

Лабораторная работа 2

Дуденко Екатерина

5 ноября 2022 г.

1 Выполнение

Уравнение, которое необходимо решить на отрезке $[0,1]$:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^2 &= f \\ u &= u(x) f = f(x) \\ u(0) = u(1) &= 0 \text{ — края сетки} \end{aligned} \quad (1)$$

Буду решать данную задачу, используя конечно-разностную дискретизацию и метод Ньютона для решения полученной СНАУ.

1.1 Конечные разности

Отрезок $[0,1]$ делим на $1/h$ частей и получаем сетку от $i = 0 \dots n$, где $n = 1/h$. Теперь имеем вектор x :

$$[x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h \dots x_n = 1]$$

Теперь необходимо заменить неизвестную функцию и ее производную разностными аппроксимациями, получим такую разностную схему для (1):

$$[F_h(x)]_i = \begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i^2 - f(x_i) & i = 1 \dots n-1 \\ u_0 = 0 & x_0 = 0 \\ u_n = 0 & x_n = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Получаем нелинейную систему уравнений, нелинейность вносит $-u^2$:

$$[F_h(x)] = 0$$

.

1.2 Метод Ньютона

Полученная система (2) решается итерационным методом Ньютона. Одна итерация:

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n - \left[\frac{\delta F}{\delta u} \right]^{-1} F(\vec{u}_n) \quad (3)$$

Количество итераций здесь зависит от, заданной в функции, погрешности. Продолжаю итерации до тех пор пока выполняется выражение:

$$|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n| > \varepsilon$$

За u нулевое, беру нулевой вектор, так как метод Ньютона подразумевает поиск решения вблизи нужного значения.

$$\vec{u}_0 = \vec{0}$$

2 Результаты

Задачей было решить дифференциальное уравнение, все результаты представлены в виде графиков. Также считаю нелишним построить график заданной функции.

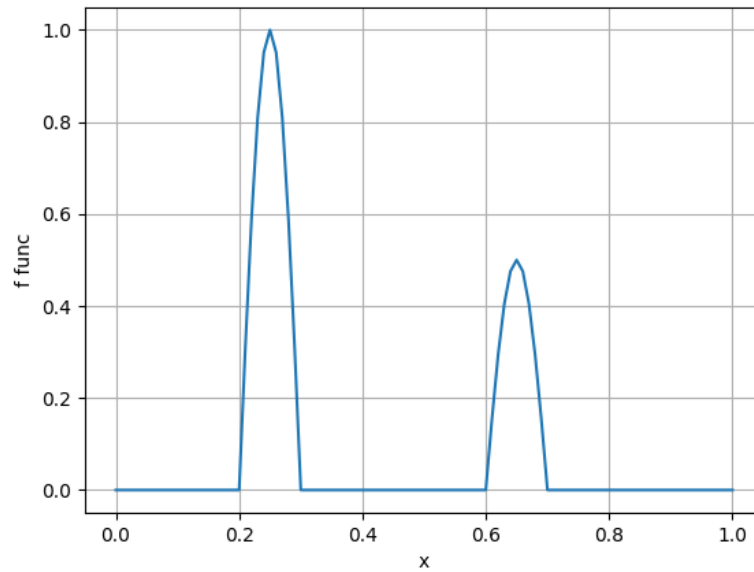


Рис. 1: График заданной функции $f(x)$

График решения уравнения получен при $h = 1 / 100$, $e = 0.00001$. В данном случае прошло 3 итерации.

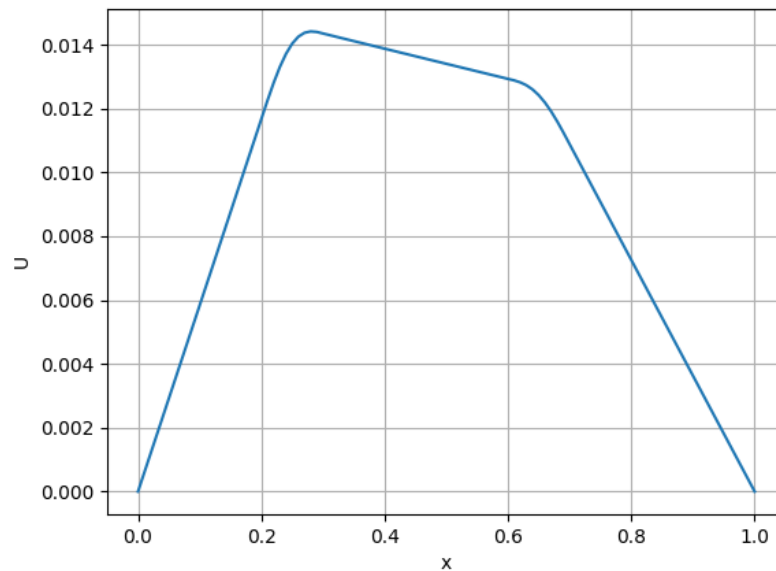


Рис. 2: График решения $u(x)$

Также необходимо построить график сходимости. Ось "x" здесь - это количество итераций, а ось "y" для уравнения $Ax = f$ будет задаваться так:

$$y = \lg \frac{\|A\vec{x}\|}{\|f\|}$$

В нашем случае из (3) следует:

$$\left[\frac{\delta F}{\delta u}\right](\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n) = -F(\vec{u}_n) \quad (4)$$

Тогда ось "y" будет такой.

$$conv = \lg \frac{\left\| \left[\frac{\delta F}{\delta u}\right](\Delta \vec{u}_n) \right\|}{\|F(\vec{u}_n)\|} \quad (5)$$

С помощью (5) получаем графики сходимости при 10 и 1000 итерациях:

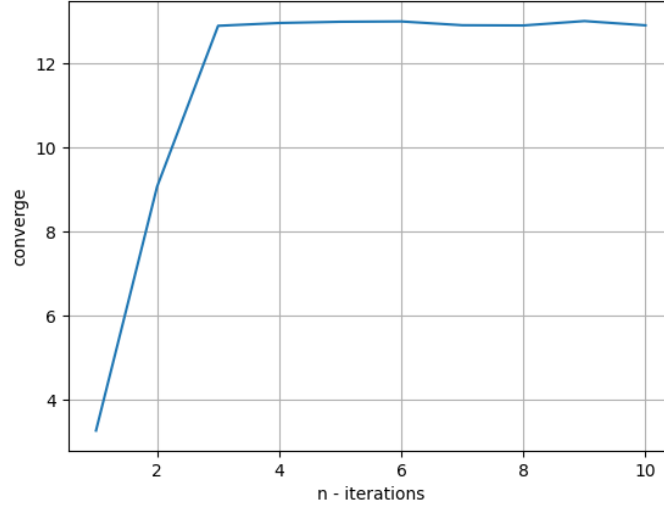


Рис. 3: График сходимости conv(n) - 10 итераций

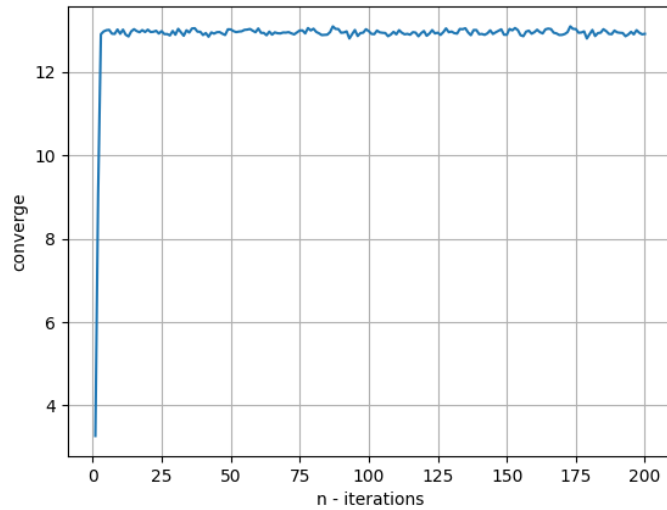


Рис. 4: График сходимости conv(n) - 200 итераций

В дополнение к сходимости, можно построить график зависимости нормы разницы n и $n+1$ вектора результата, где n - номер итерации.

$$du_n = \vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n$$

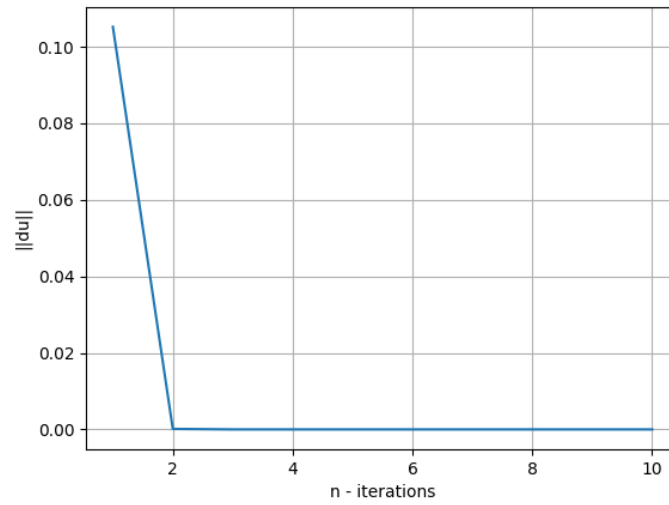


Рис. 5: График $du(n)$ - 10 итераций