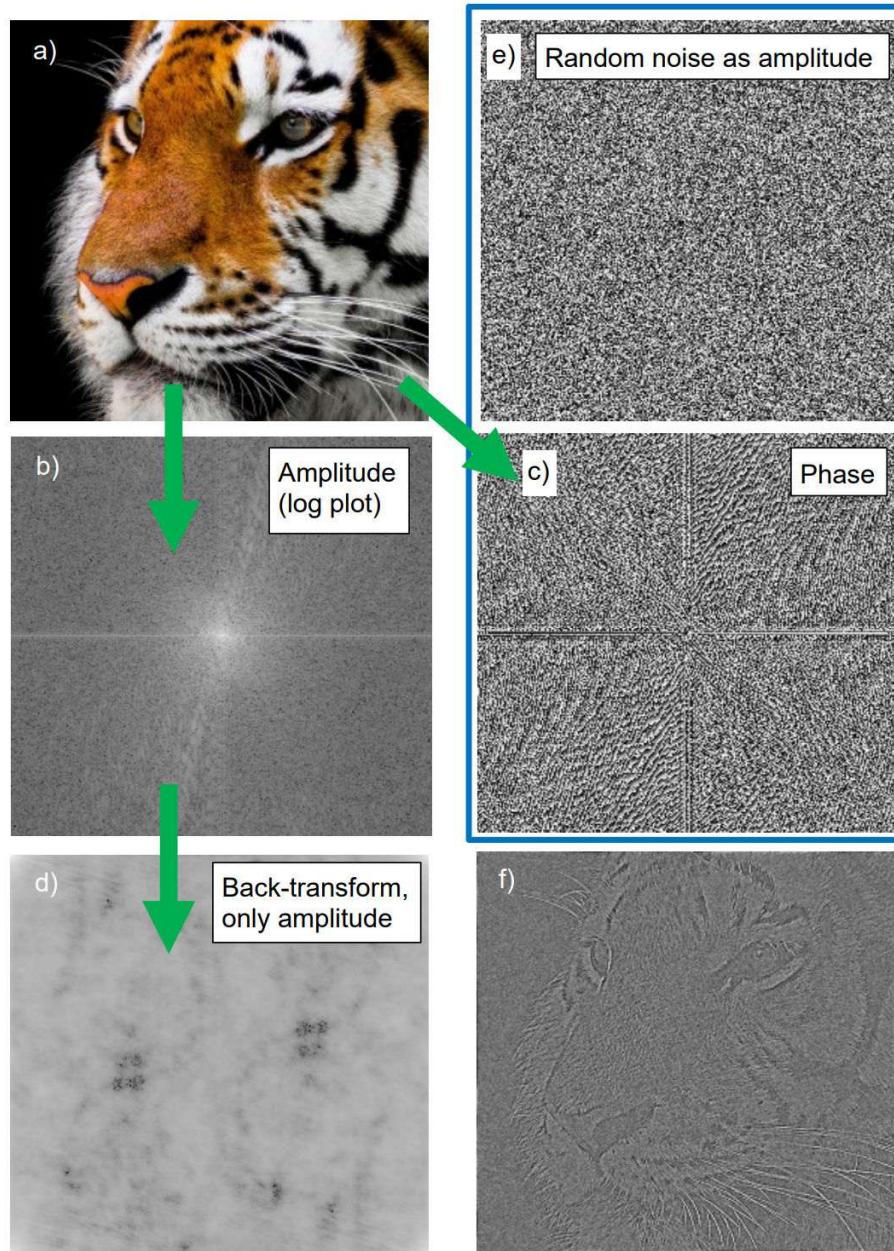


图 S8. 相位信息在傅里叶光学中的作用

此部分的 Matlab 代码如下。

```

clear all;
close all;

% Load image
imdata = imread('Tiger.jpg');
figure(); imshow(imdata); title('Original')

% Transform image from color to greyscale
imdata = rgb2gray(imdata);

% Fourier transform Image and shift pattern so origin is in the center
F = fft2(imdata);
F_shifted = fftshift(F);

% Extract phase and amplitude, F = Amplitude.*exp(ji*Phase)
Amplitude = abs(F_shifted);
Phase = angle(F_shifted);
figure(); imshow(log(Amplitude),[]); title('Fourier Trafo: log(Amplitude)');
figure(); imshow(Phase,[]); title('Fourier Trafo: Phase');

% Transform back: only amplitude, no phase
ONLY_AMPL = Amplitude;
Manual_F_backshift = ifftshift(ONLY_AMPL);
Manual_F_back = ifft2(Manual_F_backshift);
figure(); imshow(log(Manual_F_back),[]); title('Only Amplitude transformed
back, log-Plot');

% Transform back: amplitude is random, include phase
Dimension = size(F);
Noise = rand(Dimension(1),Dimension(2));
figure(); imshow(Noise,[]); title('Noise')
PHASEwithNOISE = Noise.*exp(ji.*Phase);
PHASEwithNOISE_backshift = ifftshift(PHASEwithNOISE);
PHASEwithNOISE_back = ifft2(PHASEwithNOISE_backshift);
figure(); imshow(PHASEwithNOISE_back,[]); title('Random Amplitude with Phase
transformed back')

```