
Preliminaries

CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

1.1 基本符号和概念

DEFINITION 1

集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合 T 表示所有的老师，集合 S 表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1, Chinese 2, Math 1, Physics 1, English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom, Charlie, Mike, Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联系起来。我们将这样的关系成为“二元关系”

DEFINITION 2

二元关系

设 A 和 B 是两个集合, R 是 A 和 B 之间的一个二元关系, 如果对于每一个 $a \in A$, 都存在一个 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in R$, 则称 R 为从 A 到 B 的二元关系。

EXAMPLE 2

在上面的学校例子中, 我们可以定义一个二元关系 R , 表示老师与学生之间的指导关系。例如, Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie, Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有:

$$R = \{(\text{Chinese 1}, \text{Tom}), (\text{Chinese 1}, \text{Charlie}), (\text{Math 1}, \text{Mike}), (\text{Math 1}, \text{Michael})\}$$

我们来考虑一种特殊的二元关系, 对于每一个 $a \in A$, 都存在唯一的 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in R$, 则称 R 为从 A 到 B 的映射, 或者函数。

DEFINITION 3

函数

设 A 和 B 是两个集合, f 是 A 到 B 的一个映射, 如果对于每一个 $a \in A$, 都存在唯一的 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in f$, 则称 f 为从 A 到 B 的函数, 记作 $f: A \rightarrow B$, 并称 $b = f(a)$ 为 a 在 f 下的像。

EXAMPLE 3

在上面的学校例子中, 我们可以定义一个函数 f , 表示每个学生对应的指导老师。例如, Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1, Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有:

$$f(\text{Tom}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Charlie}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Mike}) = \text{Math 1}, \quad f(\text{Michael}) = \text{Math 1}$$

在这里, 对于 A 和 B 之间的函数 $f: A \rightarrow B$, 我们称 A 为定义域, B 为陪域, $f(A)$ 为 f 的值域。

在实际生活中, 我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值:

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中, 一个变量的值常常取决于另外一个变量的值, 水的沸点 b 依赖于海拔高度 h 。我们可以利用函数来表达他们, 将 b 称之为因变量, h 称之为自变量

EXAMPLE 4

已知圆的面积 A 依赖于圆的半径 r , 则可以用函数表示为 $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道:

将函数想象为一个机器也有助于理解这一概：将自变量 *input* 到机器中，经过函数（机器）的处理，会 *output* 出唯一一个值——因变量。

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积 A ，自变量是圆的半径 r

最后，我们需要了解一些详细的数学符号：

- 实数集 \mathbb{R} ：表示所有实数的集合
- 自然数集 \mathbb{N} ：表示所有自然数的集合
- 整数集 \mathbb{Z} ：表示所有整数的集合
- 有理数集 \mathbb{Q} ：表示所有有理数的集合

EXERCISES 1.1

Answers on ANS-1

在问题 1-3 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系 R 中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合 $F = \{\text{苹果, 香蕉, 葡萄}\}$ ，将一些颜色设定为集合 $C = \{\text{红色, 黄色, 紫色, 绿色}\}$ 。定义一个“具有该颜色”的二元关系 R 。
2. 将国家设定为集合 $N = \{\text{中国, 日本, 英国, 法国}\}$ ，将洲设定为集合 $S = \{\text{亚洲, 欧洲, 非洲}\}$ 。定义一个“属于该洲”的二元关系 R 。
3. 将一些实数设定为集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{0, 1, 4\}$ 。定义一个“平方关系” R ，即 $(a, b) \in R$ 当且仅当 $a^2 = b$ 。

在问题 4-6 中，判断所给出的二元关系是否构成“从 A 到 B 的函数”，并说明理由。

1. 集合 A 为平面上所有的三角形，集合 B 为所有的正实数。二元关系 f 定义为：每个三角形对应它的面积。
2. 集合 A 为所有的实数 \mathbb{R} ，集合 B 也是 \mathbb{R} 。二元关系 f 定义为： $f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ 。
3. 集合 A 为某物理实验室中的所有温度计，集合 B 为当前室内的温度值。二元关系 f 为：每支温度计显示的读数。

在问题 7-9 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$ 。当电阻 R 固定时，电流 I 随电压 U 变化。
2. 匀加速运动的速度公式 $v = v_0 + at$ 。其中 v_0 和 a 是常数。
3. 理想气体的压强公式 $P = \frac{nRT}{V}$ 。假设温度 T 和物质的量 n 固定。

1.2 函数的性质和表达

函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法 (用语言来描述)
- 数值法 (用表格列出函数值)
- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

函数的奇偶性

DEFINITION 1

函数的奇偶性

如果 $y = f(x)$ 是：

x 的奇函数，如果 $f(x) + f(-x) = 0$

x 的偶函数，如果 $f(x) = f(-x)$

对于函数的整个区间成立

EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性：

- $f(x) = x^3 + 2x$, 因为 $f(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数
- $f(x) = x^2 + 3$, 因为 $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数
- $f(x) = x^2 + x$, 因为 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

函数的单调性**DEFINITION 2****单调性和单调区间**

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义：

- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是增函数。
- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是减函数。

将区间 I 成为函数 $f(x)$ 的单调区间, 函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有单调性。

EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x) = 3x + 2$, 该函数在 \mathbb{R} 上单调递增
- $f(x) = 2^x + 3$, 该函数在 \mathbb{R} 上单调递增
- $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 该函数在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增

函数的变换**平移变换**

垂直平移图形：

- 往上平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 加一负常数到公示的右边。

EXAMPLE 3

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加一常数 1 就得到 $y = x^2 + 1$, 把图形往上移位了一个单位。
在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加 -2 就得到 $y = x^2 - 2$, 把图形下移了两个单位。

水平平移图形

- 往右平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 在 x 上加一个负常数.
- 往左平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 在 x 上加一个正常数.

EXAMPLE 4

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x - 3$ 就得到 $y = (x - 3)^2$, 把图形往右移了三个单位。
在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x + 2$ 就得到 $y = (x + 2)^2$, 把图形往左移了两个单位。

对称变换

- 关于 x 轴对称: 把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称, 只需把公式右端的 y 替换成 $-y$, 即得到 $y = -f(x)$ 。
- 关于 y 轴对称: 把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 只需把公式中的 x 替换成 $-x$, 即得到 $y = f(-x)$ 。

EXAMPLE 5

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 x 轴对称, 得到 $y = -x^3$ 。
把函数 $y = x^3$ 的图形关于 y 轴对称, 得到 $y = (-x)^3 = -x^3$ 。

■ 复合函数和反函数**DEFINITION 3**

可以将 f 和 g 分别看作是一个机器, 那么复合函数 $g \circ f$ 就是一个流水线, 原材料先输入到 f 机器中然后 $output$ 再作为 g 机器的 $input$ 。

复合函数

设存在两个函数分别为: $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$, 则可以定义复合函数如下:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

其中, $g \circ f: A \rightarrow C$ 成为 f 和 g 的复合函数

EXAMPLE 6

在恒温条件下, 理想气体的压强 P 和体积 V 之间的关系为 $PV = C$, 其中 C 为常数。如图所示, 气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积 V 。试求出压强 P 与活塞高度 h 之间的函数关系。

解 设气缸的横截面积为 S , 则体积 V 与活塞高度 h 之间的关系为:

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数 $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$ 为:

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$



DEFINITION 4

反函数

设存在两个函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow A$, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $b \in B$, 满足:

$$(g \circ f)a = a, \quad (f \circ g)b = b$$

我们称 f 和 g 互为反函数。