第一章　曲线积分与曲面积分

1.1　Gauss 公式

注. 以下是随机选取的演示部分（仅作演示）.

定理 1.1.1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 围成，若函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1}$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S \tag{1.2}$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的单位余弦.

证明. 设闭区域 Ω 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy}，假定穿过 Ω 内部且平行于 z 轴的直线与 Ω 的边界曲面 Σ 的交点恰是两个，可设 Σ 由 Σ_1, Σ_2 和 Σ_3 三部分组成，其中 Σ_1 和 Σ_2 分别由方程 $z=z_1(x,y)$ 和 $z=z_2(x,y)$ 给定，这里 $z_1(x,y)\le z_2(x,y)$，Σ_1 取下侧，Σ_2 取上侧，Σ_3 是以 D_{xy} 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面上的一部分，取外侧.

由三重积分的计算法，有

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}v&=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\Big\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

又由曲面积分的计算法，有

$$\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_1(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而 Σ_3 上任意一块曲面在 xOy 面上的投影为零，由对坐标的曲面积分的定义可知

$$\iint_{\Sigma_3} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

上述三式相加有

$$\oiint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \Big[R[x,y,z_2(x,y)] - R[x,y,z_1(x,y)]\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

易得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}v = \oiint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如果穿过 Ω 内部且平行于 x 轴的直线以及平行于 y 轴的直线与 Ω 的边界曲面 Σ 的的交点恰好也是两个，类似地可得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}v = \oiint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}v = \oiint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

上述三式相加即有 **Gauss** 公式. □

例 1.1.1. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

解. 这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f(x)$ 是 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中

$$\lambda = 0,\ P_m(x) = 3x + 1$$

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

其特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

由于 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根，所以设特解

$$y* = b_0x + b_1$$

带入所给方程，得

$$-3b_0x - 2b_0 - 3b_1 = 3x + 1$$

比较等式两端 x 同次幂的系数，易得 $b_0 = -1,\ b_1 = \frac{1}{3}$，于是求得一个特解为

$$y* = -x + \frac{1}{3}$$

□

定义 1.1.1. 设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，对于任意给定正数 ε，总存在正整数 δ，使得当点 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限（二重极限），记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \vee \quad \lim_{P\to P_0} f(P) = A$$

任意一点 $P \in \mathbb{R}^2$ 与任意一个点集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 之间有以下三种关系的一种:

- **内点**: 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P) \subset E$，那么称 P 为 E 的内点.
- **外点**: 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P) \cap E = \emptyset$，那么称 P 为 E 的外点.
- **边界点**: 如果点 P 在任意邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，那么称 P 为 E 的边界点.

引入图片