

1

Preliminaries

CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

1.1 基本符号和概念

DEFINITION 1

集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合 T 表示所有的老师，集合 S 表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1}, \text{Chinese 2}, \text{Math 1}, \text{Physics 1}, \text{English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom}, \text{Charlie}, \text{Mike}, \text{Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联

系起来。我们将这样的关系成为“二元关系”

DEFINITION 2

二元关系

设 A 和 B 是两个集合, R 是 A 和 B 之间的一个二元关系, 如果对于每一个 $a \in A$, 都存在一个 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in R$, 则称 R 为从 A 到 B 的二元关系。

EXAMPLE 2

在上面的学校例子中, 我们可以定义一个二元关系 R , 表示老师与学生之间的指导关系。例如, Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie, Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有:

$$R = \{(Chinese\ 1, Tom), (Chinese\ 1, Charlie), (Math\ 1, Mike), (Math\ 1, Michael)\}$$

我们来考虑一种特殊的二元关系, 对于每一个 $a \in A$, 都存在唯一的 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in R$, 则称 R 为从 A 到 B 的映射, 或者函数。

DEFINITION 3

函数

设 A 和 B 是两个集合, f 是 A 到 B 的一个映射, 如果对于每一个 $a \in A$, 都存在唯一的 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in f$, 则称 f 为从 A 到 B 的函数, 记作 $f : A \rightarrow B$, 并称 $b = f(a)$ 为 a 在 f 下的像。

EXAMPLE 3

在上面的学校例子中, 我们可以定义一个函数 f , 表示每个学生对应的指导老师。例如, Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1, Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有:

$$f(Tom) = Chinese\ 1, \quad f(Charlie) = Chinese\ 1, \quad f(Mike) = Math\ 1, \quad f(Michael) = Math\ 1$$

在这里, 对于 A 和 B 之间的函数 $f : A \rightarrow B$, 我们称 A 为定义域, B 为陪域, $f(A)$ 为 f 的值域。

在实际生活中, 我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值:

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中，一个变量的值常常取决于另外一个变量的值，水的沸点 b 依赖于海拔高度 h 。我们可以利用函数来表达他们，将 b 称之为因变量， h 称之为自变量

EXAMPLE 4

已知圆的面积 A 依赖于圆的半径 r ，则可以用函数表示为 $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道：

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积 A ，自变量是圆的半径 r

最后，我需要了解一些详细的数学符号：

这一概念：将自变量 *input* 到机器中，经

- 实数集 \mathbb{R} : 表示所有实数的集合
- 自然数集 \mathbb{N} : 表示所有自然数的集合
- 整数集 \mathbb{Z} : 表示所有整数的集合
- 有理数集 \mathbb{Q} : 表示所有有理数的集合

EXERCISES 1.1

Answers on ANS-1

在问题 1-3 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系 R 中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合 $F = \{\text{苹果, 香蕉, 葡萄}\}$ ，将一些颜色设定为集合 $C = \{\text{红色, 黄色, 紫色, 绿色}\}$ 。定义一个“具有该颜色”的二元关系 R 。
2. 将国家设定为集合 $N = \{\text{中国, 日本, 英国, 法国}\}$ ，将洲设定为集合 $S = \{\text{亚洲, 欧洲, 非洲}\}$ 。定义一个“属于该洲”的二元关系 R 。
3. 将一些实数设定为集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{0, 1, 4\}$ 。定义一个“平方关系” R ，即 $(a, b) \in R$ 当且仅当 $a^2 = b$ 。

在问题 4-6 中，判断所给出的二元关系是否构成“从 A 到 B 的函数”，并说明理由。

1. 集合 A 为平面上所有的三角形，集合 B 为所有的正实数。二元关系 f 定义为：每个三角形对应它的面积。

2. 集合 A 为所有的实数 \mathbb{R} ，集合 B 也是 \mathbb{R} 。二元关系 f 定义为：
 $f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ 。

3. 集合 A 为某物理实验室中的所有温度计，集合 B 为当前室内的温度值。二元关系 f 为：每支温度计显示的读数。

在问题 7-9 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$ 。当电阻 R 固定时，电流 I 随电压 U 变化。
2. 匀加速运动的速度公式 $v = v_0 + at$ 。其中 v_0 和 a 是常数。
3. 理想气体的压强公式 $P = \frac{nRT}{V}$ 。假设温度 T 和物质的量 n 固定。

1.2 函数的性质和表达

■ 函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法（用语言来描述）
- 数值法（用表格列出函数值）

- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

■ 函数的奇偶性

DEFINITION 1

函数的奇偶性

如果 $y = f(x)$ 是：

x 的奇函数，如果 $f(x) + f(-x) = 0$

x 的偶函数，如果 $f(x) = f(-x)$

对于函数的整个区间成立

EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性：

- $f(x) = x^3 + 2x$, 因为 $f(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数
- $f(x) = x^2 + 3$, 因为 $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数
- $f(x) = x^2 + x$, 因为 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

■ 函数的单调性

DEFINITION 2

单调性和单调区间

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义：

- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是增函数。
- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是减函数。

将区间 I 成为函数 $f(x)$ 的单调区间, 函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有单调性。

EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x) = 3x + 2$, 该函数在 \mathbb{R} 上单调递增
- $f(x) = 2^x + 3$, 该函数在 \mathbb{R} 上单调递增

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 该函数在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增
-

■ 函数的变换

平移变换

垂直平移图形:

- 往上平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 加一负常数到公式右边。

EXAMPLE 3

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加一常数 1 就得到 $y = x^2 + 1$, 把图形往上移位了一个单位。

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加 -2 就得到 $y = x^2 - 2$, 把图形下移了两个单位。

水平平移图形

- 往右平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 在 x 上加一个负常数。
- 往左平移函数 $y = f(x)$ 的图形, 在 x 上加一个正常数。

EXAMPLE 4

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x - 3$ 就得到 $y = (x - 3)^2$, 把图形往右移了三个单位。

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x + 2$ 就得到 $y = (x + 2)^2$, 把图形往左移了两个单位。

对称变换

- **关于 x 轴对称:** 把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称, 只需把公式右端的 y 替换成 $-y$, 即得到 $y = -f(x)$ 。
- **关于 y 轴对称:** 把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 只需把公式中的 x 替换成 $-x$, 即得到 $y = f(-x)$ 。

EXAMPLE 5

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 x 轴对称，得到 $y = -x^3$ 。

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 y 轴对称，得到 $y = (-x)^3 = -x^3$ 。

复合函数和反函数**DEFINITION 3****复合函数**

设存在两个函数分别为: $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow C$, 则可以定义复合函数如下:

可以将 f 和 g 分别看作是一个机器。
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
 那么复合函数 $g \circ f$ 就是一个流水线，
 原材料先输入到 f 机器中然后 *output*
 其中再作为 g 机器的 *input*。

EXAMPLE 6

在恒温条件下，理想气体的压强 P 和体积 V 之间的关系为 $PV = C$ ，其中 C 为常数。如图所示，气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积 V 。试求出压强 P 与活塞高度 h 之间的函数关系。

解 设气缸的横截面积为 S , 则体积 V 与活塞高度 h 之间的关系为:

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数 $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$ 为:

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$

DEFINITION 4**反函数**

设存在两个函数 $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow A$, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $b \in B$, 满足:

这里我们需要格外注意反函数的定义
 $(g \circ f)a = a, (f \circ g)b = b$
 域和值域问题, 事实上一个具有反函
 数的函数一定是单射的
 我们称 f 和 g 互为反函数, 符号记作 $g(x) = f^{-1}(x)$

EXAMPLE 7 自由落体的“逆向思考”

已知自由落体下落的高度 $h(t)$ 和时间 t 的函数关系为:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

在这个过程中, 时间 t 和下落高度的函数关系为:

$$t = f(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则函数 $h(t)$ 和函数 $f(h)$ 是一对反函数。其中:

- $h(t)$ 的定义域是下落的时间 (非负实数), 值域是下落的高度 (非负实数)
- $f(h)$ 的定义域是下落的高度 (非负实数), 值域是下落的时间 (非负实数)

PROPERTIES

1. **图像对称:** 图像 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像, 关于直线 $y = x$ 对称
2. **奇偶性关联:**
 - 若 $f(x)$ 是奇函数且存在反函数, 则 $f^{-1}(x)$ 同样是一个奇函数
 - 若 $f(x)$ 是一个偶函数, 则在其对称区间上不存在反函数
3. **复合函数性质:** 对于互为反函数的 f 和 f^{-1} , 有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$, id 表示恒等函数

EXERCISES 1.2

[Answers on ANS-1](#)

在问题 1-5 中, 探讨函数的奇偶性与单调性及其物理含义。

1. 判断函数 $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$ 的奇偶性, 并说明其在 $(0, +\infty)$ 上的单调性。
2. 弹簧弹性势能: 公式为 $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ 。若考虑位移 x 可正可负 (代表压缩或拉伸):
 1. 证明 $E_p(x)$ 是偶函数。
 2. 解释这个结论的物理意义 (提示: 关于平衡位置对称)。
3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数。若当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) = 2x + 1$, 求 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的解析式。
4. 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 。通过分析 $x^2 + 1$ 的性质, 判断 $f(x)$ 的最大值及对应的 x 值。
5. 物理中的 ** 静电力 ** 公式为 $F(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ 。若电荷量固定, 分析该函数在 $r \in (0, +\infty)$ 上的单调性。

在问题 6-11 中, 通过平移与对称变换处理物理图像。

1. 将抛物线 $y = x^2$ 整体向左平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位, 写出新的函数解析式。

2. **高度偏移:** 一架无人机从海拔 100m 的平台上起飞, 其相对于平台的高度为 $h(t) = 5t^2$ 。请写出无人机相对于海平面高度 $H(t)$ 的函数。这属于哪种平移?
3. 考虑正弦波形 $y = \sin x$ 。若将其向右平移 $\pi/2$ 个单位, 得到的解析式是什么? 它与 $\cos x$ 的图像有什么关系?
4. **波动预演:** 若波形 $f(x) = x^2$ 以 $v = 2 \text{ m/s}$ 的速度向右传播, 写出 $t = 5 \text{ s}$ 时的波形解析式 (提示: $x \rightarrow x - vt$)。
5. 证明: 任何函数 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称后的图像对应的函数一定是 $-f(x)$ 。
6. 将函数 $y = \sqrt{x}$ 关于 y 轴对称, 并说明所得新函数的定义域。

在问题 12-15 中, 练习复合函数的拆解与代入。

1. 已知 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$ 。分别计算复合函数 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 。它们相等吗?
2. **功率链:** 一台电动机的输出功率 $P = I^2 R$ 。若电流随时间变化为 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, 请写出功率随时间变化的复合函数 $P(t)$ 。

3. 设 $u(x) = 1 - x$, $y(u) = \frac{1}{1-u}$ 。求 y 关于 x 的复合函数，并简化结果。
4. 物理中，圆周运动的向心加速度 $a = \frac{v^2}{r}$ 。若速度随时间线性增加 $v = v_0 + kt$ ，写出 a 随时间 t 变化的函数。
- 在问题 16-20 中，求解反函数并探讨其物理应用。
- 求函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 的反函数。
 - 动量与速度：** 动量公式为 $p = mv$ 。若已知动量 p ，求速度 v 关于 p 的反函数。

- 折射定律：** 已知 $y = \sin \theta$ 。在物理实验中，我们测得了 y 的值。请问如何表示 θ ? (注：只需说明这是反函数关系)。
- 考虑函数 $f(x) = x^2$ 。为什么在整个实数集 \mathbb{R} 上它没有反函数？要使其拥有反函数，我们需要对 x 做什么样的限制？
- 综合思考题：** 证明如果一个函数 $f(x)$ 既是奇函数又存在反函数 $f^{-1}(x)$ ，则其反函数也一定是奇函数。(提示：从 $f(f^{-1}(-x))$ 出发)。

1.3 基本初等函数

SECTION OBJECTIVES

我们要花一些时间来研究几个基本函数的性质，这些函数将在实际问题中反复用到：

- 了解三角函数和反三角函数的定义和变换
- 了解指数函数和对数函数的定义和变换
- 了解幂函数的基本运算性质

■ 三角函数和反三角函数

我们先回忆中学视角下的三角函数。对于一个直角三角形，设其中一个锐角为 θ ，其对边 (opposite)、邻边 (adjacent) 和斜边 (hypotenuse) 分别为 a, b, c 那么有：

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \quad \cos \theta = \frac{b}{c} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{b} \quad \theta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

现在，我们需要将这一个函数的定义域扩展到所有角度，单位元的三角函数定义如下：

DEFINITION 1

单位圆下的三角函数

单位圆是以原点为中心，半径为 1 的圆。任意角度 θ 对应于单位圆上的一点，三角函数的定义如下

- 正弦 (sin): 一个角 θ 对应的点的 y 坐标
- 余弦 (cos): 一个角 θ 对应的点的 x 坐标
- 正切 (tan): 正弦和余弦的比值 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

对于单位圆上的点 $P(x, y)$ ，其横坐标即为 $\cos \theta$ ，纵坐标即为 $\sin \theta$ 。由此可见，当点 P 在不同象限运动时，三角函数值的正负号会随之改变。

图 1.1: 单位圆

PROPERTIES

在这些基本恒等式的基础上，我们也可推导出和 $\cos^2 \theta = 1$ 例如二倍角公式和 \tan 有关的恒等式，这些恒等式我们稍后会讨论。符号看象限

- $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$ (周期性)
- $\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$ (奇偶性)
- $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta, \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$

3. 和差化角: $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

EXAMPLE 1

“拍”现象生活中，两个频率相近的波发生干涉后会出现拍现象。例如钢琴调音时，调音师同时敲击待调的弦和标准弦，在听觉上会感到音量有周期性的强弱。试利用三角函数及其恒等变换式，来解释这种现象的原理。

note: 振动的数学表达式是: $A = \cos(\omega t + \phi)$

三角函数的图像

三角函数的图像通常被称为“正弦波形”(Sinusoidal waves)。在物理学中，它们是描述简谐运动、波动以及交流电最基本的数学模型。



PROPERTIES

正弦函数 $y = \sin x$ 的图像性质

- **定义域与值域:** 定义域为 \mathbb{R} ，值域为 $[-1, 1]$ 。
- **周期性:** 具有周期性，最小正周期 $T = 2\pi$ 。
- **对称性:** 关于原点对称，是奇函数。
- **相位关系:** $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ，即余弦图像可看作正弦图像向左平移 $\pi/2$ 。

图像的变换与物理意义

在物理竞赛中，理解函数图像的平移与伸缩如何对应物理状态的变化至关重要。

PROPERTIES

参数对图像的影响

- **振幅 A** : 决定图像在垂直方向的拉伸或压缩。在振动学中， A 代表最大位移。
- **频率参数 ω** : 决定图像在水平方向的“胖瘦”。 ω 越大，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 越小，图像越拥挤。
- **初相位 ϕ** : 决定图像在水平方向的左右平移。

EXAMPLE 2 简谐振动方程解析

已知一个质点的振动方程为 $x(t) = 10 \sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})$ (单位: cm, s)。请回答: (a) 该振动的振幅 A 和周期 T 分别是多少? (b) 该图像是由标准正弦波 $y = 10 \sin(2\pi t)$ 向哪个方向平移了多少距离得到的?

解 (a) 由方程可知, 振幅 $A = 10$ cm。角频率 $\omega = 2\pi$, 则周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ s。
 (b) 提取系数 ω : $2\pi t + \frac{\pi}{3}$ 。根据“左加右减”原则, 该图像是由 $y = 10 \sin(2\pi t)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位距离得到的。■

反三角函数及其图像

当我们需要从三角函数的值反推对应的角度时, 就需要用到反三角函数。由于三角函数在整个实数域上不是单调的, 为了定义其反函数, 我们必须限制其定义域, 使其在特定区间内是“量的对应”的(即单射)。

DEFINITION 2

反正弦与反正切函数

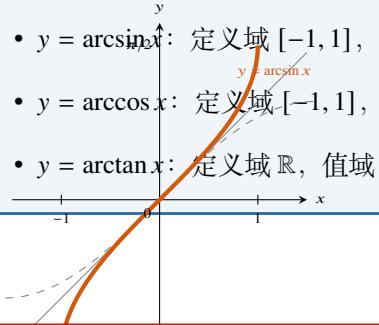
- **反正弦函数**: $y = \arcsin x$: 是 $x = \sin y$ 在 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数。
- **反正切函数**: $y = \arctan x$: 是 $x = \tan y$ 在 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数。

PROPERTIES

常用反三角函数的定义域与值域

在计算时，务必注意结果（角度）的取值范围：

- $y = \arcsin x$: 定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。
- $y = \arccos x$: 定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[0, \pi]$ 。
- $y = \arctan x$: 定义域 \mathbb{R} , 值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。



注意事项：符号的使用习惯

在许多物理教材和科学计算器中，反正弦函数常记作 $\sin^{-1} x$ 。请务必记住：

$$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x \neq \frac{1}{\sin x}$$

指数 -1 在这里表示“反函数”，而非“倒数”。

EXAMPLE 3 利用分量确定矢量方向

在平面直角坐标系中，一个力矢量的水平分量为 $F_x = 3.0 \text{ N}$ ，竖直分量为 $F_y = 4.0 \text{ N}$ 。试求合力 \mathbf{F} 与 x 轴正方向的夹角 θ 。

解 根据矢量合成的几何关系，合力的方向角 θ 满足正切关系：

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4.0}{3.0} \approx 1.333$$

为了求出角度 θ ，我们对等式两边取反正切函数：

在物理竞赛的复杂计算中，我们往往不需要算出具体的角度数值，直接保留 $\theta = \arctan\left(\frac{4.0}{3.0}\right)$ 这种形式通常也是被接

利用计算器计算可得：

$$\theta \approx 0.927 \text{ rad} \quad (\text{约} 53.1^\circ)$$

这说明该力指向第一象限，与水平方向成 53.1° 角。 ■

EXERCISES 1.3.1

Answers on ANS-1

在问题 1-5 中，探讨正切公式与二倍角公式的代数变形

2. 斜面倾角：在物理受力分析中，经常遇到 $\tan(\theta + 45^\circ)$ 。请将其展开为仅含 $\tan \theta$ 的表达式。

1. 正切展开：已知 $\tan \alpha = 1/2$, $\tan \beta = 1/3$ ，利用和角公式计算 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值，并指出 $\alpha + \beta$ 在 $(0, \pi)$ 范围内的具体弧度。

3. 利用二倍角公式证明： $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan \theta$ 。这个公式常用于将复

杂的振动方程简化。

4. **降幂公式:** 利用 $\cos 2\theta$ 的变形公式, 将 $\sin^2 \theta$ 和 $\cos^2 \theta$ 分别表示为含 $\cos 2\theta$ 的一次表达式。这在计算交流电有效值时非常重要。
5. 已知 $\tan \theta = t$, 请利用倍角公式推导出 $\tan 2\theta$ 随 t 变化的表达式, 并讨论当 $\theta \rightarrow \pi/4$ 时, 该式的变化趋势。

在问题 6-10 中, 掌握万能公式 (*Universal Substitution*) 的应用。

1. **万能公式推导:** 设 $t = \tan(\theta/2)$, 利用倍角公式和 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ 证明:

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. **参数表达:** 若一个物体的速度分量为 $v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta$, 请利用 $t = \tan(\theta/2)$ 将其坐标分量转化为关于 t 的分式方程。

3. 利用万能公式求解方程: $\sin \theta + \cos \theta = 1$ 。

4. 证明: $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$ 。该结论在光学中分析半偏角时经常使用。

5. 思考: 万能公式为什么被称为“万能”? 在处理含有 \sin 和 \cos 的复杂分式方程时, 这种代换有什么优势?

在问题 11-15 中, 结合反三角函数进行深度运算。

1. 计算 $\tan(\arcsin \frac{3}{5})$ 的值 (提示: 先设 $\theta = \arcsin \frac{3}{5}$, 画出直角三角形)。
2. 证明反正切加法公式: $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ (假设 $xy < 1$)。

3. **w d 偏角计算:** 已知 $v = (1, t)$, 利用 $\theta = \arctan t$ 表达速度方向, 并推导当 t 翻倍时, $\tan \theta$ 如何变化。

4. 计算 $\sin(2 \arctan \frac{1}{3})$ 。请直接利用万能公式的结果。

5. 求解 x : $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$ 。

在问题 16-20 中, 解决具有竞赛背景的物理综合问题。

1. **摩擦角模型:** 一物体放在粗糙斜面上, 恰好要下滑时, 重力的下滑分量等于最大静摩擦力, 即 $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ 。

1. 证明此时斜面倾角 $\theta = \arctan \mu$ (μ 为摩擦系数)。

2. 若斜面倾角变为 $\theta + \phi$, 请用 $\tan \theta$ 和 $\tan \phi$ 表示此时合力倾向的切向比例。

2. **斜抛射程优化:** 已知射程 $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ 。若要在水平距离 R 处击中高为 H 的目标, 需满足 $H = R \tan \theta - \frac{gR^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$ 。利用 $1/\cos^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, 将此方程转化为关于 $\tan \theta$ 的一元二次方程。

3. **光的折射近似:** 当光线从空气射入水中 ($n = 1.33$), 在入射角 θ 很小时, 利用 $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$, 证明实际深度 h 与视深 h' 的关系为 $h/h' \approx n$ 。

4. **振动合成:** 两个同方向振动 $x_1 = A \cos(\omega t)$ 和 $x_2 = A \cos(\omega t + \phi)$ 叠加。利用和差化积 (或和角公式展开) 证明合振幅 $A_{total} = 2A \cos(\phi/2)$ 。

5. **视角问题:** 一个高为 L 的物体竖直立在地面。观察者眼睛离地高度为 h , 水平距离为 x 。请用 \arctan 写出观察者观察该物体时, 眼睛张开的视角 γ 的解析式。

■ 指数函数

EXAMPLE 4

银行复利