

烟幕干扰弹的投放策略

摘要

本文围绕无人机投放烟幕干扰弹抵御空地导弹、保护固定目标的问题展开建模与分析，旨在通过优化无人机飞行参方向与速度及烟幕干扰弹投放、起爆参数，最大化真目标的有效遮蔽时长。

一、问题背景与重述

1.1 问题背景

烟幕干扰弹可通过化学燃烧或爆炸形成烟幕或气溶胶云团，在目标前方特定空域形成遮蔽以干扰敌方导弹，具备成本低、效费比高的优势，且当前已实现定点精确抛撒，能通过时间引信时序控制起爆时间。本文针对无人机投放烟幕干扰弹的策略设计，利用无人机挂载烟幕干扰弹在特定空域巡飞，当警戒雷达发现导弹后，无人机接收任务并投放烟幕干扰弹，在导弹与保护目标间形成烟幕遮蔽，以避免来袭导弹发现真目标。问题涉及的关键参数与初始条件如下：

(1) 目标与导弹信息：真目标为半径 7m、高 10m 的圆柱。其底面圆心坐标为(0,200,0)，另有一个假目标，坐标设为原点。三枚导弹(M1,M2,M3)飞行速度均为 300m/s，警戒雷达发现初始位置为(20000,0,2000),(19000,600,2100),(18000,-600,1900)。

(2) 无人机信息：共有 5 架无人机 FY1-5，初始位置分别为(17800,0,1800)，(12000,1400,1400),(6000,-3000,700),(11000,2000,1800),(13000,-2000,1300)；无人机接收任务后瞬时调整飞机方向，随后以 70-140m/s 的速度等高度匀速直线飞行，航向与速度确定后不再调整，且每架无人机投放两枚烟幕干扰弹之间的时间间隔至少为 1s。

(3) 烟幕云团信息：烟幕干扰弹起爆后瞬时形成球状烟幕云团，以 3m/s 的速度匀速下沉，云团中心 10m 的范围内烟幕浓度在起爆 20s 内可为目标提供有效屏障。

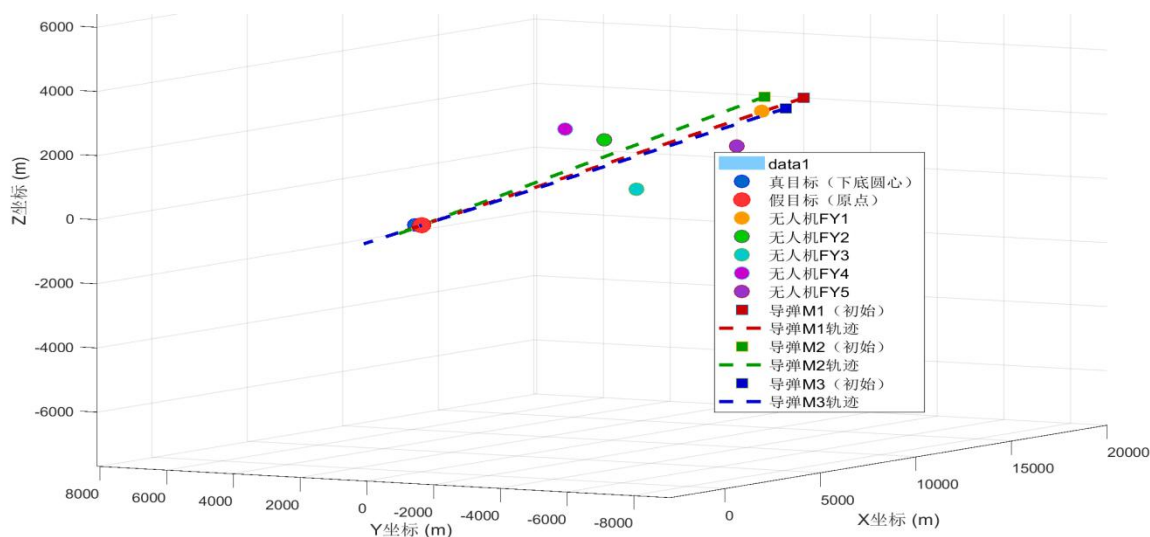


图 1 相关位置 3D 可视化

1.2 问题重述

烟幕干扰弹投放策略需明确无人机飞行方向、飞行速度、烟幕干扰弹投放点、烟幕干扰弹起爆点等核心内容，最终目标是使多枚烟幕干扰弹对真目标的有效遮蔽时间尽可能长，具体需解决以下 5 个问题：

问题一：仅使用无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对导弹 M1 实施干扰，已知 FY1 以 120m/s 的速度朝向假目标方向飞行，受领任务 1.5s 后投放该干扰弹，投放后间隔 3.6s

起爆，需计算此条件下烟幕干扰弹对 M1 的有效遮蔽时长。

问题二：仍使用无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对 M1 实施干扰，需确定 FY1 的飞行方向与速度，烟幕干扰弹的投放点与起爆点，实现对真目标有效遮蔽时间最大化。

问题三：使用无人机 FY1 投放 3 枚烟幕干扰弹对 M1 实施干扰，需设计投放策略以实现有效遮蔽时长最大化。

问题四：协调使用 FY1、FY2、FY3 共 3 架无人机，每架无人机各投放 1 枚烟幕干扰弹对 M1 实施干扰，需制定协同投放策略，最大化遮蔽时长。

问题五：调度全部 5 架无人机，每架无人机至多投放 3 枚烟幕干扰弹，同时对 M1、M2、M3 共 3 枚来袭导弹实施干扰，需设计全局投放策略，实现遮蔽时长最大化目标。

二、模型假设

1. 假设无人机接收任务后瞬间调整飞机方向，无气流或设备故障导致速度波动航向偏移。
2. 假设烟幕弹脱离无人机后只受重力作用，忽略空气阻力所造成的影响。
3. 烟幕弹起爆后瞬时形成保持标准球状烟幕云团，云团以 3m/s 匀速下落，无变形情况。
4. 警戒雷达发现并下命令时间无延迟，无人机接受命令并行动也无延迟。
5. 假设烟幕云团在 20s 时间内，半径为 10m 的范围内浓度始终满足有效遮蔽标准，且超出部分没有任何遮蔽效果，判断标准不随环境变化。
6. 假设真目标和假目标在整个过程中位置固定，且导弹始终以假目标为攻击指向，不主动识别或转向真目标。

三、符号说明

四、问题分析

4.1 问题一分析

问题一旨在特定条件下计算无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对导弹 M1 的有效遮蔽时长，给定 FY1 速度 120m/s，朝向假目标飞行，1.5s 后投放干扰弹，投放后 3.6s 起爆，无需优化参数，仅需精准计算与判定。本文首先定义有效遮蔽需满足导弹 M1 到真目标圆柱体外围任意点的连线均与烟幕云团球体相交。由于计算量极大，本文依据几何推断找到圆柱上最有可能突破遮挡的关键点位。基于导弹与烟幕云团的实时位置，本文以导弹为顶点、烟幕云团为底面构建遮蔽锥模型，代表导弹视线被烟幕遮蔽的全部空间。接着构建真目标圆柱体的几何模型，提取其表面的夹角极值点。对烟幕起爆后 20s 内的每个时间点，计算导弹与极值点的视线向量，判断该向量与遮蔽锥中轴线的夹角是否小于

等于半顶角：若所有极值点均满足，则该时刻为有效遮蔽。最后统计所有有效遮蔽时刻的时间区间，累加得到总有效遮蔽时长。

4.2 问题二分析

问题二核心是在无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对抗导弹 M1 的场景下，通过优化无人机飞行方向、速度及烟幕弹投放点、起爆点，实现真目标有效遮蔽时长最大化。从求解的角度看，设立的有效遮蔽时长目标函数无封闭解析表达式，需通过时间步进数值模拟计算遮蔽时长，且决策变量为四维且存在非线性交互，传统优化算法容易陷入局部最优。因此本文设想采用遗传算法这种元启发式算法，通过编码决策变量、初始化种群、评估适应度、选择-交叉-变异操作及精英保留策略，在复杂搜索空间中高效寻找最优参数组合，最终实现遮蔽时长最大化。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：基于导弹-圆柱视线验证的有效遮蔽时长计算模型

本文通过合理定义有效遮挡，先计算得到起爆点，再结合烟幕云团 3m/s 匀速下沉特性，得起爆后 20s 内云团位置，同时计算 M1 在有效时段内位置。将遮挡区域定义为一个圆锥（切线锥），选取真目标椭圆截面 4 个关键点，分别计算连线与圆锥中轴线的余弦角大小，判断真目标是否完整在切线锥内，将符合要求的时间点累加得到有效遮蔽时长。

5.1.1 有效遮挡定义

有效遮挡需满足“导弹 M1 观察真目标的所有视线均被烟幕云团遮挡”，即导弹 M1 在烟幕有效时间内，其到真目标圆柱体外围任意点的连线，均与烟幕云团球体相交。若存在某条连线不与云团相交，则判断为无效遮挡。

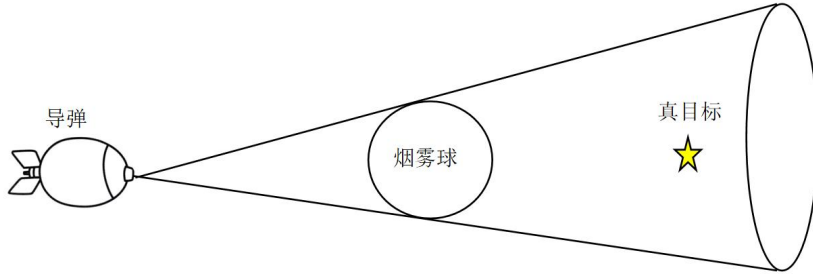


图 2 烟幕干扰弹有效遮挡示意图

5.1.2 各组件动态状态建模

Step 1: 导弹轨迹公式计算

因为导弹 M1 以恒定的速率 300m/s 飞向坐标原点（假目标），本文设 M1 的初始位置为 $P_{M1}(0)$ ，将速度绝对值与飞行单位方向向量相乘，得到速度向量 V_{M1} ：

$$V_{M1} = -300 \cdot \frac{P_{M1}(0)}{\|P_{M1}(0)\|} \quad (5.1-1)$$

故导弹在任意时刻 $t > 0$ 的位置由标准运动学方程给出： $P_{M1}(t) = P_{M1}(0) + V_{M1}t$ 。

Step 2: 无人机与烟幕弹轨迹

由题可得，无人机 FY1 在接收任务后，朝向假目标方向进行等高匀速直线飞行。由于高度不变，故其飞行单位方向向量为 $(-1, 0, 0)$ 。其速度恒定为 120m/s，可得速度向量： $V_{uav} = 120 \cdot (-1, 0, 0)$ 。在投放烟幕弹前，即 $0 \leq t \leq t_{react}$ 时间内，无人机的位置为：

$$P_{uav}(t) = P_{uav}(0) + V_{uav}t \quad (5.1-2)$$

在时刻 $t = t_{react} = 1.5s$ ，烟幕弹被投放。其初始速度等于该时刻无人机的速度，随后在重力作用下做抛体运动。故投放位置为 $P_{release} = P_{uav}(t_{react}) = P_{uav}(0) + 1.5 \cdot V_{uav}$ 。令自由落

体时间 $t_{fall} = 3.6s$ ，在 $0 \leq \tau \leq t_{fall}$ ，烟幕弹位置为： $P_G(t) = P_{release}(0) + V_{uav}\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$ 。

Step 3: 烟幕云团中心轨迹

烟幕弹在 $t_{break} = t_{react} + t_{fall} = 1.5 + 3.6 = 5.1s$ 时起爆。烟幕云团初始位置（爆炸）为：

$$P_{break} = P_G(t_{fall}) = P_{release} + V_{UAV}t_{fall} + \frac{1}{2}g_{fall}^2 \quad (5.1-3)$$

起爆后，云团以 3m/s 匀速下沉。令 $t' = t - t_{break}$ 为起爆时刻起的时间在 20s 有效时间内，云团中心位置为： $P_C(t') = P_{break} + 3 \cdot t'$ 。

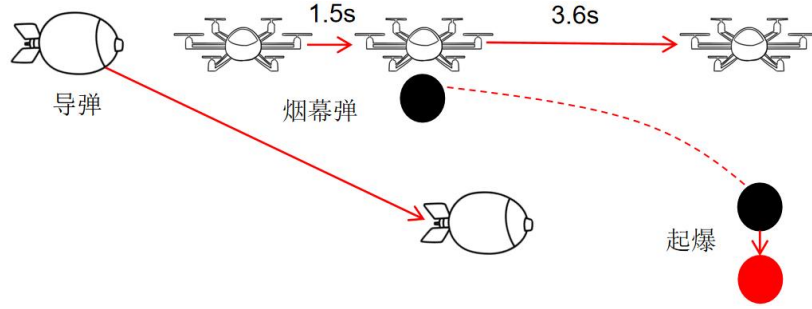


图 3 各组件动态状态变化示意图

5.1.3 完全遮蔽的几何条件

本节将问题从运动学分析转向在每一 t 需解决的静态几何问题：判断是否完全遮蔽。

(1) 遮蔽锥模型构建

在起爆后的任意时刻，位于 P_M 的导弹和中心为 P_C 、半径为 r_C 的烟幕云团，共同定义了一个圆锥体，本文将其称为遮蔽锥，代表了导弹视点被烟幕云团所遮蔽的全部空间。

接着，本文确定了几个关键几何属性，中轴线向量： $\vec{d} = P_C - P_M$ 。而关于半顶角，考虑由导弹位置、云团中心和球体任意切点构成的直角三角形，该三角形的斜边长为导弹与云团中心的距离 $\|P_C - P_M\|$ ，角 α 的对边云团半径 r_C 。因此可得：

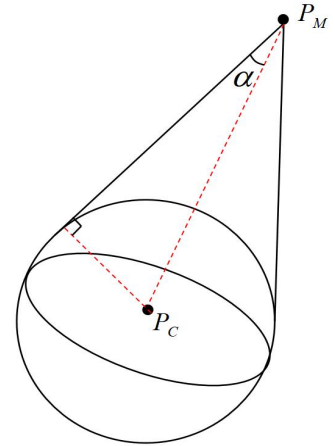


图 4 遮蔽锥示意图

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r_C}{\|P_C - P_M\|}\right) \quad (5.1-4)$$

(2) 目标圆柱体几何构建

目标是一个底面半径 7m、高 10m 的正圆柱体。其底面圆心位于(0,200,0)，中轴线与 z 轴平行，属于该圆柱体点集 $P = (x, y, z)$ 满足以下条件：

$$x^2 + (y - 200)^2 \leq 7^2, 0 \leq z \leq 10 \quad (5.1-5)$$

(3) 遮蔽的基本判据

在给定时刻，当且仅当目标圆柱体 Z 的全部体积都被包含在遮蔽锥 C 的体积，发生完全遮蔽，表述为： $Z \subset C$ 。对于圆柱体表面任意点 Q ，从导弹出发视角向量 $\vec{v} = Q - P_M$ 与中轴线向量 \vec{d} 之间夹角 θ ，必须小于等于遮蔽锥半顶角。

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{d}|} \right) \leq \alpha \quad (5.1-6)$$

由于计算圆柱体表面所有点计算量过大，本文选取圆柱夹角极值点进行计算。本文认为，由导弹，圆锥中轴线，底面圆心共同构成的平面与圆柱相交的四边形的四个点为夹角的极值点，见下图。

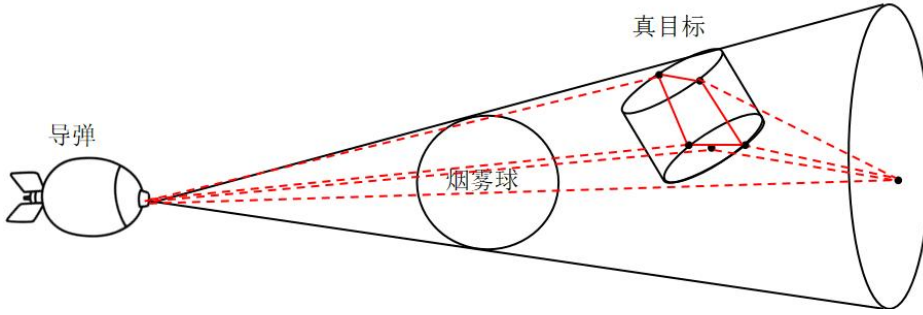


图5 夹角极值点示意图

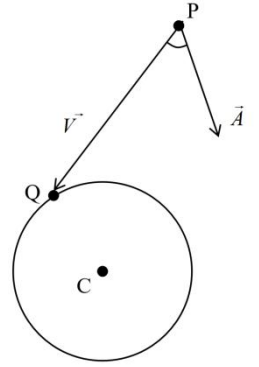


图6 推导示意图

5.1.4 夹角极值点位置推导证明

设圆 c 为一个以 C 为圆心的圆。设 P 为圆外一点， A 为一个固定的方向向量， Q 为圆 c 上任意一点，向量 PQ 与向量 A 之间的夹角 θ 取得极值的条件是：点 Q 位于由点 C 、 P 以及方向向量 A 所定义的平面上。

令从 P 指向 Q 的向量为 V ， V 与 A 之间的夹角 θ 可由点积给出： $\cos \theta = \frac{A \cdot V}{|A||V|}$ 。求解夹角 $\theta \in [0, \pi]$ 的极值，等价于求解 $\cos \theta$ 的极值。由于 $|A|$ 是一个常数，我们的目标是找到以下函数的极值： $f(Q) = \frac{A \cdot (Q-P)}{|Q-P|}$ 。

本文用变量 t 对圆进行参数化，即 $Q=Q(t)$ 。因此 $V=V(t)=Q(t)-P$ 。为了找到极值，我们需对 f 关于 t 求导，并令其导数等于 0。

$$\frac{d}{dt} f(Q(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A \cdot V}{|V|} \right) = 0 \quad (5.1-7)$$

根据商的求导法则，要求分子为 0。令 $V' = \frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt}$ 为圆在 Q 点的切向量。我们知道 $\frac{d}{dt}(A \cdot V) = A \cdot V'$ ，以及 $\frac{d}{dt}|V| = \frac{V \cdot V'}{|V|}$ 。将这些带入并化简，我们得到：

$$[A|V|^2 - V(A \cdot V)] \cdot V' = 0 \quad (5.1-8)$$

令 $W = A|V|^2 - V(A \cdot V)$ ，那么极值条件是 $W \cdot V' = 0$ 。根据定义，向量 W 必须与切向量 V' 正交。在 Q 点，任何与圆的切线正交的向量都必须位于其法平面内。该法平面包含径向向量 $Q-C$ 。根据其构造， W 是向量 A 和 V 的一个线性组合。因此， W 位于由 A 和 V 所张成的平面内。结合以上事实，要使极值出现，向量 A 、 V 和 CQ 必须共面。这是

因为 W 必须同时位于 $\{A, V\}$ 所在的平面和包含向量 CQ 的法平面内。要满足此条件，这三个向量必须位于同一个平面上。 $\{A, V, CQ\}$ 共面是关键条件。我们可以用从圆心出发的向量来表示 V : $V = Q - P = (Q - C) - (P - C) = \vec{CQ} - \vec{CP}$ 。因此向量集 $\{\vec{CQ}, \vec{CP}, A\}$ 共面。

这意味着点 Q 必须位于一个同时包含向量 CP 和向量 A 的平面。这正是由圆心 C 、点 P 和方向向量 A 所定义的平面。

5.1.5 综合遮蔽时长计算与分析

通过上述计算，我们首先得到基础位置信息，见下表 1。

表 1 基础位置信息

无人机初始位置	烟幕弹投放点	烟幕弹起爆点	导弹飞行方向向量
(17800,0,1800)	(17620,0,1800)	(17188,0,1736.496)	(-0.9950,0,-0.0995)

烟雾弹于开始计时后 5.1s 起爆，有效遮蔽时长在起爆后 2.94s-4.33s。故有效遮蔽时间段为 8.04s-9.43s，有效遮蔽时长为 1.39s。

5.2 问题二：基于遗传算法的单枚干扰弹最优投放策略模型

本题旨在解决问题二的优化任务：确定无人机 FY1 投放单枚烟幕干扰弹对抗导 M 的最优策略，其目标是最大化对真目标的总有效遮蔽时长。本文采用遗传算法求解最优。

5.2.1 优化问题数学规划

该任务核心是寻找一组能够产生最大化遮蔽时长的无人机及其有效控制参数。此问题可被形式化的定义为数学优化问题。

(1) 决策变量：

问题二求解策略由四个关键参数定义，分别为无人机飞行速度大小 v ，无人机飞行方向角 θ ，无人机投放前飞行时间 t_{uav} ，干扰弹起爆掩饰 t_{break} 。这些参数共同构成决策变量向量 $X = [v, \theta, t_{uav}, t_{break}]$ 。

(2) 约束条件：

对最优向量 X 的搜索受到问题描述中明确的物理和操作约束限制，包括：无人机飞行速度大小需满足 $70m/s \leq v \leq 140m/s$ ；飞行方向角满足 $0rad \leq \theta \leq 2\pi rad$ ；另外飞行时间和起爆延迟时间需满足 $0s \leq t_{uav} \leq 10s$ ， $0s \leq t_{break} \leq 15s$ 。无约束的飞行或起爆时间将导致无限搜索空间。这些界限合理地将搜索范围限制在导弹距目标尚有相当距离的、具有战略意义的时间窗口。

(3) 目标函数：

该题首要目标是最大化总有效遮蔽时间 T_{total} 。该时间实在烟幕云团 20s 有效生命周期内，真目标被完全遮蔽在导弹视线之外的累积时长。本文设 $Obs(t, X)$ 为一个二元函数，当策略 X 在时间 t 能够完全遮蔽目标时返回 1，否则返回 0。目标函数即为该函数在云团有效作用期内的积分：

$$\text{Maximize } T_{total}(X) = \int_{t_{start}}^{t_{end}} \text{Obs}(t, X) dt \quad (5.2-1)$$

其中, $t_{start} = t_{uav} + t_{break}$ 是起爆时刻, $t_{end} = t_{start} + 20$ 是云团消散时刻。

5.2.2 关于 Obs(t,X)函数的构建

(1) 动态系统时空轨迹建模

为了评估任何给定策略 X 的目标函数值, 首先为场景中每个运动实体建立精确的运动学模型, 根据问题一, 本文建立以假目标为原点的坐标系, 得到各实体轨迹见附录二。

(2) 有效遮蔽几何判据模型

按照问题一的方式构建遮蔽锥, 其中锥中轴线向量为 $L(t) = P_{cloud}(t) - P_{M1}(t)$, 半顶角:

$$\alpha(t) = \arcsin \left(\frac{R_{cloud}}{\|L(t)\|} \right) \quad (5.2-2)$$

如问题一夹角极值点所证, 通过筛选目标关键点简化计算, 为了实现有效遮蔽, 锥轴 $L(t)$ 与从导弹到每个关键点的向量 V 之间的夹角 $\beta_i(t)$ 必须小于等于锥的半顶角。

$$\beta_i(t) = \arccos \left(\frac{L(t) \cdot V_i(t)}{\|L(t)\| \cdot \|V_i(t)\|} \right) \quad (5.2-3)$$

因此, 二元遮蔽函数定义为:

$$\text{Obs}(t, X) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max \{ \beta_i(t), i \in [1, 4] \} \leq \alpha(t) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5.2-4)$$

5.2.3 遗传算法具体求解

由于目标函数 $T_{total}(X)$ 缺乏封闭形式的解析表达式, 其最优值只能通过基于上述运动学和几何模型的时间步进数值模拟来确定, 加之高维度和非线性变量相互作用, 使得普通优化算法不适用。因此, 我们采用遗传算法(GA), 这是一种受自然进化启发的强大元启发式算法, 非常适合于探索此类复杂的搜索空间。具体实现流程如下:

Step 1: 编码

每个潜在的解决方案被表示为一个实质向量 $X = [v, \theta, t_{uav}, t_{break}]$, 直接对应决策变量。

Step 2: 种群初始化

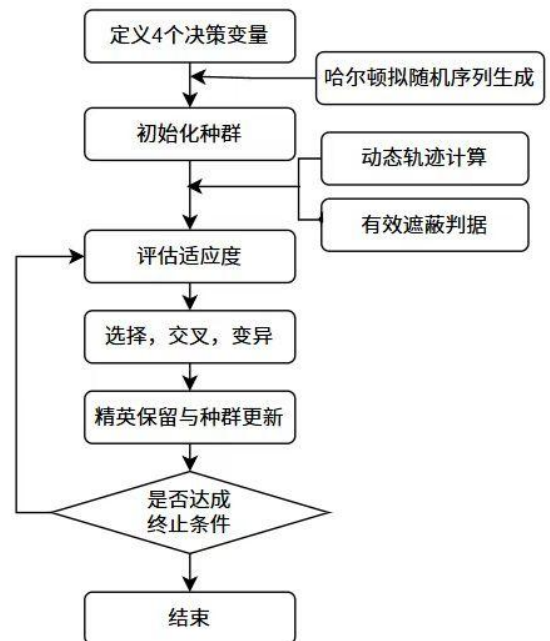


图 7 遗传算法流程图

算法没有采用标准的伪随机初始化, 而是使用哈尔顿拟随机序列。拟随机序列旨在

比随机点更均匀地覆盖搜索空间，减少聚类 and 间隙。这会产生一个更高质量的初始种群，并通常能加速收敛到好的解。

Step 3: 适应度评估

每个个体 X 的适应度在本题中就是其对应的目标函数 $T_{total}(X)$ 。本文以一个很小的步长(0.01s)模拟 0-20s 云团持续时间的场景，二元遮蔽函数 $Obs(t, X)$ 进行积分。

Step 4: 选择、交叉、变异

选择是使用锦标赛选择机制。每一步随机从种群中选择两个个体，适应度较高的个体被选中成为下一代的父代。接着交叉是以高概率应用模拟二进制交叉(SBX)。它创建的两个子代融合父代特征。然后以一定概率应用多项式变异(PM)。该算子进行较小随机波动，为种群引入新的遗传物质，帮助算法逃离局部最优。

Step 5: 精英保留

当前代中的最佳个体被明确保留并直接进入下一代。这确保了算法的性能是单调不减的，并且找到的最佳解永远不会丢失。

5.2.4 模型求解结果与策略分析

经过上述过程，得到四个参数共同描绘的完整优化策略：无人机以沿 x 轴方向 102.78m/s、沿 y 轴方向 0.12m/s 的速度和方向飞行 0.11s，然后投放干扰弹，干扰弹再经过 0.82s 的自由落体后引爆，以达到期望的最佳遮蔽效果。

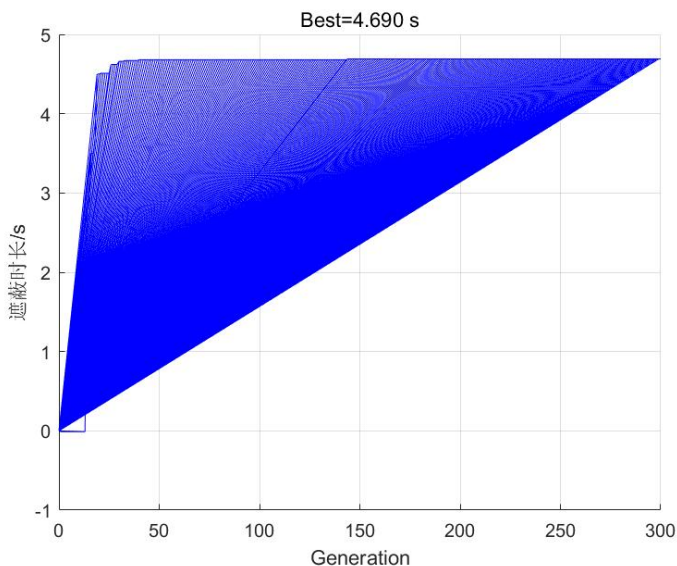


图 8 问题二输出结果

由左图可得，在前 50 代上曲线增长速率打，得益于哈尔顿序列生成，迅速淘汰大量劣质解；50-100 代上曲线上升速度放缓，种群个体变得更为相似；在 100 代以后，上曲线几乎变为一条水平线，紧贴着最优值 4.69s。此时算法中采用的高分布指数的交叉变异算子起关键作用，进行精细局部搜索和微调。

这张收敛曲线图清晰的表明，本文成功地在一个复杂四维空间中找到了一个能提供 4.69 秒遮蔽时长的优秀策略。

六、模型评价

七、模型扩展

八、参考文献

附录

附录一

附录二

问题二：动态系统时空轨迹建模

1. 导弹 M1 轨迹

$$P_{M1}(t) = P_{M1}(0) + V_{M1} \cdot t \quad (9-1)$$

2. 无人机 FY1 轨迹

$$P_{uav}(t) = P_{uav}(0) + V_{uav} \cdot t \quad (9-2)$$

其中无人机的速度向量为： $V_{uav} = [v \cos(\theta), v \sin(\theta), 0]$ 。

3. 烟幕弹轨迹

$$P_{yandan}(t) = P_{release} + V_{release} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \quad (9-3)$$

其中投放点 $P_{release} = P_{uav}(t_{uav})$ ； $V_{release} = V_{uav}$ ； $\Delta t = t - t_{uav}$ 。

4. 烟幕云团中心轨迹

$$P_{cloud}(t) = P_{break} + V_{cloud} \cdot \Delta t' \quad (9-4)$$

其中，起爆点 $P_{break} = P_{yandan}(t')$ ；起爆时刻 $t' = t_{uav} + t_{break}$ ； $V_{cloud} = -3m/s$ ； $\Delta t' = t - t'$ 。
