1

Preliminaries

CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

1.1 基本符号和概念

DEFINITION 1

集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合 T 表示所有的老师，集合 S 表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1,Chinese 2,Math 1,Physics 1,English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom,Charlie,Mike,Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联系起来。我们将这样的关系成为“二元关系”

DEFINITION 2

二元关系

设 A 和 B 是两个集合，R 是 A 和 B 之间的一个二元关系，如果对于每一个 $a \in A$，都存在一个 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的二元关系。

EXAMPLE 2

在上面的学校例子中，我们可以定义一个二元关系 R，表示老师与学生之间的指导关系。例如，Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie，Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有：

$$R = \{(\text{Chinese 1}, \text{Tom}), (\text{Chinese 1}, \text{Charlie}), (\text{Math 1}, \text{Mike}), (\text{Math 1}, \text{Michael})\}$$

我们来考虑一种特殊的二元关系，对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的映射，或者函数。

DEFINITION 3

函数

设 A 和 B 是两个集合，f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in f$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$，并称 $b = f(a)$ 为 a 在 f 下的像。

EXAMPLE 3

在上面的学校例子中，我们可以定义一个函数 f，表示每个学生对应的指导老师。例如，Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1，Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有：

$$f(\text{Tom}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Charlie}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Mike}) = \text{Math 1}, \quad f(\text{Michael}) = \text{Math 1}$$

在这里，对于 A 和 B 之间的函数 $f : A \to B$，我们称 A 为定义域，B 为陪域，$f(A)$ 为 f 的值域。

在实际生活中，我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值：

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中，一个变量的值常常取决于另外一个变量的值，水的沸点 b 依赖于海拔高度 h。我们可以利用函数来表达他们，将 b 称之为**因变量**，h 称之为**自变量**

EXAMPLE 4

已知圆的面积 A 依赖于圆的半径 r，则可以用函数表示为 $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道：

将函数想象为一个机器也有助于理解这一概：将自变量 *input* 到机器中，经过函数（机器）的处理，会 *output* 出唯一一个值——因变量。

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积 A，自变量是圆的半径 r

最后，我们需要了解一些详细的数学符号：

- 实数集 $\mathbb{R}$：表示所有实数的集合
- 自然数集 $\mathbb{N}$：表示所有自然数的集合
- 整数集 $\mathbb{Z}$：表示所有整数的集合
- 有理数集 $\mathbb{Q}$：表示所有有理数的集合

EXERCISES 1.1

Answers on ANS-1

在问题 1-3 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系 R 中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合 $F = \{苹果, 香蕉, 葡萄\}$，将一些颜色设定为集合 $C = \{红色, 黄色, 紫色, 绿色\}$。定义一个“具有该颜色”的二元关系 R。
2. 将国家设定为集合 $N = \{中国, 日本, 英国, 法国\}$，将洲设定为集合 $S = \{亚洲, 欧洲, 非洲\}$。定义一个“属于该洲”的二元关系 R。
3. 将一些实数设定为集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$，集合 $B = \{0, 1, 4\}$。定义一个“平方关系”R，即 $(a, b) \in R$ 当且仅当 $a^2 = b$。

在问题 4-6 中，判断所给出的二元关系是否构成“从 A 到 B 的函数”，并说明理由。

1. 集合 A 为平面上所有的三角形，集合 B 为所有的正实数。二元关系 f 定义为：每个三角形对应它的面积。
2. 集合 A 为所有的实数 $\mathbb{R}$，集合 B 也是 $\mathbb{R}$。二元关系 f 定义为：$f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$。
3. 集合 A 为某物理实验室中的所有温度计，集合 B 为当前室内的温度值。二元关系 f 为：每支温度计显示的读数。

在问题 7-9 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$。当电阻 R 固定时，电流 I 随电压 U 变化。
2. 匀加速运动的速度公式 $v = v_0 + at$。其中 v_0 和 a 是常数。
3. 理想气体的压强公式 $P = \frac{nRT}{V}$。假设温度 T 和物质的量 n 固定。

1.2 函数的性质和表达

函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法 (用语言来描述)
- 数值法 (用表格列出函数值)
- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

函数的奇偶性

DEFINITION 1

函数的奇偶性

如果 $y = f(x)$ 是：

$$x\text{的奇函数，如果} f(x) + f(-x) = 0$$
$$x\text{的偶函数，如果} f(x) = f(-x)$$

对于函数的整个区间成立

EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性：

- $f(x)=x^3+2x$，因为 $f(-x)=-x^3-2x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数
- $f(x)=x^2+3$，因为 $f(-x)=(-x)^2+3=x^2+3=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数
- $f(x)=x^2+x$，因为 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

函数的单调性

DEFINITION 2

单调性和单调区间

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义：

- 如果对于任意 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是增函数。
- 如果对于任意 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是减函数。

将区间 I 成为函数 $f(x)$ 的单调区间，函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有单调性。

EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x)=3x+2$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
- $f(x)=2^x+3$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
- $f(x)=x^2-3x+2$，该函数在 $(-\infty,\frac{3}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{3}{2},+\infty)$ 上单调递增

函数的变换

平移变换

垂直平移图形：

- 往上平移函数 $y=f(x)$ 的图形，加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数 $y=f(x)$ 的图形，加一负常数到公示的右边。

EXAMPLE 3

在公式 $y=x^2$ 的基础上右端加一常数 1 就得到 $y=x^2+1$，把图形往上移位了一个单位。
在公式 $y=x^2$ 的基础上右端加 -2 就得到 $y=x^2-2$，把图形下移了两个单位。

水平平移图形

- 往右平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个负常数.
- 往左平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个正常数.

EXAMPLE 4

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x-3$ 就得到 $y = (x-3)^2$，把图形往右移了三个单位。
在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x+2$ 就得到 $y = (x+2)^2$，把图形往左移了两个单位。

对称变换

- **关于 x 轴对称**：把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称，只需把公式右端的 y 替换成 $-y$，即得到 $y = -f(x)$。
- **关于 y 轴对称**：把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，只需把公式中的 x 替换成 $-x$，即得到 $y = f(-x)$。

EXAMPLE 5

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 x 轴对称，得到 $y = -x^3$。
把函数 $y = x^3$ 的图形关于 y 轴对称，得到 $y = (-x)^3 = -x^3$。

复合函数和反函数

DEFINITION 3

复合函数

设存在两个函数分别为:$f : A \to B$ 和 $g : B \to C$, 则可以定义复合函数如下：

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

其中，$g \circ f : A \to C$ 成为 f 和 g 的复合函数

可以将 f 和 g 分别看作是一个机器，那么复合函数 $g \circ f$ 就是一个流水线，原材料先输入到 f 机器中然后 output 再作为 g 机器的 input。

EXAMPLE 6

在恒温条件下，理想气体的压强 P 和体积 V 之间的关系为 $PV = C$，其中 C 为常数。如图所示，气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积 V。试求出压强 P 与活塞高度 h 之间的函数关系。

解 设气缸的横截面积为 S, 则体积 V 与活塞高度 h 之间的关系为：

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数 $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$ 为：

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$

■

DEFINITION 4

这里我们需要格外注意反函数的定义域和值域问题，事实上一个具有反函数的函数一定是单射的

反函数

设存在两个函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $b \in B$, 满足：

$$(g \circ f)a = a, \quad (f \circ g)b = b$$

我们称 f 和 g 互为反函数，符号记作 $g(x) = f^{-1}(x)$

EXAMPLE 7 （自由落体的“逆向思考”）

已知自由落体下落的高度 $h(t)$ 和时间 t 的函数关系为：

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

在这个过程中，时间 t 和下落高度的函数关系为：

$$t = f(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则函数 $h(t)$ 和函数 $f(h)$ 是一对反函数。其中：

- $h(t)$ 的定义域是下落的时间（非负实数），值域是下落的高度（非负实数）
- $f(h)$ 的定义域是下落的高度（非负实数），值域是下落的时间（非负实数）

PROPERTIES

1. **图像对称**: 图像 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像，关于直线 $y = x$ 对称
2. **奇偶性关联**:
   - 若 $f(x)$ 是奇函数且存在反函数，则 $f^{-1}(x)$ 同样是一个奇函数
   - 若 $f(x)$ 是一个偶函数，则在其对称区间上不存在反函数
3. **复合函数性质**: 对于互为反函数的 f 和 f^{-1}，有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$，id 表示恒等函数

EXERCISES 1.2

Answers on ANS-1

在问题 *1-5* 中，探讨函数的奇偶性与单调性及其物理含义。

1. 判断函数 $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$ 的奇偶性，并说明其在 $(0, +\infty)$ 上的单调性。

2. **弹簧弹性势能**：公式为 $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$。若考虑位移 x 可正可负（代表压缩或拉伸）：

1. 证明 $E_p(x)$ 是偶函数。
2. 解释这个结论的物理意义（提示：关于平衡位置对称）。

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数。若当 $x \in (0,1)$ 时 $f(x) = 2x + 1$，求 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上的解析式。

4. 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$。通过分析 $x^2 + 1$ 的性质，判断 $f(x)$ 的最大值及对应的 x 值。

5. 物理中的 ** 静电力 ** 公式为 $F(r) = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$。若电荷量固定，分析该函数在 $r \in (0, +\infty)$ 上的单调性。

在问题 6-11 中，通过平移与对称变换处理物理图像。

1. 将抛物线 $y = x^2$ 整体向左平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，写出新的函数解析式。

2. **高度偏移**：一架无人机从海拔 100m 的平台上起飞，其相对于平台的高度为 $h(t) = 5t^2$。请写出无人机相对于海平面高度 $H(t)$ 的函数。这属于哪种平移？

3. 考虑正弦波形 $y = \sin x$。若将其向右平移 $\pi/2$ 个单位，得到的解析式是什么？它与 $\cos x$ 的图像有什么关系？

4. **波动预演**：若波形 $f(x) = x^2$ 以 $v = 2\,\mathrm{m/s}$ 的速度向右传播，写出 $t = 5\,\mathrm{s}$ 时的波形解析式（提示：$x \to x - vt$）。

5. 证明：任何函数 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称后的图像对应的函数一定是 $-f(x)$。

6. 将函数 $y = \sqrt{x}$ 关于 y 轴对称，并说明所得新函数的定义域。

在问题 12-15 中，练习复合函数的拆解与代入。

1. 已知 $f(x) = 2x - 1$，$g(x) = x^2$。分别计算复合函数 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$。它们相等吗？

2. **功率链**：一台电动机的输出功率 $P = I^2R$。若电流随时间变化为 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$，请写出功率随时间变化的复合函数 $P(t)$。

3. 设 $u(x) = 1 - x$，$y(u) = \frac{1}{1-u}$。求 y 关于 x 的复合函数，并简化结果。

4. 物理中，圆周运动的向心加速度 $a = \frac{v^2}{r}$。若速度随时间线性增加 $v = v_0 + kt$，写出 a 随时间 t 变化的函数。

在问题 16-20 中，求解反函数并探讨其物理应用。

1. 求函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 的反函数。

2. **动量与速度**：动量公式为 $p = mv$。若已知动量 p，求速度 v 关于 p 的反函数。

3. **折射定律**：已知 $y = \sin\theta$。在物理实验中，我们测得了 y 的值。请问如何表示 θ？（注：只需说明这是反函数关系）。

4. 考虑函数 $f(x) = x^2$。为什么在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上它没有反函数？要使其拥有反函数，我们需要对 x 做什么样的限制？

5. **综合思考题**：证明如果一个函数 $f(x)$ 既是奇函数又存在反函数 $f^{-1}(x)$，则其反函数也一定是奇函数。（提示：从 $f(f^{-1}(-x))$ 出发）。