

烟幕干扰弹的投放策略

摘要

本文围绕无人机投放烟幕干扰弹抵御空地导弹、保护固定目标的问题展开建模与分析，旨在通过优化无人机飞行参方向与速度及烟幕干扰弹投放、起爆参数，最大化真目标的有效遮蔽时长。

针对问题一，无人机 FY1 投放 1 枚干扰弹对导弹 M1 实施干扰的特定场景，本文通过构建**运动学模型**与**几何判定模型**，计算有效遮蔽时长。首先明确各组件动态轨迹：无人机投放前沿 x 轴负方向飞行，投放点为(17620,0,1800)；烟幕弹投放后做抛体运动，起爆点为(17188,0,1736.496)。再构建**遮蔽锥模型**与**目标圆柱体模型**，通过几何关系证明选取**圆柱夹角极值点**简化判定，当导弹到所有极值点的视线向量与遮蔽锥中轴线夹角均小于等于半顶角时，判定为有效遮蔽。最终得出有效遮蔽时长为 1.39s。

针对问题二，无人机 FY1 投放 1 枚干扰弹对抗导弹 M1，最大化真目标有效遮蔽时长的问题，本文通过构建规划模型并采用**遗传算法**，确定最优投放策略。首先确定**四维决策变量**及其约束条件，以云团 20s 有效期内真目标完全遮蔽的累积时长为目标函数。求解阶段采用遗传算法，通过**哈尔顿拟随机序列**初始化种群以均匀覆盖解空间；按 0.01s 时间步长模拟云团作用过程评估个体适应度；采用**锦标赛选择**、**二进制交叉**、**多项式变异**操作更新种群，并保留精英个体确保性能不退化。最终得到最优有效遮蔽时长 4.69s。

针对问题三，在问题二的基础上投放 3 枚干扰弹，本文通过构建**八维优化模型**与**扩展遗传算法**框架，设计最优投放策略。沿用第二问的规划模型，并设立**累积遮蔽模型**将目标函数定义为云团有效遮蔽时间集合并集，通过**复合布尔函数**评估遮蔽有效性；再次沿用扩展遗传算法，得到最优有效遮蔽时长为 6.39s。

针对问题四，协调三架无人机各投放 1 枚干扰弹对抗导弹 M1，以最大化有效遮蔽时长，通过构建**12 维协同优化模型**并采用**自适应变异粒子群优化算法**，制定最优协同投放策略。首先将 3 个 4 维向量组成 12 维联合策略向量 X，目标函数同问题三。求解阶段采用 AM-PSO 算法：先生成初始粒子并评估适应度；迭代过程中采用**线性递减策略**更新惯性权重；在自适应变异策略上，通过归一化方差感知种群聚集度，再通过**高斯-柯西混合变异**和**小波变异**避免陷入局部最优，得到最优解为 8.97s。

针对问题五，

关键词：遮蔽锥，遗传算法，自适应变异粒子群优化，累积遮蔽模型，

一、问题背景与重述

1.1 问题背景

烟幕干扰弹可通过化学燃烧或爆炸形成烟幕或气溶胶云团，在目标前方特定空域形成遮蔽以干扰敌方导弹，具备成本低、效费比高的优势，且当前已实现定点精确抛撒，能通过时间引信时序控制起爆时间。本文针对无人机投放烟幕干扰弹的策略设计，利用无人机挂载烟幕干扰弹在特定空域巡飞，当警戒雷达发现导弹后，无人机接收任务并投放烟幕干扰弹，在导弹与保护目标间形成烟幕遮蔽，以避免来袭导弹发现真目标。问题涉及的关键参数与初始条件如下：

(1) 目标与导弹信息：真目标为半径 7m、高 10m 的圆柱。其底面圆心坐标为(0,200,0)，另有一个假目标，坐标设为原点。三枚导弹(M1,M2,M3)飞行速度均为 300m/s，警戒雷达发现初始位置为(20000,0,2000),(19000,600,2100),(18000,-600,1900)。

(2) 无人机信息：共有 5 架无人机 FY1-5，初始位置分别为(17800,0,1800)，(12000,1400,1400),(6000,-3000,700),(11000,2000,1800),(13000,-2000,1300)；无人机接收任务后瞬时调整飞机方向，随后以 70-140m/s 的速度等高度匀速直线飞行，航向与速度确定后不再调整，且每架无人机投放两枚烟幕干扰弹之间的时间间隔至少为 1s。

(3) 烟幕云团信息：烟幕干扰弹起爆后瞬时形成球状烟幕云团，以 3m/s 的速度匀速下沉，云团中心 10m 的范围内烟幕浓度在起爆 20s 内可为目标提供有效屏障。

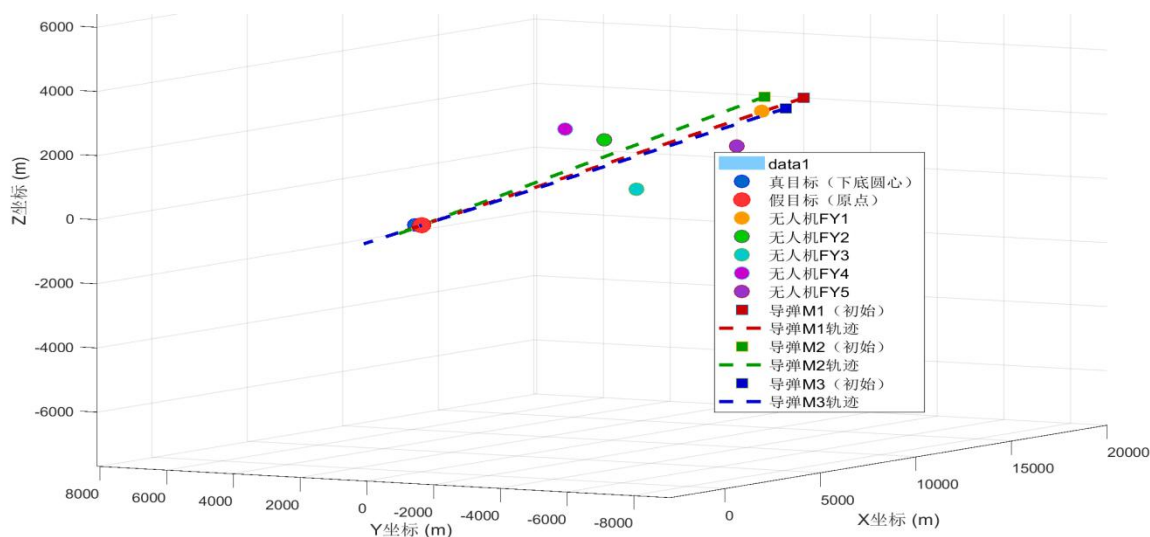


图 1 相关位置 3D 可视化

1.2 问题重述

烟幕干扰弹投放策略需明确无人机飞行方向、飞行速度、烟幕干扰弹投放点、烟幕干扰弹起爆点等核心内容，最终目标是使多枚烟幕干扰弹对真目标的有效遮蔽时间尽可能长，具体需解决以下 5 个问题：

问题一：仅使用无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对导弹 M1 实施干扰，已知 FY1 以 120m/s 的速度朝向假目标方向飞行，受领任务 1.5s 后投放该干扰弹，投放后间隔 3.6s

起爆，需计算此条件下烟幕干扰弹对 M1 的有效遮蔽时长。

问题二：仍使用无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对 M1 实施干扰，需确定 FY1 的飞行方向与速度，烟幕干扰弹的投放点与起爆点，实现对真目标有效遮蔽时间最大化。

问题三：使用无人机 FY1 投放 3 枚烟幕干扰弹对 M1 实施干扰，需设计投放策略以实现有效遮蔽时长最大化。

问题四：协调使用 FY1、FY2、FY3 共 3 架无人机，每架无人机各投放 1 枚烟幕干扰弹对 M1 实施干扰，需制定协同投放策略，最大化遮蔽时长。

问题五：调度全部 5 架无人机，每架无人机至多投放 3 枚烟幕干扰弹，同时对 M1、M2、M3 共 3 枚来袭导弹实施干扰，需设计全局投放策略，实现遮蔽时长最大化目标。

二、模型假设

1. 全文 g 取 9.8 m/s^2 。
2. 假设无人机接收任务后瞬间调整飞机方向，无气流或设备故障导致速度波动航向偏移。
3. 假设烟幕弹脱离无人机后只受重力作用，忽略空气阻力所造成的影响。
4. 假设有效遮挡是导弹指向真目标视线全部被烟幕云团遮挡。
5. 烟幕弹起爆后瞬时形成保持标准球状烟幕云团，云团以 3 m/s 匀速下落，无变形情况。
6. 警戒雷达发现并下命令时间无延迟，无人机接受命令并行动也无延迟。
7. 假设烟幕云团在 20s 时间内，半径为 10m 的范围内浓度始终满足有效遮蔽标准，且超出部分没有任何遮蔽效果，判断标准不随环境变化。
8. 假设真目标和假目标在整个过程中位置固定，且导弹始终以假目标为攻击指向，不主动识别或转向真目标。

三、符号说明

四、问题分析

4.1 问题一分析

问题一旨在特定条件下计算无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对导弹 M1 的有效遮蔽时长，给定 FY1 速度 120 m/s ，朝向假目标飞行，1.5s 后投放干扰弹，投放后 3.6s 起爆，无需优化参数，仅需精准计算与判定。

本文首先定义有效遮蔽需满足导弹 M1 到真目标圆柱体外围任意点的连线均与烟幕云团球体相交。由于计算量极大，本文设想依据几何推断找到圆柱上最有可能突破遮挡

的关键点位。基于导弹与烟幕云团的实时位置，本文以导弹为顶点、烟幕云团为底面构建遮蔽锥模型，代表导弹视线被烟幕遮蔽的全部空间。接着构建真目标圆柱体的几何模型，提取其表面的夹角极值点。对烟幕起爆后 20s 内的每个时间点，计算导弹与极值点的视线向量，判断该向量与遮蔽锥中轴线的夹角是否小于等于半顶角：若所有极值点均满足，则该时刻为有效遮蔽。最后统计所有有效遮蔽时刻的时间区间，累加得到总有效遮蔽时长。

4.2 问题二分析

问题二核心是在无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹对抗导弹 M1 的场景下，通过优化无人机飞行方向、速度及烟幕弹投放点、起爆点，实现真目标有效遮蔽时长最大化。

从求解的角度看，设立的有效遮蔽时长目标函数无封闭解析表达式，需通过时间步进数值模拟计算遮蔽时长，且决策变量为四维且存在非线性交互，传统优化算法容易陷入局部最优。因此本文设想采用遗传算法这种元启发式算法，通过编码决策变量、初始化种群、评估适应度、选择-交叉-变异操作及精英保留策略，在复杂搜索空间中高效寻找最优参数组合，最终实现遮蔽时长最大化。

4.3 问题三分析

问题三要求利用无人机 FY1 投放三枚烟幕干扰弹，对来袭的导弹 M1 实施干扰，目标依然是最大化对真目标的总有效遮蔽时长。这不仅是决策变量数量的增加，更是问题性质从单点优化转变为一个复杂的、路径依赖的时序优化问题。无人机的飞行速度与航向一经确定便不再改变，这意味着三次投放事件在空间和时间上是强耦合的。因此，优化算法必须在寻找最优飞行轨迹的同时，确定该轨迹上一系列最优的投放与起爆时序。这种内在的关联性使得简单的贪心算法（逐个优化每一枚干扰弹）难以奏效。

故在求解上，本文设想继续采用遗传算法，基本流程与问题二一致，但在编码和适应度评估部分有所调整。

4.4 问题四分析

问题四将优化场景从问题二、三的单无人机投放，升级为三架无人机(FY1,FY2,FY3)协同投放的复杂多个体问题。每架无人机各投放一枚烟幕干扰弹，旨在联合行动以最大化对导弹 M1 的总有效遮蔽时长。此问题的三架无人机拥有独立的初始位置和决策参数，但最终干扰效果确实高度耦合的。由于决策变量的增加，使问题从 8 维变成 12 维。

故在求解方法上，本文设想自适应粒子群优化(AM-PSO)代替遗传算法(GA)，每个粒子代表一个完整的 12 维协同策略，种群中的所有粒子均会向最优者(gbest)学习，相比 GA 的随机重组，能在高维空间中实现更快收敛。另外本文还设想引入自适应变异机制，提出种群密集度动态状态感知系数和双模态变异机制，旨在动态平衡全局搜索和局部开发能力，以提升求解性能。

4.5 问题五分析

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：基于导弹-圆柱视线验证的有效遮蔽时长计算模型

本文通过合理定义有效遮挡，先计算得到起爆点，再结合烟幕云团 3m/s 匀速下沉特性，得起爆后 20s 内云团位置，同时计算 M1 在有效时段内位置。将遮挡区域定义为一个圆锥（切线锥），选取真目标椭圆截面 4 个关键点，分别计算连线与圆锥中轴线的余弦角大小，判断真目标是否完整在切线锥内，将符合要求的时间点累加得到有效遮蔽时长。

5.1.1 有效遮挡定义

有效遮挡需满足“导弹 M1 观察真目标的所有视线均被烟幕云团遮挡”，即导弹 M1 在烟幕有效时间内，其到真目标圆柱体外围任意点的连线，均与烟幕云团球体相交。若存在某条连线不与云团相交，则判断为无效遮挡。

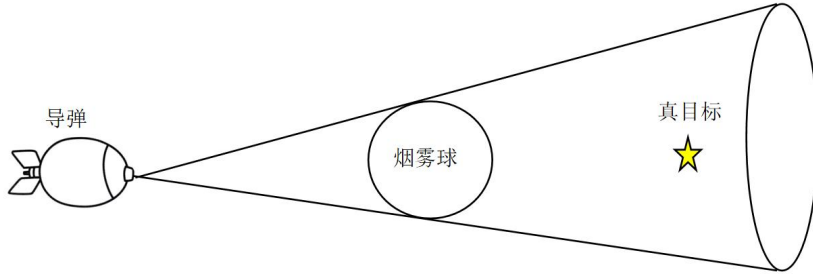


图 2 烟幕干扰弹有效遮挡示意图

5.1.2 各组件动态状态建模

Step 1: 导弹轨迹公式计算

因为导弹 M1 以恒定的速率 300m/s 飞向坐标原点（假目标），本文设 M1 的初始位置为 $P_{M1}(0)$ ，将速度绝对值与飞行单位方向向量相乘，得到速度向量 V_{M1} ：

$$V_{M1} = -300 \cdot \frac{P_{M1}(0)}{\|P_{M1}(0)\|} \quad (5.1-1)$$

故导弹在任意时刻 $t > 0$ 的位置由标准运动学方程给出： $P_{M1}(t) = P_{M1}(0) + V_{M1}t$ 。

Step 2: 无人机与烟幕弹轨迹

由题可得，无人机 FY1 在接收任务后，朝向假目标方向进行等高匀速直线飞行。由于高度不变，故其飞行单位方向向量为 $(-1, 0, 0)$ 。其速度恒定为 120m/s，可得速度向量： $V_{uav} = 120 \cdot (-1, 0, 0)$ 。在投放烟幕弹前，即 $0 \leq t \leq t_{react}$ 时间内，无人机的位置为：

$$P_{uav}(t) = P_{uav}(0) + V_{uav}t \quad (5.1-2)$$

在时刻 $t = t_{react} = 1.5s$ ，烟幕弹被投放。其初始速度等于该时刻无人机的速度，随后在重力作用下做抛体运动。故投放位置为 $P_{release} = P_{uav}(t_{react}) = P_{uav}(0) + 1.5 \cdot V_{uav}$ 。令自由落

体时间 $t_{fall} = 3.6s$ ，在 $0 \leq \tau \leq t_{fall}$ ，烟幕弹位置为： $P_G(t) = P_{release}(0) + V_{uav}\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$ 。

Step 3: 烟幕云团中心轨迹

烟幕弹在 $t_{break} = t_{react} + t_{fall} = 1.5 + 3.6 = 5.1s$ 时起爆。烟幕云团初始位置（爆炸）为：

$$P_{break} = P_G(t_{fall}) = P_{release} + V_{UAV}t_{fall} + \frac{1}{2}g_{fall}^2 \quad (5.1-3)$$

起爆后，云团以 3m/s 匀速下沉。令 $t' = t - t_{break}$ 为起爆时刻起的时间在 20s 有效时间内，云团中心位置为： $P_C(t') = P_{break} + 3 \cdot t'$ 。

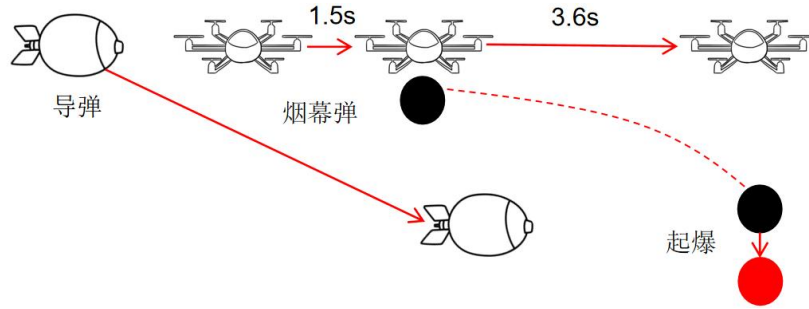


图 3 各组件动态状态变化示意图

5.1.3 完全遮蔽的几何条件

本节将问题从运动学分析转向在每一 t 需解决的静态几何问题：判断是否完全遮蔽。

(1) 遮蔽锥模型构建

在起爆后的任意时刻，位于 P_M 的导弹和中心为 P_C 、半径为 r_C 的烟幕云团，共同定义了一个圆锥体，本文将其称为遮蔽锥，代表了导弹视点被烟幕云团所遮蔽的全部空间。

接着，本文确定了几个关键几何属性，中轴线向量： $\vec{d} = P_C - P_M$ 。而关于半顶角，考虑由导弹位置、云团中心和球体任意切点构成的直角三角形，该三角形的斜边长为导弹与云团中心的距离 $\|P_C - P_M\|$ ，角 α 的对边云团半径 r_C 。因此可得：

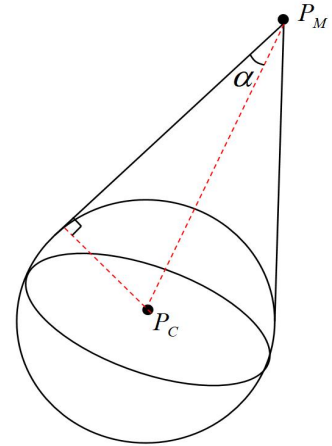


图 4 遮蔽锥示意图

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r_C}{\|P_C - P_M\|}\right) \quad (5.1-4)$$

(2) 目标圆柱体几何构建

目标是一个底面半径 7m、高 10m 的正圆柱体。其底面圆心位于(0,200,0)，中轴线与 z 轴平行，属于该圆柱体点集 $P = (x, y, z)$ 满足以下条件：

$$x^2 + (y - 200)^2 \leq 7^2, 0 \leq z \leq 10 \quad (5.1-5)$$

(3) 遮蔽的基本判据

在给定时刻，当且仅当目标圆柱体 Z 的全部体积都被包含在遮蔽锥 C 的体积，发生完全遮蔽，表述为： $Z \subset C$ 。对于圆柱体表面任意点 Q ，从导弹出发视角向量 $\vec{v} = Q - P_M$ 与中轴线向量 \vec{d} 之间夹角 θ ，必须小于等于遮蔽锥半顶角。

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{d}|} \right) \leq \alpha \quad (5.1-6)$$

由于计算圆柱体表面所有点计算量过大，本文选取圆柱夹角极值点进行计算。本文认为，由导弹，圆锥中轴线，底面圆心共同构成的平面与圆柱相交的四边形的四个点为夹角的极值点，见下图。

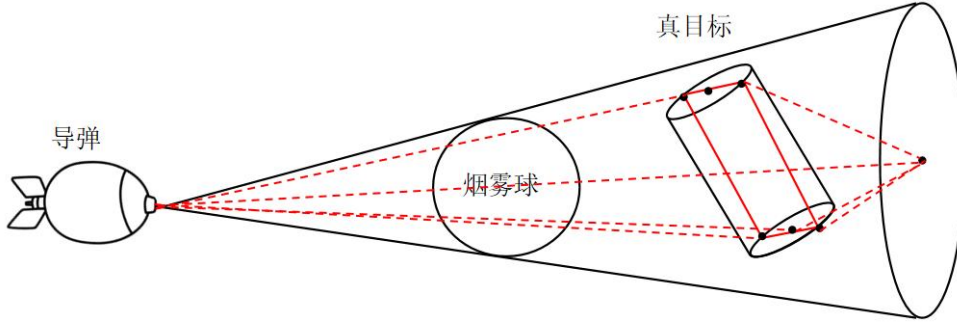


图5 夹角极值点示意图

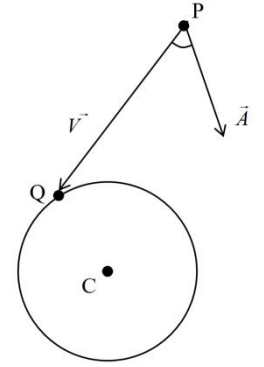


图6 推导示意图

5.1.4 夹角极值点位置推导证明

设圆 c 为一个以 C 为圆心的圆。设 P 为圆外一点， A 为一个固定的方向向量， Q 为圆 c 上任意一点，向量 PQ 与向量 A 之间的夹角 θ 取得极值的条件是：点 Q 位于由点 C 、 P 以及方向向量 A 所定义的平面上。

令从 P 指向 Q 的向量为 V ， V 与 A 之间的夹角 θ 可由点积给出： $\cos \theta = \frac{A \cdot V}{|A||V|}$ 。求解夹角 $\theta \in [0, \pi]$ 的极值，等价于求解 $\cos \theta$ 的极值。由于 $|A|$ 是一个常数，我们的目标是找到以下函数的极值： $f(Q) = \frac{A \cdot (Q-P)}{|Q-P|}$ 。

本文用变量 t 对圆进行参数化，即 $Q=Q(t)$ 。因此 $V=V(t)=Q(t)-P$ 。为了找到极值，我们需对 f 关于 t 求导，并令其导数等于 0。

$$\frac{d}{dt} f(Q(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A \cdot V}{|V|} \right) = 0 \quad (5.1-7)$$

根据商的求导法则，要求分子为 0。令 $V' = \frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt}$ 为圆在 Q 点的切向量。我们知道 $\frac{d}{dt}(A \cdot V) = A \cdot V'$ ，以及 $\frac{d}{dt}|V| = \frac{V \cdot V'}{|V|}$ 。将这些带入并化简，我们得到：

$$[A|V|^2 - V(A \cdot V)] \cdot V' = 0 \quad (5.1-8)$$

令 $W = A|V|^2 - V(A \cdot V)$ ，那么极值条件是 $W \cdot V' = 0$ 。根据定义，向量 W 必须与切向量 V' 正交。在 Q 点，任何与圆的切线正交的向量都必须位于其法平面内。该法平面包含径向向量 $Q-C$ 。根据其构造， W 是向量 A 和 V 的一个线性组合。因此， W 位于由 A 和 V 所张成的平面内。结合以上事实，要使极值出现，向量 A 、 V 和 CQ 必须共面。这是

因为 W 必须同时位于 $\{A, V\}$ 所在的平面和包含向量 CQ 的法平面内。要满足此条件，这三个向量必须位于同一个平面上。 $\{A, V, CQ\}$ 共面是关键条件。我们可以用从圆心出发的向量来表示 V : $V = Q - P = (Q - C) - (P - C) = \vec{CQ} - \vec{CP}$ 。因此向量集 $\{\vec{CQ}, \vec{CP}, A\}$ 共面。

这意味着点 Q 必须位于一个同时包含向量 CP 和向量 A 的平面。这正是由圆心 C 、点 P 和方向向量 A 所定义的平面。

5.1.5 综合遮蔽时长计算与分析

通过上述计算，我们首先得到基础位置信息，见下表 1。

表 1 基础位置信息

无人机初始位置	烟幕弹投放点	烟幕弹起爆点	导弹飞行方向向量
(17800,0,1800)	(17620,0,1800)	(17188,0,1736.496)	(-0.9950,0,-0.0995)

烟雾弹于开始计时后 5.1s 起爆，有效遮蔽时长在起爆后 2.94s-4.33s。故有效遮蔽时间段为 8.04s-9.43s，有效遮蔽时长为 1.39s。

5.2 问题二：基于遗传算法的单枚干扰弹最优投放策略模型

本题旨在解决问题二的优化任务：确定无人机 FY1 投放单枚烟幕干扰弹对抗导 M 的最优策略，其目标是最大化对真目标的总有效遮蔽时长。本文采用遗传算法求解最优。

5.2.1 优化问题数学规划

该任务核心是寻找一组能够产生最大化遮蔽时长的无人机及其有效控制参数。此问题可被形式化的定义为数学优化问题。

(1) 决策变量：

问题二求解策略由四个关键参数定义，分别为无人机飞行速度大小 v ，无人机飞行方向角 θ ，无人机投放前飞行时间 t_{uav} ，干扰弹起爆延迟 t_{fall} 。这些参数共同构成决策变量向量 $X = [v, \theta, t_{uav}, t_{fall}]$ 。

(2) 约束条件：

对最优向量 X 的搜索受到问题描述中明确的物理和操作约束限制，包括：无人机飞行速度大小需满足 $70m/s \leq v \leq 140m/s$ ；飞行方向角满足 $0rad \leq \theta \leq 2\pi rad$ ；另外飞行时间和起爆延迟时间需满足 $0s \leq t_{uav} \leq 10s$ ， $0s \leq t_{fall} \leq 15s$ 。无约束的飞行或起爆时间将导致无限搜索空间。这些界限合理地将搜索范围限制在导弹距目标尚有相当距离的、具有战略意义的时间窗口。

(3) 目标函数：

该题首要目标是最大化总有效遮蔽时间 T_{total} 。该时间实在烟幕云团 20s 有效生命期内，真目标被完全遮蔽在导弹视线之外的累积时长。本文设 $Obs(t, X)$ 为一个二元函数，当策略 X 在时间 t 能够完全遮蔽目标时返回 1，否则返回 0。目标函数即为该函数在云团有效作用期内的积分：

$$\text{Maximize } T_{total}(X) = \int_{t_{start}}^{t_{end}} \text{Obs}(t, X) dt \quad (5.2-1)$$

其中, $t_{start} = t_{uav} + t_{fall}$ 是起爆时刻, $t_{end} = t_{start} + 20$ 是云团消散时刻。

5.2.2 关于 Obs(t,X)函数的构建

(1) 动态系统时空轨迹建模

为了评估任何给定策略 X 的目标函数值, 首先为场景中每个运动实体建立精确的运动学模型, 根据问题一, 本文建立以假目标为原点的坐标系, 得到各实体轨迹见附录二。

(2) 有效遮蔽几何判据模型

按照问题一的方式构建遮蔽锥, 其中锥中轴线向量为 $L(t) = P_{cloud}(t) - P_{M1}(t)$, 半顶角:

$$\alpha(t) = \arcsin \left(\frac{R_{cloud}}{\|L(t)\|} \right) \quad (5.2-2)$$

如问题一夹角极值点所证, 通过筛选目标关键点简化计算, 为了实现有效遮蔽, 锥轴 $L(t)$ 与从导弹到每个关键点的向量 V 之间的夹角 $\beta_i(t)$ 必须小于等于锥的半顶角。

$$\beta_i(t) = \arccos \left(\frac{L(t) \cdot V_i(t)}{\|L(t)\| \cdot \|V_i(t)\|} \right) \quad (5.2-3)$$

因此, 二元遮蔽函数定义为:

$$\text{Obs}(t, X) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max \{ \beta_i(t), i \in [1, 4] \} \leq \alpha(t) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5.2-4)$$

5.2.3 遗传算法具体求解

由于目标函数 $T_{total}(X)$ 缺乏封闭形式的解析表达式, 其最优值只能通过基于上述运动学和几何模型的时间步进数值模拟来确定, 加之高纬度和非线性变量相互作用, 使得普通优化算法不适用。因此, 我们采用遗传算法(GA), 这是一种受自然进化启发的强大元启发式算法, 非常适合于探索此类复杂的搜索空间。具体实现流程如下:

Step 1: 编码

每个潜在的解决方案被表示为一个实质向量 $X = [v, \theta, t_{uav}, t_{fall}]$, 直接对应决策变量。

Step 2: 种群初始化

算法没有采用标准的伪随机初始化, 而是使用哈尔顿拟随机序列。拟随机序列旨在

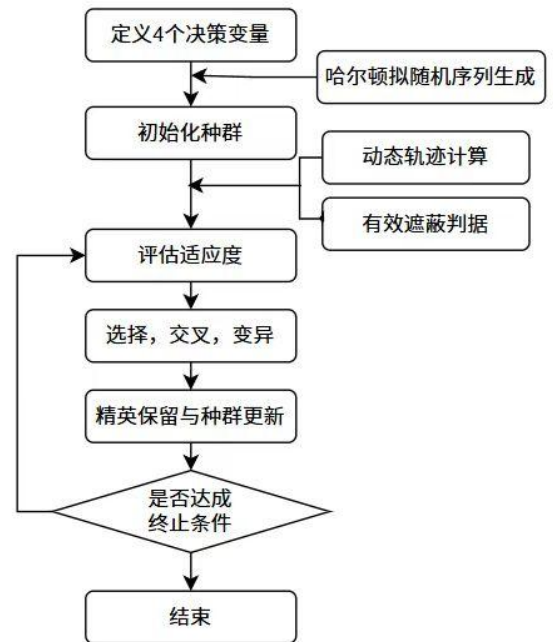


图 7 遗传算法流程图

比随机点更均匀地覆盖搜索空间，减少聚类 and 间隙。这会产生一个更高质量的初始种群，并通常能加速收敛到好的解。

Step 3: 适应度评估

每个个体 X 的适应度在本题中就是其对应的目标函数 $T_{total}(X)$ 。本文以一个很小的步长(0.01s)模拟 0-20s 云团持续时间的场景，二元遮蔽函数 $Obs(t, X)$ 进行积分。

Step 4: 选择、交叉、变异

选择是使用锦标赛选择机制。每一步随机从种群中选择两个个体，适应度较高的个体被选中成为下一代的父代。接着交叉是以高概率应用模拟二进制交叉(SBX)。它创建的两个子代融合父代特征。然后以一定概率应用多项式变异(PM)。该算子进行较小随机波动，为种群引入新的遗传物质，帮助算法逃离局部最优。

Step 5: 精英保留

当前代中的最佳个体被明确保留并直接进入下一代。这确保了算法的性能是单调不减的，并且找到的最佳解永远不会丢失。

5.2.4 模型求解结果与策略分析

经过上述过程，得到四个参数共同描绘的完整优化策略：无人机以沿 x 轴方向 102.78m/s、沿 y 轴方向 0.12m/s 的速度和方向飞行 0.11s，然后投放干扰弹，干扰弹再经过 0.82s 的自由落体后引爆，以达到期望的最佳遮蔽效果。

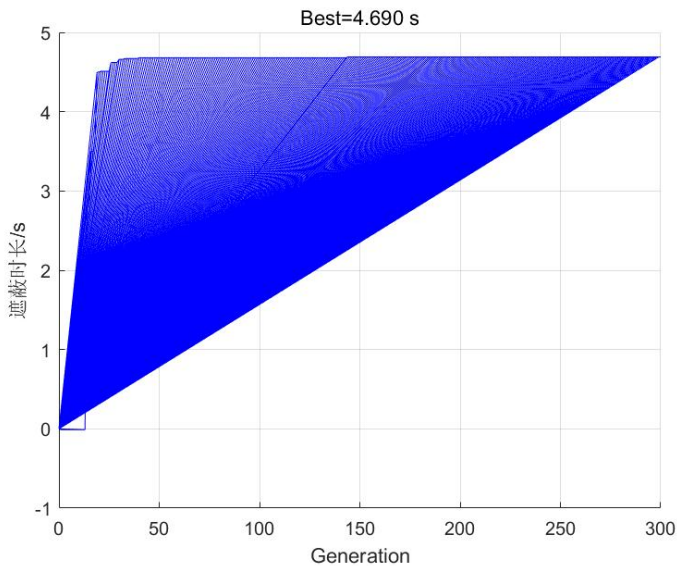


图 8 问题二输出结果

由左图可得，在前 50 代上曲线增长速率打，得益于哈尔顿序列生成，迅速淘汰大量劣质解；50-100 代上曲线上升速度放缓，种群个体变得更为相似；在 100 代以后，上曲线几乎变为一条水平线，紧贴着最优值 4.69s.此时算法中采用的高分布指数的交叉变异算子起关键作用，进行精细局部搜索和微调。

这张收敛曲线图清晰的表明，本文成功地在一个复杂四维空间中找到了一个能提供 4.69 秒遮蔽时长的优秀策略。

5.3 问题三：单架无人机投放三枚干扰弹最优策略模型

本问题旨在单架无人机 FY1 投放三枚烟幕干扰弹对抗导弹 M1 的场景下，设计最优投放策略，以最大化对真目标的总有效遮蔽时长。在第二问的基础上，增加了烟幕弹数量，使之从四维变为了八维、变量高度耦合的复杂优化问题。由于传统贪心算法难以胜

任，本节继续沿用并扩展了在第二问取得成功的遗传算法框架。

5.3.1 优化问题的数学规划

为精准求解，本文再次构建数学规划模型，将物理场景转化为优化问题。

(1) 决策变量

整个协同投放策略由一个八维决策向量 \mathbf{X} 唯一确定。该向量描述了无人机飞行状态和三枚干扰弹的投放与起爆时序。具体定义与约束条件见下表 2：

表 2 问题三决策变量及其约束

变量名	物理意义	下界	上界
v	无人机飞行速度大小(m/s)	70	140
θ	无人机飞行方向角(rad)	0	2π
t_{uav}^1	第一次投放前的飞行时长(s)	0	10
t_{fall}^1	第一枚干扰弹的引爆延迟(s)	0	15
t_{uav}^2	第一、二次投放的时间间隔(s)	1	10
t_{fall}^2	第二枚干扰弹的引爆延迟(s)	0	15
t_{uav}^3	第二、三次投放的时间间隔(s)	1	10
t_{fall}^3	第三枚干扰弹的引爆延迟(s)	0	15

(2) 目标函数

优化核心目标是最大化真目标至少被一个烟幕云团有效遮蔽的总时长。设 $T_k(X)$ 为在策略 \mathbf{X} 下，第 k 枚干扰弹能够提供的有效遮蔽时间点集合。则新目标函数 $f(x)$ 即为这三个集合并集的测度：

$$\max_{\mathbf{X}} f(x) = measure \left(\bigcup_{k=1}^3 T_k(X) \right) \quad (5.3-1)$$

该目标函数意味着重叠遮蔽时间不会被重复计算。此设定迫使优化算法进行深层次的权衡：是应该优先形成超长连续遮蔽期（连续封锁策略），还是将它们分开来部署（脉冲防御策略），算法应该根据几何与运动学计算得出最佳平衡点。

5.3.2 扩展时空轨迹与累积遮蔽模型

为了评估任意决策变量向量 \mathbf{X} 所对应的目标函数值，本文建立了扩展动力学模型。

(1) 多事件运动学模型

导弹运动学模型与前两问保持一致，无人机与干扰弹的具体推导如下：

无人机的速度向量 $\mathbf{v}_{uav} = [v \cos(\theta), v \sin(\theta), 0]$ ，任意时刻 t 位置： $\mathbf{P}_{uav}(t) = \mathbf{P}_{uav,0} + \mathbf{v}_{uav} t$ 。

而三次投放时间与空间坐标点为：

$$t_{react,k} = \sum_1^k t_{uav}^k, P_{release,k} = P_{uav}(t_{react,k}), k=1,2,3 \quad (5.3-2)$$

每枚干扰弹在投放后经历一段自由落体，起爆时间为 $t_{break,k} = t_{release,k} + t_{fall}^k$ ，位置为：

$$P_{break,k} = P_{release,k} + v_{uav} \cdot t_{fall}^k + \frac{1}{2} g (t_{fall}^k)^2 \quad (5.3-3)$$

起爆后，第 k 个烟幕云团球心位置随时间变化为：

$$P_{cloud,k} = P_{break,k} + v_{cloud} \cdot (t - t_{break,k}), \forall t \in [t_{break,k}, t_{break,k} + 20] \quad (5.3-4)$$

(2) 累积遮蔽判定

由于目标函数 $f(x)$ 没有解析式，其值必须通过高精度数值模拟计算。本文以 $0.01s$ 的微小时间步长对整个过程离散化，在每个时间步 t_i 里，评估一个复合布尔函数：

$$Obs_{total}(t_i, X) = \bigvee_{k=1}^3 Obs_k(t_i, X) \quad (5.3-5)$$

其中 \bigvee 为逻辑或运算符。 $Obs_k(t_i, X)$ 是一个布尔函数，当且仅当第 k 个烟幕云团在时刻 t_i 处于激活状态且能有效遮蔽真目标时值为1。

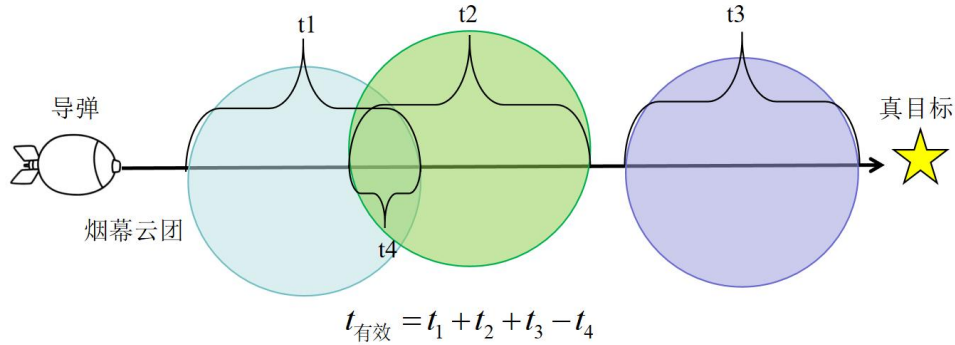


图9 累积遮蔽判定示意图

5.3.3 基于增强遗传算法求解分析

面对此八维、目标函数为“黑箱”且变量间高度耦合的复杂优化问题，传统的优化算法难以胜任。因此，我们沿用并扩展了在问题二中的遗传算法框架，最终得到结果如下：

表3 问题三最优策略参数

变量名	v_x	v_y	t_{uav}^1	t_{fall}^1	t_{uav}^2	t_{fall}^2	t_{uav}^3	t_{fall}^3
优化参数	107.78	0.15	0.00	0.01	1.00	0.00	1.41	1.23

由沿 x 轴 y 轴方向的速度大小可得合成速度 $v \approx 107.78m/s$ ，方向角 $\theta \approx 0.0014rad$ ，几乎是纯粹沿着 x 轴正方向飞行，是一个“后撤”式的机动符合常识，且速度、方向均在题目限制范围内，为合理解。该完整策略为无人机以沿 x 轴方向 $107.78m/s$ 、沿 y 轴方向 $0.15m/s$ 的速度和方向飞行 $0.00s$ ，然后投放第一颗干扰弹，干扰弹再经过 $0.01s$ 的自由落体后引爆；第二个干扰弹在间隔 $1s$ 后扔下，并且马上引爆；第三颗干扰弹在间隔

1.41s 后扔下，自由落体 1.23s 后引爆，可达到有效遮蔽时间最大化。

由右图收敛曲线表明，遗传算法在此次运行中同样表现出良好的收敛性。在前 50 代，得益于哈尔顿序列生成的高质量初始种群，早期迅速淘汰大量劣质解，适应度急剧攀升；50-200 代随着种群向优良区域聚集，改进速度放缓，主要通过交叉和变异算子对已有优质解进行精细调整和优化；最终，曲线逐渐趋于平缓，在第 299 代稳定在 6.39s，找到了一个稳定最优解。

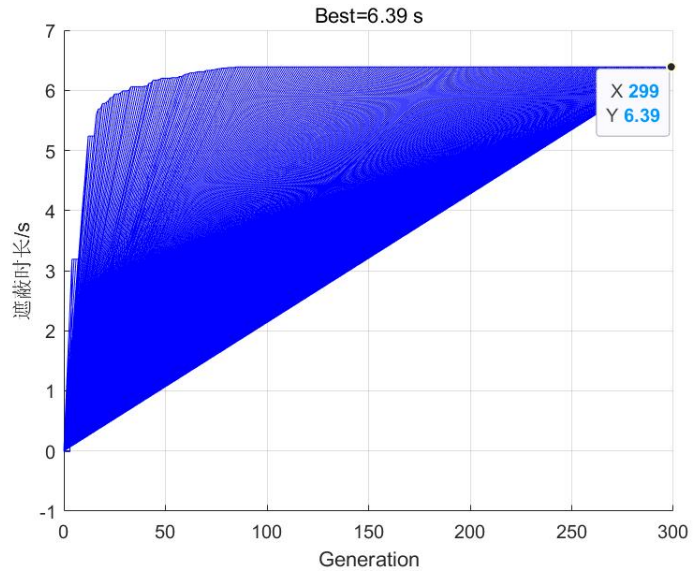


图 10 问题三收敛曲线

5.4 问题四：基于 AM-PSO 的多无人机投放策略

问题四要求协调 FY1、2、3 共三架无人机，每架无人机各投放 1 枚烟幕干扰弹对导弹 M1 实施干扰，需制定协同投放策略，最大化遮蔽时长。本节采用自适应变异粒子群优化来实现该问题。

5.4.1 协同多体交战数学规划模型

为精准描述此协同对抗场景，本节构建此数学规划模型，旨在寻找最优联合策略。

(1) 决策变量与联合策略向量

主要是要确定一个 12 维的联合策略向量 X ，并使其能完整的控制三架无人机的所有控制参数。该 12 维向量 X 主要由 3 各 4 维子向量 x_i 构成：

$$X = [x_1, x_2, x_3], \quad x_i = [v_i, \theta_i, t_{uav,i}, t_{fall,i}] \quad (5.4-1)$$

其中，子向量 x_i 代表第 i 架无人机 $i \in \{1, 2, 3\}$ 的独立行动策略。

(2) 系统动力学模型

该场景下关键实体时空轨迹均由精确的运动学方程描述，与前几问一致，见附录三。

(3) 目标函数

优化的最终目标是最大化三枚烟幕弹对真目标形成的总有效遮蔽时长，其中重叠的遮蔽时间不重复计算，这与问题三的目标函数形式一致：

$$Obs_{total}(t, X) = \max \{Obs_i(t, X)\}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.4-2)$$

$$Maximize \quad T_{total}(X) = \int_0^{T_{max}} Obs_{total}(t, X) dt \quad (5.4-3)$$

本节任采用时间步长为 $\Delta t = 0.01s$ 。

(4) 约束条件

根据题目信息，对比前几问的约束条件，少了投放间隔的约束，其余基本不变。

表 4 问题四决策变量及其约束

变量符号	物理意义	下界	上界	单位
v_i	飞行速度大小	70	140	m/s
θ_i	飞行方向角	0	2π	rad
$t_{uav,i}$	投放前飞行时长	0	60	s
$t_{fall,i}$	起爆延迟	0	30	s

此数学模型将一个复杂的物理对抗问题，转化为了一个高维、非线性、带边界约束的“黑箱”优化问题。优化算法不仅要为每架无人机找到局部最优的行动方案，更需要发现三者之间能够产生最大协同效应的组合策略。这种策略可能表现为时间上的接力遮蔽，也可能是在空间上形成互补的遮蔽区域，以应对导弹在不同阶段的视线威胁。

5.4.2 方法论分析：从序贯优化到协同优化

从问题三到问题四，题目设计的核心从单体序贯决策演进为多体协同优化，在对问题规模放大的同时驱动求解方法论的相应演变。

(1) 复杂度与决策空间维度跃升

问题三要求规划单架无人机 FY1 投放三枚烟幕弹的策略，构建了一个 8 维决策变量。尽管这三枚烟幕弹存在时序上的强耦合，但其本质上仍是一个中心化的、单体规划问题。相比之下，问题四的三架无人机都有其独特的初始位置和独立的飞行策略与投放时序。需在 12 维空间中，在三个独立空间轨迹和三个独立时间轴上搜索。无人机决策之间形成了高度耦合的纳什均衡式博弈情景，使适应度景观异常崎岖和多模态。

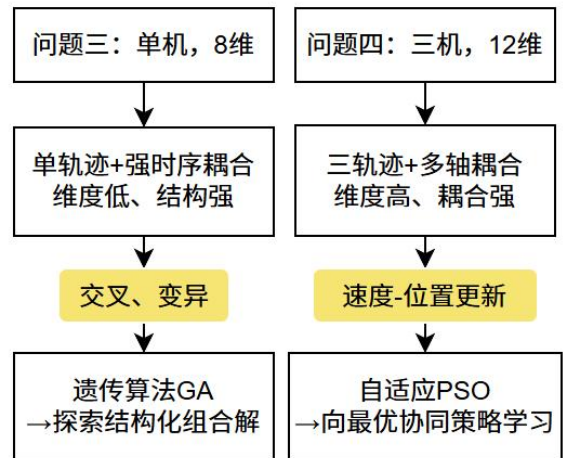


图 11 问题四方法论分析

(2) 从遗传算法到自适应变异粒子群优化

为应对复杂度的跃升，并针对两种算法在处理不同类型优化问题的特性与优势：

遗传算法(GA)-适用于问题三：GA 模拟生物进化中的“适者生存”原则，通过选择、交叉和变异等算子来探索解空间。交叉算子通过重组父代个体的部分基因来产生新的子代，这种机制非常适合于探索结构化的、组合性的解。在问题三中，一个染色体可以被看作是飞行策略和三次投放时序的组合。GA 的交叉操作可以有效地在不同的飞行策略和不同的投放时序组合之间进行探索，寻找优良的“基因”组合。然而遗传算法的随机操作可能破坏已形成的优良结构。

自适应变异粒子群优化(AM-PSO)-适用于问题四: PSO 是一种模拟鸟群觅食行为的群体智能算法。每个粒子代表一个完整的 12 维协同策略。其粒子更新主要受其自身历史最优位置(pbest)和整个种群全局最优位置(gbest)影响。本文加入的自适应变异策略在种群聚集时对 gbest 进行混合变异, 能够更有效地跳出局部最优, 避免在复杂高维空间过早收敛到次优解。另外线性递减的惯性权重以及在种群分散时对最差个体进行小波变异, 有助于算法在后期进行精细的局部搜索, 提高解决方案的精度。

5.4.3 AM-PSO 算法具体实现过程

AM-PSO 算法按照“初始化-迭代优化-终止输出”的逻辑进行, 具体流程如下:

Step 1: 初始化

设定算法超参数包括: 种群规模、最大迭代次数、问题维度、学习因子 c_1, c_2 (控制粒子向个体最优和全局最优学习的权重)、压缩因子 ξ (控制速度大小, 确保收敛性)。另外还生成初始种群, 调用适应度函数得有效遮蔽时长评估初始适应度和初始最优解。

Step 2: 迭代优化

采用线性递减策略更新惯性权重 w , 较大时倾向于全局搜索, 较小时倾向于在最优解附近精细局部开发。

对标准速度与位置更新 (如式(5.4-4)), 更新后检查粒子新位置是否在约束内, 否则将其值设为边界值。之后再对新位置评估适应度并更新个体最优 pbest 和全局最优 gbest。

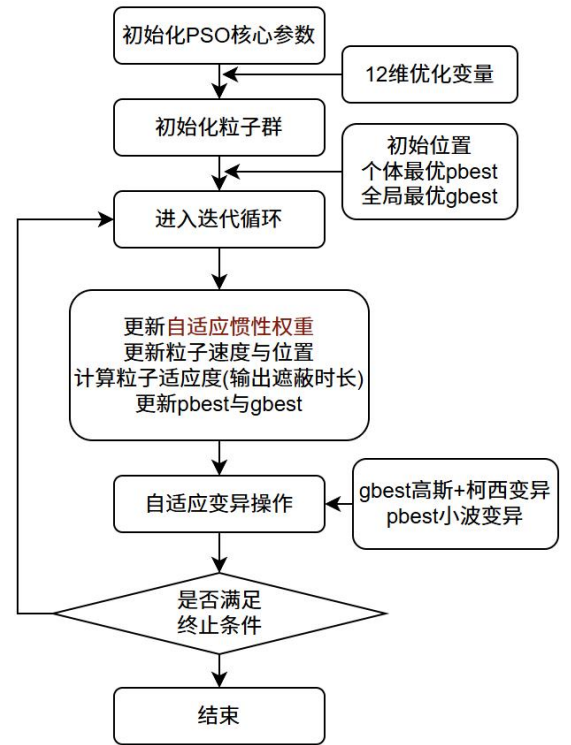


图 12 AM-PSO 算法流程图

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(p_i(t) - x_i(t)) + c_2r_2(g(t) - x_i(t)) \quad (5.4-4)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (5.4-5)$$

其中, r_1, r_2 是随机数, p_i 是粒子 i 个体历史最优位置, g 是整个种群全局最优位置。

Step 3: 执行自适应变异策略

这是本节对 PSO 算法的核心创新, 旨在动态平衡探索与开发。

(1) 创新点一: 基于种群聚集度的动态状态感知

首要创新在于引入了一个实时评估种群状态的传感器。该机制通过计算种群个体最优适应度的归一化方差 σ^2 来实现。其中, fp 是所有粒子个体最优位置对应的适应度值集合, f_{avg} 是其平均值。

$$\sigma^2 = \frac{\text{mean}((fp - f_{\text{avg}})^2)}{(\max(|\max(fp) - f_{\text{avg}}|, |\min(fp) - f_{\text{avg}}|))^2} \quad (5.4-6)$$

当 $\sigma^2 \rightarrow 0$ 时，表示种群间个体最优解非常相似，种群高度聚集。而 $\sigma^2 \rightarrow 1$ 正好相反。这种基于 σ^2 的状态感知能力，是后续自适应策略的决策基础，使算法能根据当前种群状态采取最合适的操作。

（2）创新点二：依赖于状态的双模态变异策略

该策略根据实时计算的 σ^2 值，动态地在两种功能迥异地变异算子之间切换寻找平衡。

全局最优混合变异：此算子地触发概率维 $P_{m_g} = 1 - \sigma^2$ ，当种群高度聚集时，触发概率为一，也正好是算法最有可能陷入局部最优的时候。它引入扰动由标准正态分布随机向量和柯西分布随机向量混合而成，并作用于当前全局最优 **gbest**。

最差 pbest 小波变异：此算子的触发概率为 $P_{m_p} = \sigma^2$ 。该变异作用于最差粒子 p_{worst} 。它引入的扰动由小波函数 **m** 产生：

$$x_{\text{new}} = p_{\text{worst}} + \lambda_2 \cdot m \cdot (x_{\text{max}} - x_{\text{min}}) \quad (5.4-7)$$

其中 λ_2 是一个缩放因子。小波变换具备良好的时频局部化特性，这意味着它能够产生在不同尺度和位置上进行精细扰动的能力。将其针对最差粒子进行“靶向治疗”，在不干扰其他粒子的情况下进行精细化调整。为后续准备更高质量种群，加速收敛。

Step 4: 终止与输出

当满足结束条件时，输出全局最优 **gbest** 和全局最优适应度（最大有效遮蔽时长）。

5.4.4 基于自适应变异粒子群优化结果分析

在经过 500 次迭代中，寻找最大有效遮蔽时长的完整探索历程。

观察右图，其 y 轴为归一化空间最优值，即总有效遮蔽时长的负数。在最初 20 次迭代里，曲线急速下降，初始化粒子群快速收敛到 4.7s 这一还不错的解；在之后 20-410s

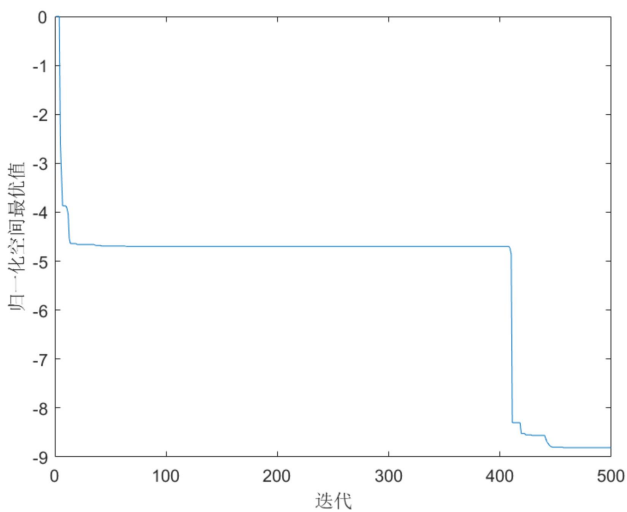


图 13 问题四收敛曲线

曲线陷入局部最优，几乎是一条水平线；在 410-420s 出现断崖式下跌，完美体现了 AM-PSO 算法中自适应变异策略的威力，在长期停滞阶段，种群聚集度会非常小，也使“全局最优混合变异”的触发概率变得极高，对当时最优解进行了一次高斯柯西分布混合驱动大扰动，柯西分布的“重尾”特性使其有能力产生大步长的跳跃，从而打破停滞僵局；最后几十代进行精细的微调和优化，最终收敛到了 8.97s 这个更优的稳定解。

表 5 问题四 12 个相关参数

v_1	θ_1	$t_{uav,1}$	$t_{fall,1}$	v_2	θ_2	$t_{uav,2}$	$t_{fall,2}$	v_3	θ_3	$t_{uav,3}$	$t_{fall,3}$
70.00	3.087	108.7	4.469	96.70	6.274	0.000	2.453	6.010	6.791	10.00	12.62

5.5 问题五：

六、模型评价

6.1 模型优势

问题一几何判定精准性高，通过构建遮蔽锥模型与目标圆柱夹角极值点判定法，规避了圆柱表面所有点的海量计算；运动学建模贴合实际，严格遵守物理规律；并且由于模型基于明确公式推导与数值模拟，结果可验证性强。

问题二优化框架科学，将问题转化为四维决策变量的黑箱优化问题，目标函数与约束条件定义清晰；选用遗传算法，通过哈尔顿拟随机序列初始化种群、精英保留策略有效规避局部最优，求解效率与精度平衡。

问题三目标函数设计贴合实际，以“3枚云团遮蔽时间并集测度”为目标，避免重叠时间重复计算，形成“连续封锁”或“脉冲防御”的最优策略，符合实战中多弹协同遮蔽的需求；另外维度扩展合理，准确刻画单架无人机投放3枚干扰弹的时序耦合关系；算法扩展有效性强。

问题四构建12维联合策略向量，准确刻画多机独立轨迹与投放时序的协同关系，目标函数沿用“时间并集测度”，符合三机协同遮蔽的需求，模型系统性强；相比问题三的遗传算法，选用自适应变异粒子群优化，通过“种群聚集度感知”基于个体最优适应度方差、“双模态变异”高聚集时 gbest 混合变异、低聚集时最差 pbest 小波变异），有效打破局部最优，在12维高维空间中求解效率更优；另外约束条件贴合题目。

问题五

6.2 模型局限

问题一除题目外环境因素影响外，基本无明显不足。

问题二除题目外环境因素影响外，未探讨遗传算法中交叉概率、变异概率、种群规模等超参数对收敛速度与最优解的影响。

问题三时序耦合解耦难度高，虽考虑三次投放的时序关联，但未设计解耦策略。以及未考虑云团间相互作用等实际场景影响。

问题四12维变量与AM-PSO的变异操作导致每次迭代计算量大幅增加，需500次迭代收敛，相比问题二、三计算成本更高。

问题五

七、模型扩展

1. 可将参数进行模块化设计，将原模型中固定的实体参数拆解为可配置模块，构建参数

输入接口；并且针对目标模块，支持输入立方体、不规则多面体等目标的几何参数，使模型可快速迁移至装甲车辆、建筑物等不同保护对象场景。

2. 基于原模型中“无人机匀速飞行”“烟幕弹抛体运动”的基础动力学框架，引入环境干扰子模型。

3. 巡航导弹具备地形匹配、航路规划能力，并非直线飞行。基于原模型“导弹轨迹计算”模块，新增“导弹航路点输入”功能，支持设定多段式飞行轨迹。

4. 多目标协同遮蔽，当保护对象为多辆装甲车组成的车队，基于原模型“多机协同”框架，设计“分区遮蔽策略”。

八、参考文献

- [1] 吕振肃,侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 电子学报,2004,32(3):416-420.
- [2] 张敬信. 数学建模与数学实验[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [3] 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型[M].第 4 版.北京: 高等教育出版社. 2011,1.
- [4] 蒋冬初,何飞,向继文.遗传算法求解函数优化问题的 Matlab 实现[J].吉首大学学报(自然科学版),2005,(02):98-100+106.
- [5] 朱卓,刘琦妍,张策.基于遗传算法的自主干扰决策方法[J].中国民航大学学报,2023,41(04):58-64.
- [6] 罗瑞耀,王得霖,罗威,等.烟幕弹应对察打一体无人机的投放策略研究[J].光电技术应用,2022,37(06):90-98.
- [7] 豆包, Doubao - Seed1.6, 字节跳动 (ByteDance), 2025-08-31.

附录

附录一

附录二

问题二：动态系统时空轨迹建模

1. 导弹 M1 轨迹

$$P_{M1}(t) = P_{M1}(0) + V_{M1} \cdot t \quad (9-1)$$

2. 无人机 FY1 轨迹

$$P_{uav}(t) = P_{uav}(0) + V_{uav} \cdot t \quad (9-2)$$

其中无人机的速度向量为： $V_{uav} = [v \cos(\theta), v \sin(\theta), 0]$ 。

3. 烟幕弹轨迹

$$P_{yandan}(t) = P_{release} + V_{release} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \quad (9-3)$$

其中投放点 $P_{release} = P_{uav}(t_{uav})$ ； $V_{release} = V_{uav}$ ； $\Delta t = t - t_{uav}$ 。

4. 烟幕云团中心轨迹

$$P_{cloud}(t) = P_{break} + V_{cloud} \cdot \Delta t' \quad (9-4)$$

其中，起爆点 $P_{break} = P_{yandan}(t')$ ；起爆时刻 $t' = t_{uav} + t_{break}$ ； $V_{cloud} = -3m/s$ ； $\Delta t' = t - t'$ 。

附录三

问题四：系统动态学模型

1. 导弹 M1 轨迹

$$P_{M1}(t) = P_{M1}(0) + V_{M1} \cdot t \quad (9-1)$$

2. 无人机 FYi 轨迹

$$P_{uav,i}(t) = P_{uav,i}(0) + V_{uav,i} \cdot t \quad (9-2)$$

其中无人机的速度向量为： $V_{uav,i} = [v_i \cos(\theta_i), v_i \sin(\theta_i), 0]$ 。

3. 烟幕弹 i 轨迹

$$P_{yandan,i}(t) = P_{release,i} + V_{release,i} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \quad (9-3)$$

其中投放点 $P_{release,i} = P_{uav,i}(t_{uav,i})$; $V_{release,i} = V_{uav,i}$; $\Delta t = t - t_{uav,i}$ 。

4. 烟幕云团中心轨迹

$$P_{cloud,i}(t) = P_{break,i} + V_{cloud} \cdot \Delta t' \quad (9-4)$$

其中, 起爆点 $P_{break,i} = P_{yandan,i}(t'_i)$; 起爆时刻 $t'_i = t_{uav,i} + t_{break,i}$; $V_{cloud} = -3m/s$; $\Delta t' = t - t'_i$ 。
