目录

1

Preliminaries

CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

1.1 基本符号和概念

DEFINITION 1 集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合 T 表示所有的老师，集合 S 表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1,Chinese 2,Math 1,Physics 1,English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom,Charlie,Mike,Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联系起来。我们将这样的

关系成为“二元关系”

DEFINITION 2 二元关系

设 A 和 B 是两个集合，R 是 A 和 B 之间的一个二元关系，如果对于每一个 $a \in A$，都存在一个 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的二元关系。

EXAMPLE 2

在上面的学校例子中，我们可以定义一个二元关系 R，表示老师与学生之间的指导关系。例如，Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie，Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有：

$$R = \{(\text{Chinese 1}, \text{Tom}), (\text{Chinese 1}, \text{Charlie}), (\text{Math 1}, \text{Mike}), (\text{Math 1}, \text{Michael})\}$$

我们来考虑一种特殊的二元关系，对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的映射，或者函数。

DEFINITION 3 函数

设 A 和 B 是两个集合，f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in f$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$，并称 $b = f(a)$ 为 a 在 f 下的像。

EXAMPLE 3

在上面的学校例子中，我们可以定义一个函数 f，表示每个学生对应的指导老师。例如，Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1，Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有：

$$f(\text{Tom}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Charlie}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Mike}) = \text{Math 1}, \quad f(\text{Michael}) = \text{Math 1}$$

在这里，对于 A 和 B 之间的函数 $f : A \to B$，我们称 A 为定义域，B 为陪域，$f(A)$ 为 f 的值域。

在实际生活中，我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值：

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中，一个变量的值常常取决于另外一个变量的值，水的沸点 b 依赖于海拔高度 h。我们可

以利用函数来表达他们，将 b 称之为**因变量**，h 称之为**自变量**

EXAMPLE 4

已知圆的面积 A 依赖于圆的半径 r，则可以用函数表示为 $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道：

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积 A, 自变量是圆的半径 r

> 将函数想象为一个机器也有助于理解这一概：将自变量 *input* 到机器中，经过函数（机器）的处理，会 *output* 出唯一一个值——因变量。

最后，我们需要了解一些详细的数学符号：

- 实数集 $\mathbb{R}$：表示所有实数的集合
- 自然数集 $\mathbb{N}$：表示所有自然数的集合
- 整数集 $\mathbb{Z}$：表示所有整数的集合
- 有理数集 $\mathbb{Q}$：表示所有有理数的集合

EXERCISES 1.1

在问题 *1-3* 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系 R 中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合 $F = \{$苹果, 香蕉, 葡萄$\}$，将一些颜色设定为集合 $C = \{$红色, 黄色, 紫色, 绿色$\}$。定义一个“具有该颜色”的二元关系 R。

2. 将国家设定为集合 $N = \{$中国, 日本, 英国, 法国$\}$，将洲设定为集合 $S = \{$亚洲, 欧洲, 非洲$\}$。定义一个“属于该洲”的二元关系 R。

3. 将一些实数设定为集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$，集合 $B = \{0, 1, 4\}$。定义一个“平方关系” R，即 $(a, b) \in R$ 当且仅当 $a^2 = b$。

在问题 *4-6* 中，判断所给出的二元关系是否构成“从 A 到 B 的函数”，并说明理由。

1. 集合 A 为平面上所有的三角形, 集合 B 为所有的正实数。二元关系 f 定义为：每个三角形对应它的面积。

2. 集合 A 为所有的实数 $\mathbb{R}$，集合 B 也是 $\mathbb{R}$。二元关系 f 定义为：$f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$。

3. 集合 A 为某物理实验室中的所有温度计，集合 B 为当前室内的温度值。二元关系 f 为：每支温度计显示的读数。

在问题 *7-9* 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$。当电阻 R 固定时，电流 I 随电压 U 变化。
2. 匀加速运动的速度公式 $v = v_0 + at$。其中 v_0 和 a 是常数。
3. 理想气体的压强公式 $P = \frac{nRT}{V}$。假设温度 T 和物质的量 n 固定。

1.2　函数的性质和表达

■ 函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法 (用语言来描述)
- 数值法 (用表格列出函数值)
- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

■ 函数的奇偶性

DEFINITION 1　函数的奇偶性

如果 $y = f(x)$ 是：

$$x\text{的奇函数，如果}f(x) + f(-x) = 0$$
$$x\text{的偶函数，如果}f(x) = f(-x)$$

对于函数的整个区间成立

EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性：

- $f(x) = x^3 + 2x$，因为 $f(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数
- $f(x) = x^2 + 3$，因为 $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数
- $f(x) = x^2 + x$，因为 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

■ 函数的单调性

DEFINITION 2 单调性和单调区间

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义:

- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是增函数。
- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是减函数。

将区间 I 成为函数 $f(x)$ 的单调区间，函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有单调性。

EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x) = 3x + 2$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
- $f(x) = 2^x + 3$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
- $f(x) = x^2 - 3x + 2$，该函数在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增

■ 函数的变换

平移变换

垂直平移图形:

- 往上平移函数 $y = f(x)$ 的图形，加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数 $y = f(x)$ 的图形，加一负常数到公示的右边。

EXAMPLE 3

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加一常数 1 就得到 $y = x^2 + 1$，把图形往上移位了一个单位。
在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加 -2 就得到 $y = x^2 - 2$，把图形下移了两个单位。

水平平移图形

- 往右平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个负常数.

- 往左平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个正常数.

EXAMPLE 4

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x - 3$ 就得到 $y = (x - 3)^2$，把图形往右移了三个单位。
在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x + 2$ 就得到 $y = (x + 2)^2$，把图形往左移了两个单位。

对称变换

- **关于 x 轴对称**: 把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称, 只需把公式右端的 y 替换成 $-y$, 即得到 $y = -f(x)$。
- **关于 y 轴对称**: 把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，只需把公式中的 x 替换成 $-x$，即得到 $y = f(-x)$。

EXAMPLE 5

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 x 轴对称，得到 $y = -x^3$。
把函数 $y = x^3$ 的图形关于 y 轴对称，得到 $y = (-x)^3 = -x^3$。

■ 复合函数和反函数

DEFINITION 3　复合函数

设存在两个函数分别为:$f : A \to B$ 和 $g : B \to C$, 则可以定义复合函数如下:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

其中，$g \circ f : A \to C$ 成为 f 和 g 的复合函数

> 可以将 f 和 g 分别看作是一个机器，那么复合函数 $g \circ f$ 就是一个流水线，原材料先输入到 f 机器中然后 *output* 再作为 g 机器的 *input*。

EXAMPLE 6

在恒温条件下，理想气体的压强 P 和体积 V 之间的关系为 $PV = C$，其中 C 为常数。如图所示，气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积 V。试求出压强 P 与活塞高度 h 之间的函数关系。

解 设气缸的横截面积为 S, 则体积 V 与活塞高度 h 之间的关系为:

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数 $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$ 为:

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$

■

DEFINITION 4 反函数

设存在两个函数 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $b \in B$, 满足:

$$(g \circ f)a = a, \quad (f \circ g)b = b$$

我们称 f 和 g 互为反函数，符号记作 $g(x) = f^{-1}(x)$

> 这里我们需要格外注意反函数的定义域和值域问题，事实上一个具有反函数的函数一定是单射的

EXAMPLE 7 **自由落体的“逆向思考”**

已知自由落体下落的高度 $h(t)$ 和时间 t 的函数关系为:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

在这个过程中，时间 t 和下落高度的函数关系为:

$$t = f(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则函数 $h(t)$ 和函数 $f(h)$ 是一对反函数。其中:

- $h(t)$ 的定义域是下落的时间（非负实数），值域是下落的高度（非负实数）
- $f(h)$ 的定义域是下落的高度（非负实数），值域是下落的时间（非负实数）

PROPERTIES

1. **图像对称**: 图像 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像，关于直线 $y = x$ 对称
2. **奇偶性关联**:
   - 若 $f(x)$ 是奇函数且存在反函数，则 $f^{-1}(x)$ 同样是一个奇函数
   - 若 $f(x)$ 是一个偶函数，则在其对称区间上不存在反函数
3. **复合函数性质**: 对于互为反函数的 f 和 f^{-1}，有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$，id 表示恒等函数

EXERCISES 1.2

在问题 1-5 中，探讨函数的奇偶性与单调性及其物理含义。

1. 判断函数 $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$ 的奇偶性，并说明其在 $(0, +\infty)$ 上的单调性。

2. **弹簧弹性势能**：公式为 $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$。若考虑位移 x 可正可负（代表压缩或拉伸）：

1. 证明 $E_p(x)$ 是偶函数。
2. 解释这个结论的物理意义（提示：关于平衡位置对称）。

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数。若当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) = 2x + 1$，求 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的解析式。

4. 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$。通过分析 $x^2 + 1$ 的性质，判断 $f(x)$ 的最大值及对应的 x 值。

5. 物理中的 ** 静电力 ** 公式为 $F(r) = k\frac{q_1q_2}{r^2}$。若电荷量固定，分析该函数在 $r \in (0, +\infty)$ 上的单调性。

在问题 6-11 中，通过平移与对称变换处理物理图像。

1. 将抛物线 $y = x^2$ 整体向左平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，写出新的函数解析式。

2. **高度偏移**：一架无人机从海拔 100m 的平台上起飞，其相对于平台的高度为 $h(t) = 5t^2$。请写出无人机相对于海平面高度 $H(t)$ 的函数。这属于哪种平移?

3. 考虑正弦波形 $y = \sin x$。若将其向右平移 $\pi/2$ 个单位，得到的解析式是什么? 它与 $\cos x$ 的图像有什么关系?

4. **波动预演**：若波形 $f(x) = x^2$ 以 $v = 2\,\mathrm{m/s}$ 的速度向右传播，写出 $t = 5\,\mathrm{s}$ 时的波形解析式（提示：$x \to x - vt$）。

5. 证明：任何函数 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称后的图像对应的函数一定是 $-f(x)$。

6. 将函数 $y = \sqrt{x}$ 关于 y 轴对称，并说明所得新函数的定义域。

在问题 12-15 中，练习复合函数的拆解与代入。

1. 已知 $f(x) = 2x - 1$，$g(x) = x^2$。分别计算复合函数 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$。它们相等吗?

2. **功率链**：一台电动机的输出功率 $P = I^2R$。若电流随时间变化为 $I(t) = I_0\sin(\omega t)$，请写出功率随时间变化的复合函数 $P(t)$。

3. 设 $u(x) = 1 - x$，$y(u) = \frac{1}{1-u}$。求 y 关于 x 的复合函数，并简化结果。

4. 物理中，圆周运动的向心加速度 $a = \frac{v^2}{r}$。若速度随时间线性增加 $v = v_0 + kt$，写出 a 随时间 t 变化的函数。

在问题 16-20 中，求解反函数并探讨其物理应用。

1. 求函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 的反函数。

2. **动量与速度**：动量公式为 $p = mv$。若已知动量 p，求速度 v 关于 p 的反函数。

3. 折射定律：已知 $y = \sin\theta$。在物理实验中，我们测得了 y 的值。请问如何表示 θ?（注：只需说明这是反函数关系）。

4. 考虑函数 $f(x) = x^2$。为什么在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上它没有反函数？要使其拥有反函数，我们需要对 x 做什么样的限制？

5. 综合思考题：证明如果一个函数 $f(x)$ 既是奇函数又存在反函数 $f^{-1}(x)$，则其反函数也一定是奇函数。（提示：从 $f(f^{-1}(-x))$ 出发）。

1.3 基本初等函数

CHAPTER OBJECTIVES

我们要花一些时间来研究几个基本函数的性质，这些函数将在实际问题中反复用到：

1. 了解三角函数和反三角函数的定义和变换
2. 了解指数函数和对数函数的定义和变换
3. 了解幂函数的基本运算性质

■ 三角函数和反三角函数

我们先回忆中学视角下的三角函数。对于一个直角三角形，设其中一个锐角为 θ，其对边（opposite）、邻边（adjacent）和斜边（hypotenuse）分别为 a, b, c 那么有：

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \quad \cos\theta = \frac{b}{c} \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b} \qquad \theta \in (0°, 90°)$$

现在，我们需要将这一个函数的定义域扩展到所有角度，单位元的三角函数定义如下：

DEFINITION 1 单位圆下的三角函数

单位圆是以原点为中心，半径为 1 的圆。任意角度 θ 对应于单位圆上的一点，三角函数的定义如下

- 正弦 (sin): 一个角 θ 对应的点的 y 坐标
- 余弦 (cos): 一个角 θ 对应的点的 x 坐标
- 正切 (tan): 正弦和余弦的比值 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

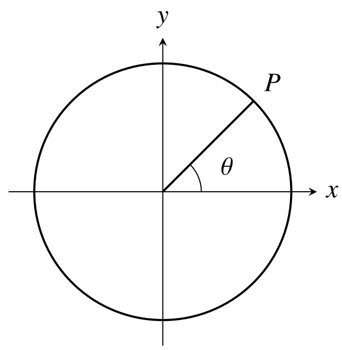

图 1.1: 单位圆

对于单位圆上的点 $P(x,y)$，其横坐标即为 $\cos\theta$，纵坐标即为 $\sin\theta$。由此可见，当点 P 在不同象限运动时，三角函数值的正负号会随之改变。

PROPERTIES

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. **诱导公式**：奇变偶不变，符号看象限
   - $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ (周期性)
     $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$ (奇偶性)
   - $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta, \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
     $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
   - $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$
     $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$
3. **和差化角**：$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$
   $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$

> 在这些基本恒等式的基础上，我们也可以得到别的恒等式，例如二倍角公式和 tan 有关的恒等式，这些恒等式我们会在例题中讨论

EXAMPLE 1 ”拍”现象

生活中，两个频率相近的波发生干涉后会出现**拍**现象。例如钢琴调音时，调音师同时敲击待调的弦和标准弦，在听觉上会感到音量有周期性的强弱。试利用三角函数及其恒等变换式，来解释这种现象的原理。

note: 振动的数学表达式是：$A = \cos(\omega t + \phi)$

三角函数的图像

三角函数的图像通常被称为“正弦波形”（Sinusoidal waves）。在物理学中，它们是描述简谐运动、波动以及交流电最基本的数学模型。

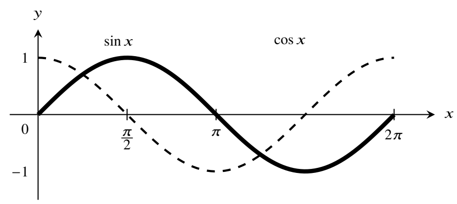

图 1.2: 正弦与余弦图像

PROPERTIES

正弦函数 $y = \sin x$ 的图像性质

- **定义域与值域**：定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $[-1, 1]$。
- **周期性**：具有周期性，最小正周期 $T = 2\pi$。
- **对称性**：关于原点对称，是奇函数。
- **相位关系**：$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$，即余弦图像可看作正弦图像向左平移 $\pi/2$。

物理直觉：在物理中，我们更习惯研究一般形式：
$y = A\sin(\omega x + \phi)$
其中每一个参数都对应一个明确的物理量。

图像的变换与物理意义

在物理竞赛中，理解函数图像的平移与伸缩如何对应物理状态的变化至关重要。

PROPERTIES

参数对图像的影响

- **振幅** A：决定图像在垂直方向的拉伸或压缩。在振动学中，A 代表最大位移。
- **频率参数** ω：决定图像在水平方向的“胖瘦”。ω 越大，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 越小，图像越拥挤。
- **初相位** ϕ：决定图像在水平方向的左右平移。

对于 $y = \sin(\omega x + \phi)$，图像的平移量 $\frac{\phi}{\omega}$ 不是 ϕ。必须先提取系数 ω：

$$y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

这说明图像是向左平移了 $\frac{\phi}{\omega}$ 个单位。在物理中，这意味着“初相位”与“时间偏移”是不同的概念。

EXAMPLE 2 **简谐振动方程解析**

已知一个质点的振动方程为 $x(t) = 10\sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})$（单位：cm, s）。请回答：(a) 该振动的振幅 A 和周期 T 分别是多少？(b) 该图像是由标准正弦波 $y = 10\sin(2\pi t)$ 向哪个方向平移了多少距离得到的？

解 (a) 由方程可知，振幅 $A = 10\,\text{cm}$。角频率 $\omega = 2\pi$，则周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1\,\text{s}$。

(b) 提取系数 ω：$2\pi t + \dfrac{\pi}{3} = 2\pi(t + \dfrac{1}{6})$。根据“左加右减”原则，该图像是由 $y = 10\sin(2\pi t)$ 向左平移了 1/6 个单位距离得到的。 ■

反三角函数及其图像

当我们需要从三角函数的值反推对应的角度时，就需要用到反三角函数。由于三角函数在整个实数域上不是单调的，为了定义其反函数，我们必须**限制其定义域**，使其在特定区间内是“一一对应”的。

> **物理意义**：
> 反三角函数的结果是一个**角度**。在物理竞赛中，它最常用于通过力或速度的分量来确定矢量的方向（即求偏角）。

DEFINITION 2 反正弦与反正切函数

- **反正弦函数**: $y = \arcsin x$：是 $x = \sin y$ 在 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数。
- **反正切函数**: $y = \arctan x$：是 $x = \tan y$ 在 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数。

PROPERTIES

常用反三角函数的定义域与值域

在计算时，务必注意结果（角度）的取值范围：

- $y = \arcsin x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。
- $y = \arccos x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $[0, \pi]$。
- $y = \arctan x$：定义域 $\mathbb{R}$，值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。

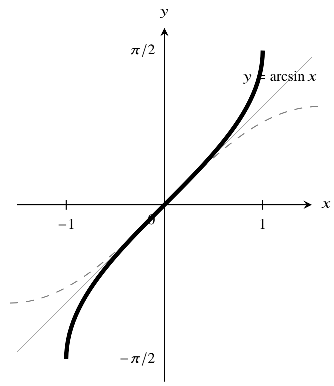

图 1.3: 反正弦函数图像与其对称性

> ! **注意：符号的使用习惯**
>
> 在许多物理教材和科学计算器中，反正弦函数常记作 $\sin^{-1} x$。请务必记住：
>
> $$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x \neq \frac{1}{\sin x}$$
>
> 指数 -1 在这里表示“反函数”，而非“倒数”。

EXAMPLE 3 利用分量确定矢量方向

在平面直角坐标系中，一个力矢量的水平分量为 $F_x = 3.0\,\mathrm{N}$，竖直分量为 $F_y = 4.0\,\mathrm{N}$。试求合力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正方向的夹角 θ。

解 根据矢量合成的几何关系，合力的方向角 θ 满足正切关系：

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4.0}{3.0} \approx 1.333$$

为了求出角度 θ，我们对等式两边取反正切函数：

$$\theta = \arctan\left(\frac{4.0}{3.0}\right)$$

利用计算器计算可得：

$$\theta \approx 0.927\ \mathrm{rad} \quad (约53.1^\circ)$$

这说明该力指向第一象限，与水平方向成 53.1° 角。 ■

> 在物理竞赛的复杂计算中，我们往往不需要算出具体的角度数值，直接保留 $\theta = \arctan(2/3)$ 这种形式通常也是被接受的。

EXERCISES 1.3.1

在问题 *1-5* 中，探讨正切公式与二倍角公式的代数变形

1. **正切展开**：已知 $\tan\alpha = 1/2$，$\tan\beta = 1/3$，利用和角公式计算 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值，并指出 $\alpha+\beta$ 在 $(0,\pi)$ 范围内的具体弧度。
2. **斜面倾角**：在物理受力分析中，经常遇到 $\tan(\theta+45°)$。请将其展开为仅含 $\tan\theta$ 的表达式。
3. 利用二倍角公式证明：$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$。这个公式常用于将复杂的振动方程简化。
4. **降幂公式**：利用 $\cos 2\theta$ 的变形公式，将 $\sin^2\theta$ 和 $\cos^2\theta$ 分别表示为含 $\cos 2\theta$ 的一次表达式。这在计算交流电有效值时非常重要。
5. 已知 $\tan\theta = t$，请利用倍角公式推导出 $\tan 2\theta$ 随 t 变化的表达式，并讨论当 $\theta \to \pi/4$ 时，该式的变化趋势。

在问题 *6-10* 中，掌握万能公式 *(Universal Substitution)* 的应用。

1. **万能公式推导**：设 $t = \tan(\theta/2)$，利用倍角公式和 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ 证明：

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. **参数表达**：若一个物体的速度分量为 $v_x = v_0\cos\theta, v_y = v_0\sin\theta$，请利用 $t = \tan(\theta/2)$ 将其坐标分量转化为关于 t 的分式方程。
3. 利用万能公式求解方程：$\sin\theta + \cos\theta = 1$。
4. 证明：$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$。该结论在光学中分析半偏角时经常使用。
5. 思考：万能公式为什么被称为 "万能"? 在处理含有 sin 和 cos 的复杂分式方程时，这种代换有什么优势?

在问题 *11-15* 中，结合反三角函数进行深度运算。

1. 计算 $\tan(\arcsin\frac{3}{5})$ 的值（提示：先设 $\theta = \arcsin\frac{3}{5}$，画出直角三角形）。
2. 证明反正切加法公式：$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$（假设 $xy < 1$）。
3. w d 偏角计算：已知 $\boldsymbol{v} = (1, t)$，利用 $\theta = \arctan t$ 表达速度方向，并推导当 t 翻倍时，$\tan\theta$ 如何变化。
4. 计算 $\sin(2\arctan\frac{1}{3})$。请直接利用万能公式的结果。
5. 求解 x：$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$。

在问题 *16-20* 中，解决具有竞赛背景的物理综合问题。

1. **摩擦角模型**：一物体放在粗糙斜面上，恰好要下滑时，重力的下滑分量等于最大静摩擦力，即 $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$。
   1. 证明此时斜面倾角 $\theta = \arctan\mu$（μ 为摩擦系数）。
   2. 若斜面倾角变为 $\theta+\phi$，请用 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 表示此时合力倾向的切向比例。
2. **斜抛射程优化**：已知射程 $R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$。若要在水平距离 R 处击中高为 H 的目标，需满足 $H = R\tan\theta - \frac{gR^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$。利用 $1/\cos^2\theta = 1+\tan^2\theta$，将此方程转化为关于 $\tan\theta$ 的一元二次方程。
3. **光的折射近似**：当光线从空气射入水中（$n = 1.33$），在入射角 θ 很小时，利用 $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$，证明实际深度 h 与视深 h' 的关系为 $h/h' \approx n$。
4. **振动合成**：两个同方向振动 $x_1 = A\cos(\omega t)$ 和 $x_2 = A\cos(\omega t + \phi)$ 叠加。利用和差化积（或和角公式展开）证明合振幅 $A_{total} = 2A\cos(\phi/2)$。
5. **视角问题**：一个高为 L 的物体竖直立在地面。观察者眼睛离地高度为 h，水平距离为 x。请用 arctan 写出观察者观察该物体时，眼睛张开的视角 γ 的解析式。

■ 指数函数

EXAMPLE 4 银行复利

2

向量和线性代数

CHAPTER OBJECTIVES

在这一章我们将把视角从简单的数投向一种更复杂的数学结构，完成以下目标：

1. 了解向量和其基本的计算
2. 了解向量几何上的意义
3. 学会简单的线性代数，并尝试应用

2.1 二维向量

向量与向量运算

DEFINITION 1 二维向量

一个有序实数对称为一个**二维向量**，我们用大写字母来表示向量

$$\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$$

数 u_1, u_2 称为向量的**分量**，二维向量的全体称为**二维空间**，记作 $\mathbb{R}^2$

DEFINITION 2 向量的代数运算

- 用一个实数 c **乘**向量 $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$ 得到的结果记为 $c\boldsymbol{U}$, 定义为用 c 乘上 $\boldsymbol{U}$ 的各个分量

$$c\boldsymbol{U} = (cu_1, cu_2)$$

- 向量 $\boldsymbol{U}$ 和向量 $\boldsymbol{V}$ 的**和** $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$, 定义为两个向量对应分量相加得到的向量：

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

向量的数乘和相加满足通常的代数性质：

PROPERTIES

- **交换律**：$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}$
- **结合律**: $(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} + (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W})$
- **分配律**：$(a + b)\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{U} + b\boldsymbol{V}$
- **分配律**：$c(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) = c\boldsymbol{U} + c\boldsymbol{V}$
- **加法逆元**：$\boldsymbol{U} + (-\boldsymbol{U}) = 0$

注意： 向量的另一种表示方法，是包裹在中括号之中，例如向量 (u_1, u_2) 可以被表表示为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$$

下面我们开始讨论向量及向量运算在几何上的意义：

■ 向量的几何意义

我们注意到任意一个向量 $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 都可以视为：

$$\boldsymbol{U} = (x, y) = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们可以将 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 分别看作是 x 轴和 y 轴的单位向量，那么可以将原本的向量 $\boldsymbol{U}$ 视为 $x - y$ 平面上的一个点。

> 在这里，我们可以将原本的 $\boldsymbol{U}$ 写作：
>
> $$x\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

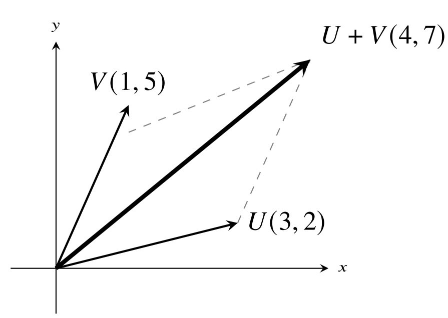

图 2.1: 向量加法的平行四边形法则

通过将向量视为平面中的点，运算具有下述几何解释：

(a) **数乘**：对于非零向量 U 与实数 c，点 cU 位于通过原点与 U 的直线上。若 $c > 0$，方向相同；若 $c < 0$，方向相反。

(b) **加法**：若 $0, U, V$ 不在一条直线上，则 $0, U, U + V, V$ 构成一个平行四边形的四个顶点。

(c) **线段表达**：设 $0 \le c \le 1$，则点 $V + cU$ 位于从 V 到 $V + U$ 的线段上。

■ 线性组合与线性无关

DEFINITION 3　线性组合

向量 U 与 V 的一个 **线性组合**是一个形如如下结构的向量：

$$aU + bV$$

其中 a 与 b 是实数。

EXAMPLE 1　线性组合实例

证明 $U = (5, 3)$ 是 $(1, 1)$ 与 $(-1, 1)$ 的一个线性组合。

解　我们需要寻找 a, b 使得 $a(1, 1) + b(-1, 1) = (5, 3)$。这产生方程组：

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

解得 $a = 4, b = -1$。因此 $U = 4(1, 1) - (1, -1)$。■

DEFINITION 4　线性无关 (Linear Independence)

称向量 U 与 V **线性无关**，如果它们的某个线性组合 $aU + bV = \mathbf{0}$ 仅在 $a = 0, b = 0$ 时成立。

若存在不全为零的系数使得组合为零，则称它们为 **线性相关**。

> **物理意义：**
> 如果两个向量线性相关，说明它们“共线”，即其中一个向量的信息可以由另一个完全替代。

THEOREM 1 线性无关的性质

给定位平面中两个线性无关的向量 C 和 D，则 $\mathbb{R}^2$ 中的每一个向量 U 都可以**唯**一地写成 C 和 D 的线性组合：

$$U = aC + bD$$

■ 线性函数

DEFINITION 5 线性函数

从 $\mathbb{R}^2$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个函数 $\ell : U \mapsto \ell(U)$ 称为线性的，如果：

1. $\ell(cU) = c\ell(U)$
2. $\ell(U + V) = \ell(U) + \ell(V)$

THEOREM 2 线性函数的结构

从 $\mathbb{R}^2$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的每一个线性函数 ℓ 仅当它具有如下形式：

$$\ell(x, y) = px + qy$$

其中 p, q 是实数。

■ 平面的基向量和矩阵

在前文我们提到，对于向量 $\boldsymbol{U} = (x, y)$，我们可以将其视为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一个简写符号，用来指明向量的分量所对应的基向量，第一列对应第一个分量的**基向量**，第二列对应第二个分量的**基向量**。

DEFINITION 6 基向量 (Basis Vectors)

在二维平面 $\mathbb{R}^2$ 中，一组 **基向量**是指两个线性无关的向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$。

- **标准基**：通常我们取 $\boldsymbol{E}_1 = (1, 0)$ 和 $\boldsymbol{E}_2 = (0, 1)$。在物理中，它们常被表示为单位矢量 $\hat{\imath}$ 和 $\hat{\jmath}$。
- **唯一表示**：平面上的任何向量 $\boldsymbol{U}$ 都可以唯一地表示为基向量的线性组合：$\boldsymbol{U} = x\boldsymbol{E}_1 + y\boldsymbol{E}_2$。

> **物理意义：**:
> **基向量** 就像是你测量和描述物理世界的“坐标轴”和“基本单位”。任何物理量（力、速度）都可以沿着这些基本方向进行分解。

矩阵的几何意义：基向量的集合

当我们写出一个 2×2 矩阵时，它的每一列都具有深刻的几何意义。

PROPERTIES

矩阵列的物理/几何意义

对于一个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$:

1. **第一列** $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$：表示第一个分量（通常是 x 坐标）所对应的 **基向量**。
2. **第二列** $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$：表示第二个分量（通常是 y 坐标）所对应的 **基向量**。

因此，一个矩阵可以被视为一个基向量的集合。

> **重要观察**:
> 矩阵乘法 $\boldsymbol{MU}$ 本质上是将向量 $\boldsymbol{U}$ 的坐标（倍数）重新分配给矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中定义的新基向量。

EXAMPLE 2　非标准基下的向量表示

假设我们选择一组新的基向量：$\boldsymbol{v}_1 = (1,1)$ 和 $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1)$。那么，由它们构成的矩阵是 $\boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。如果一个点在“新坐标系”下的坐标是 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，它所代表的实际向量是什么？

解　根据矩阵列的定义，矩阵的第一列是新的 x 轴方向的基向量，第二列是新的 y 轴方向的基向量。将“新坐标”与“基向量矩阵”相乘：

$$\boldsymbol{U}_{actual} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

物理意义： 矩阵在这里充当了“坐标转换器”，它将一组 **抽象坐标**转化为 **实际的物理向量**。 ■

! **注意：坐标与向量的区分**

在这一框架下，我们需要严格区分两个概念：

- **坐标**：一个列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，它仅仅是一组数值系数（倍数）。
- **矩阵**：一个 2×2 矩阵，它存储了基向量（方向和大小）的信息。

只有当 **坐标**与 **矩阵**（基向量的集合）相乘时，它才具有了确定的 **物理意义**，表示空间中的一个实际向量。

利用矩阵我们可以快速处理基变量的变换，从而处理坐标变换：

EXAMPLE 3　向量的旋转变换

已知向量 $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。若将该向量绕原点逆时针旋转 θ 角得到新向量 $\boldsymbol{U}'$，求 $\boldsymbol{U}'$ 在标准基下的坐标。

解　根据“矩阵是基向量集合”的原理，旋转后的向量 $\boldsymbol{U}'$ 可以看作是：原来的坐标份额 (x, y) 作用在了**旋转后的新基向量**上。

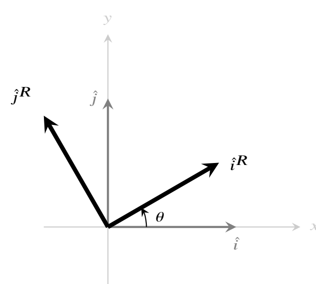

图 2.2: 基向量的旋转

我们将标准基 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 统一旋转 θ 角，得到一组新基向量：

$$\hat{\imath}^R = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \hat{\jmath}^R = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

新向量 $\boldsymbol{U}'$ 依然保持着 x 份的第一基向量和 y 份的第二基向量，只不过基向量变了：

$$\boldsymbol{U}' = x\hat{\imath}^R + y\hat{\jmath}^R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

展开矩阵乘法，得到旋转后的坐标：

$$\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

物理意义：旋转矩阵的每一列，本质上就是旋转后的基向量在原坐标系中的“投影”。 ■

在上面的例题中，我们将对向量的变换改为对基向量的变换，我们可以将线性变换在应用场景中我们常常会遇到对向量的多次变换，我们可以利用基向量变换的思想引入矩阵乘法：

EXAMPLE 4

对向量 $\boldsymbol{U}$ 进行 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 先后两次线性变换，