1

向量和线性代数

CHAPTER OBJECTIVES

在这一章我们将把视角从简单的数投向一种更复杂的数学结构，完成以下目标：

1. 了解向量和其基本的计算
2. 了解向量几何上的意义
3. 学会简单的线性代数，并尝试应用

1.1 二维向量

向量与向量运算

DEFINITION 1

二维向量

一个有序实数对称为一个**二维向量**，我们用大写字母来表示向量

$$\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$$

数 u_1, u_2 称为向量的**分量**，二维向量的全体称为**二维空间**，记作 $\mathbb{R}^2$

DEFINITION 2

向量的代数运算

- 用一个实数 c **乘**向量 $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$ 得到的结果记为 $c\boldsymbol{U}$, 定义为用 c 乘上 $\boldsymbol{U}$ 的各个分量
$$c\boldsymbol{U} = (cu_1, cu_2)$$
- 向量 $\boldsymbol{U}$ 和向量 $\boldsymbol{V}$ 的**和** $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$, 定义为两个向量对应分量相加得到的向量：
$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

向量的数乘和相加满足通常的代数性质：

PROPERTIES

- **交换律**：$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}$
- **结合律**: $(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} + (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W})$
- **分配律**：$(a + b)\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{U} + b\boldsymbol{V}$
- **分配律**：$c(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) = c\boldsymbol{U} + c\boldsymbol{V}$
- **加法逆元**：$\boldsymbol{U} + (-\boldsymbol{U}) = 0$

注意： 向量的另一种表示方法，是包裹在中括号之中，例如向量 (u_1, u_2) 可以被表表示为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$$

下面我们开始讨论向量及向量运算在几何上的意义：

向量的几何意义

我们注意到任意一个向量 $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 都可以视为：

$$\boldsymbol{U} = (x, y) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在这里，我们可以将原本的 $\boldsymbol{U}$ 写作：

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

我们可以将 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 分别看作是 x 轴和 y 轴的单位向量，那么可以将原本的向量 $\boldsymbol{U}$ 视为 $x - y$ 平面上的一个点。

通过将向量视为平面中的点，运算具有下述几何解释：

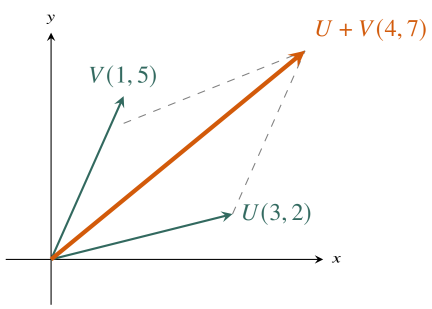

图 1.1: 向量加法的平行四边形法则

(a) **数乘**：对于非零向量 U 与实数 c，点 cU 位于通过原点与 U 的直线上。若 $c > 0$，方向相同；若 $c < 0$，方向相反。

(b) **加法**：若 $0, U, V$ 不在一条直线上，则 $0, U, U + V, V$ 构成一个平行四边形的四个顶点。

(c) **线段表达**：设 $0 \leq c \leq 1$，则点 $V + cU$ 位于从 V 到 $V + U$ 的线段上。

线性组合与线性无关

DEFINITION 3

线性组合

向量 U 与 V 的一个 **线性组合**是一个形如如下结构的向量：

$$aU + bV$$

DEFINITION 3

其中 a 与 b 是实数。

EXAMPLE 1 **线性组合实例**

证明 $U = (5,3)$ 是 $(1,1)$ 与 $(-1,1)$ 的一个线性组合。

解 我们需要寻找 a, b 使得 $a(1,1) + b(-1,1) = (5,3)$。这产生方程组：

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

解得 $a = 4, b = -1$。因此 $U = 4(1,1) - (1,-1)$。■

DEFINITION 4

线性无关 (Linear Independence)

称向量 U 与 V **线性无关**，如果它们的某个线性组合 $aU + bV = \mathbf{0}$ 仅在 $a = 0, b = 0$ 时成立。

若存在不全为零的系数使得组合为零，则称它们为 **线性相关**。

物理意义：
如果两个向量线性相关，说明它们“共线”，即其中一个向量的信息可以由另一个完全替代。

THEOREM 1

线性无关的性质

给定位平面中两个线性无关的向量 C 和 D，则 $\mathbb{R}^2$ 中的每一个向量 U 都可以 **唯一**地写成 C 和 D 的线性组合：

$$U = aC + bD$$

线性函数

DEFINITION 5

线性函数

从 $\mathbb{R}^2$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个函数 $\ell : U \mapsto \ell(U)$ 称为线性的，如果：

1. $\ell(cU) = c\ell(U)$
2. $\ell(U + V) = \ell(U) + \ell(V)$

THEOREM 2

线性函数的结构

THEOREM 2

从 $\mathbb{R}^2$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的每一个线性函数 ℓ 仅当它具有如下形式：

$$\ell(x, y) = px + qy$$

其中 p, q 是实数。