1

Preliminaries

CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

1.1 基本符号和概念

DEFINITION 1

集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合 T 表示所有的老师，集合 S 表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1,Chinese 2,Math 1,Physics 1,English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom,Charlie,Mike,Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联

系起来。我们将这样的关系成为“二元关系”

DEFINITION 2

二元关系

设 A 和 B 是两个集合，R 是 A 和 B 之间的一个二元关系，如果对于每一个 $a \in A$，都存在一个 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的二元关系。

EXAMPLE 2

在上面的学校例子中，我们可以定义一个二元关系 R，表示老师与学生之间的指导关系。例如，Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie，Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有：

$$R = \{(\text{Chinese 1}, \text{Tom}), (\text{Chinese 1}, \text{Charlie}), (\text{Math 1}, \text{Mike}), (\text{Math 1}, \text{Michael})\}$$

我们来考虑一种特殊的二元关系，对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的映射，或者函数。

DEFINITION 3

函数

设 A 和 B 是两个集合，f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in f$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$，并称 $b = f(a)$ 为 a 在 f 下的像。

EXAMPLE 3

在上面的学校例子中，我们可以定义一个函数 f，表示每个学生对应的指导老师。例如，Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1，Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有：

$$f(\text{Tom}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Charlie}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Mike}) = \text{Math 1}, \quad f(\text{Michael}) = \text{Math 1}$$

在这里，对于 A 和 B 之间的函数 $f : A \to B$，我们称 A 为定义域，B 为陪域，$f(A)$ 为 f 的值域。

在实际生活中，我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值：

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中，一个变量的值常常取决于另外一个变量的值，水的沸点 b 依赖于海拔高度 h。我们可以利用函数来表达他们，将 b 称之为**因变量**，h 称之为**自变量**

EXAMPLE 4

已知圆的面积 A 依赖于圆的半径 r，则可以用函数表示为 $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道：

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积 A，自变量是圆的半径 r

将函数想象为一个机器也有助于理解这一概：将自变量 *input* 到机器中，经过函数（机器）的处理，会 *output* 出唯一一个值——因变量。

最后，我们需要了解一些详细的数学符号：

- 实数集 $\mathbb{R}$：表示所有实数的集合
- 自然数集 $\mathbb{N}$：表示所有自然数的集合
- 整数集 $\mathbb{Z}$：表示所有整数的集合
- 有理数集 $\mathbb{Q}$：表示所有有理数的集合

EXERCISES 1.1

Answers on ANS-1

在问题 1-3 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系 R 中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合 $F = \{$苹果, 香蕉, 葡萄$\}$，将一些颜色设定为集合 $C = \{$红色, 黄色, 紫色, 绿色$\}$。定义一个“具有该颜色”的二元关系 R。
2. 将国家设定为集合 $N = \{$中国, 日本, 英国, 法国$\}$，将洲设定为集合 $S = \{$亚洲, 欧洲, 非洲$\}$。定义一个“属于该洲”的二元关系 R。
3. 将一些实数设定为集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$，集合 $B = \{0, 1, 4\}$。定义一个“平方关系” R，即 $(a, b) \in R$ 当且仅当 $a^2 = b$。

在问题 4-6 中，判断所给出的二元关系是否构成“从 A 到 B 的函数”，并说明理由。

1. 集合 A 为平面上所有的三角形，集合 B 为所有的正实数。二元关系 f 定义为：每个三角形对应它的面积。
2. 集合 A 为所有的实数 $\mathbb{R}$，集合 B 也是 $\mathbb{R}$。二元关系 f 定义为：$f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$。
3. 集合 A 为某物理实验室中的所有温度计，集合 B 为当前室内的温度值。二元关系 f 为：每支温度计显示的读数。

在问题 7-9 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$。当电阻 R 固定时，电流 I 随电压 U 变化。
2. 匀加速运动的速度公式 $v = v_0 + at$。其中 v_0 和 a 是常数。
3. 理想气体的压强公式 $P = \frac{nRT}{V}$。假设温度 T 和物质的量 n 固定。

1.2　函数的性质和表达

函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法 (用语言来描述)
- 数值法 (用表格列出函数值)

- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

函数的奇偶性

DEFINITION 1

函数的奇偶性

如果 $y = f(x)$ 是:

$$x\text{的奇函数，如果} f(x) + f(-x) = 0$$
$$x\text{的偶函数，如果} f(x) = f(-x)$$

对于函数的整个区间成立

EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性:

- $f(x) = x^3 + 2x$，因为 $f(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数
- $f(x) = x^2 + 3$，因为 $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数
- $f(x) = x^2 + x$，因为 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

函数的单调性

DEFINITION 2

单调性和单调区间

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义:

- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是增函数。
- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是减函数。

将区间 I 成为函数 $f(x)$ 的单调区间，函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有单调性。

EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x) = 3x + 2$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
- $f(x) = 2^x + 3$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$，该函数在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增

函数的变换

平移变换

垂直平移图形:

- 往上平移函数 $y = f(x)$ 的图形，加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数 $y = f(x)$ 的图形，加一负常数到公示的右边。

EXAMPLE 3

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加一常数 1 就得到 $y = x^2 + 1$，把图形往上移位了一个单位。

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加 -2 就得到 $y = x^2 - 2$，把图形下移了两个单位。

水平平移图形

- 往右平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个负常数.
- 往左平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个正常数.

EXAMPLE 4

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x - 3$ 就得到 $y = (x-3)^2$，把图形往右移了三个单位。

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x + 2$ 就得到 $y = (x+2)^2$，把图形往左移了两个单位。

对称变换

- **关于 x 轴对称**：把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称，只需把公式右端的 y 替换成 $-y$，即得到 $y = -f(x)$。
- **关于 y 轴对称**：把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，只需把公式中的 x 替换成 $-x$，即得到 $y = f(-x)$。

EXAMPLE 5

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 x 轴对称，得到 $y = -x^3$。
把函数 $y = x^3$ 的图形关于 y 轴对称，得到 $y = (-x)^3 = -x^3$。

复合函数和反函数

DEFINITION 3

可以将 f 和 g 分别看作是一个机器，那么复合函数 $g \circ f$ 就是一个流水线，原材料先输入到 f 机器中然后 *output* 再作为 g 机器的 *input*。

复合函数

设存在两个函数分别为:$f: A \to B$ 和 $g: B \to C$, 则可以定义复合函数如下:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

其中，$g \circ f: A \to C$ 成为 f 和 g 的复合函数

EXAMPLE 6

在恒温条件下，理想气体的压强 P 和体积 V 之间的关系为 $PV = C$，其中 C 为常数。如图所示，气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积 V。试求出压强 P 与活塞高度 h 之间的函数关系。

解 设气缸的横截面积为 S, 则体积 V 与活塞高度 h 之间的关系为:

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数 $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$ 为:

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$

■

DEFINITION 4

这里我们需要格外注意反函数的定义域和值域问题，事实上一个具有反函数的函数一定是单射的

反函数

设存在两个函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $b \in B$, 满足:

$$(g \circ f)a = a, \quad (f \circ g)b = b$$

我们称 f 和 g 互为反函数，符号记作 $g(x) = f^{-1}(x)$

EXAMPLE 7 **自由落体的“逆向思考”**

已知自由落体下落的高度 $h(t)$ 和时间 t 的函数关系为：

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

在这个过程中，时间 t 和下落高度的函数关系为：

$$t = f(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则函数 $h(t)$ 和函数 $f(h)$ 是一对反函数。其中：

- $h(t)$ 的定义域是下落的时间（非负实数），值域是下落的高度（非负实数）
- $f(h)$ 的定义域是下落的高度（非负实数），值域是下落的时间（非负实数）

PROPERTIES

1. **图像对称**: 图像 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像，关于直线 $y = x$ 对称
2. **奇偶性关联**:
   - 若 $f(x)$ 是奇函数且存在反函数，则 $f^{-1}(x)$ 同样是一个奇函数
   - 若 $f(x)$ 是一个偶函数，则在其对称区间上不存在反函数
3. **复合函数性质**: 对于互为反函数的 f 和 f^{-1}，有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$，id 表示恒等函数

EXERCISES 1.2

Answers on ANS-1

在问题 1-5 中，探讨函数的奇偶性与单调性及其物理含义。

1. 判断函数 $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$ 的奇偶性，并说明其在 $(0, +\infty)$ 上的单调性。

2. **弹簧弹性势能**：公式为 $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$。若考虑位移 x 可正可负（代表压缩或拉伸）：

1. 证明 $E_p(x)$ 是偶函数。
2. 解释这个结论的物理意义（提示：关于平衡位置对称）。

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数。若当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) = 2x + 1$，求 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的解析式。

4. 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$。通过分析 $x^2 + 1$ 的性质，判断 $f(x)$ 的最大值及对应的 x 值。

5. 物理中的 ** 静电力 ** 公式为 $F(r) = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$。若电荷量固定，分析该函数在 $r \in (0, +\infty)$ 上的单调性。

在问题 6-11 中，通过平移与对称变换处理物理图像。

1. 将抛物线 $y = x^2$ 整体向左平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，写出新的函数解析式。

2. **高度偏移**：一架无人机从海拔 100m 的平台上起飞，其相对于平台的高度为 $h(t) = 5t^2$。请写出无人机相对于海平面高度 $H(t)$ 的函数。这属于哪种平移？

3. 考虑正弦波形 $y = \sin x$。若将其向右平移 $\pi/2$ 个单位，得到的解析式是什么？它与 $\cos x$ 的图像有什么关系？

4. **波动预演**：若波形 $f(x) = x^2$ 以 $v = 2\,\mathrm{m/s}$ 的速度向右传播，写出 $t = 5\,\mathrm{s}$ 时的波形解析式（提示：$x \to x - vt$）。

5. 证明：任何函数 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称后的图像对应的函数一定是 $-f(x)$。

6. 将函数 $y = \sqrt{x}$ 关于 y 轴对称，并说明所得新函数的定义域。

在问题 12-15 中，练习复合函数的拆解与代入。

1. 已知 $f(x) = 2x - 1$，$g(x) = x^2$。分别计算复合函数 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$。它们相等吗？

2. **功率链**：一台电动机的输出功率 $P = I^2R$。若电流随时间变化为 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$，请写出功率随时间变化的复合函数 $P(t)$。

3. 设 $u(x) = 1 - x$，$y(u) = \frac{1}{1-u}$。求 y 关于 x 的复合函数，并简化结果。

4. 物理中，圆周运动的向心加速度 $a = \frac{v^2}{r}$。若速度随时间线性增加 $v = v_0 + kt$，写出 a 随时间 t 变化的函数。

在问题 16-20 中，求解反函数并探讨其物理应用。

1. 求函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 的反函数。

2. **动量与速度**：动量公式为 $p = mv$。若已知动量 p，求速度 v 关于 p 的反函数。

3. **折射定律**：已知 $y = \sin\theta$。在物理实验中，我们测得了 y 的值。请问如何表示 θ？（注：只需说明这是反函数关系）。

4. 考虑函数 $f(x) = x^2$。为什么在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上它没有反函数？要使其拥有反函数，我们需要对 x 做什么样的限制？

5. **综合思考题**：证明如果一个函数 $f(x)$ 既是奇函数又存在反函数 $f^{-1}(x)$，则其反函数也一定是奇函数。（提示：从 $f(f^{-1}(-x))$ 出发）。

1.3 基本初等函数

SECTION OBJECTIVES

我们要花一些时间来研究几个基本函数的性质，这些函数将在实际问题中反复用到:

1. 了解三角函数和反三角函数的定义和变换
2. 了解指数函数和对数函数的定义和变换
3. 了解幂函数的基本运算性质

三角函数和反三角函数

我们先回忆中学视角下的三角函数。对于一个直角三角形，设其中一个锐角为 θ，其对边（opposite）、邻边（adjacent）和斜边（hypotenuse）分别为 a, b, c 那么有：

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b} \qquad \theta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

现在，我们需要将这一个函数的定义域扩展到所有角度，单位元的三角函数定义如下：

DEFINITION 1

单位圆下的三角函数

单位圆是以原点为中心，半径为 1 的圆。任意角度 θ 对应于单位圆上的一点，三角函数的定义如下

- 正弦 (sin): 一个角 θ 对应的点的 y 坐标
- 余弦 (cos): 一个角 θ 对应的点的 x 坐标
- 正切 (tan): 正弦和余弦的比值 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

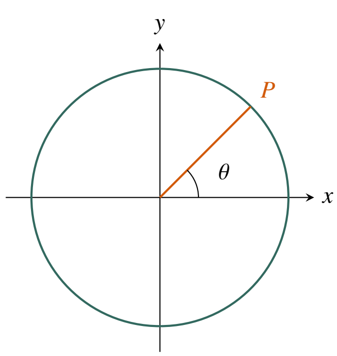

图 1.1: 单位圆

对于单位圆上的点 $P(x, y)$，其横坐标即为 $\cos\theta$，纵坐标即为 $\sin\theta$。由此可见，当点 P 在不同象限运动时，三角函数值的正负号会随之改变。

在这些基本恒等式的基础上，我们也可以得到别的恒等式，例如二倍角公式和 tan 有关的恒等式，这些恒等式我们会在例题中讨论

PROPERTIES

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. **诱导公式**：奇变偶不变，符号看象限
   - $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ (周期性)
     $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ (奇偶性)
   - $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
     $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
   - $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$
     $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$
3. **和差化角**：$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$
   $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$

EXAMPLE 1 **”拍”现象**

生活中，两个频率相近的波发生干涉后会出现**拍**现象。例如钢琴调音时，调音师同时敲击待调的弦和标准弦，在听觉上会感到音量有周期性的强弱。试利用三角函数及其恒等变换式，来解释这种现象的原理。

note: 振动的数学表达式是：$A = \cos(\omega t + \phi)$

三角函数的图像

三角函数的图像通常被称为“正弦波形”（Sinusoidal waves）。在物理学中，它们是描述简谐运动、波动以及交流电最基本的数学模型。

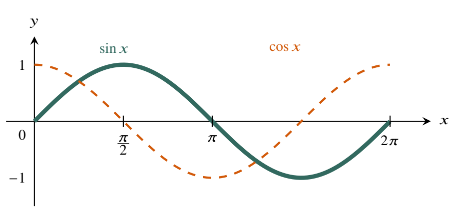

图 1.2: 正弦与余弦图像

PROPERTIES

正弦函数 $y = \sin x$ 的图像性质

- **定义域与值域**：定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $[-1, 1]$。
- **周期性**：具有周期性，最小正周期 $T = 2\pi$。
- **对称性**：关于原点对称，是奇函数。
- **相位关系**：$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$，即余弦图像可看作正弦图像向左平移 $\pi/2$。

图像的变换与物理意义

在物理竞赛中，理解函数图像的平移与伸缩如何对应物理状态的变化至关重要。

PROPERTIES

参数对图像的影响

- **振幅** A：决定图像在垂直方向的拉伸或压缩。在振动学中，A 代表最大位移。
- **频率参数** ω：决定图像在水平方向的“胖瘦”。ω 越大，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 越小，图像越拥挤。
- **初相位** ϕ：决定图像在水平方向的左右平移。

物理直觉：在物理中，我们更习惯研究一般形式：
$y = A\sin(\omega x + \phi)$
其中每一个参数都对应一个明确的物理量。

EXAMPLE 2 简谐振动方程解析

已知一个质点的振动方程为 $x(t) = 10\sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})$（单位：cm, s）。请回答：(a) 该振动的振幅 A 和周期 T 分别是多少？(b) 该图像是由标准正弦波 $y = 10\sin(2\pi t)$ 向哪个方向平移了多少距离得到的？

解 (a) 由方程可知，振幅 $A = 10\,\text{cm}$。角频率 $\omega = 2\pi$，则周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1\,\text{s}$。

(b) 提取系数 ω：$2\pi t + \dfrac{\pi}{3} = 2\pi(t + \dfrac{1}{6})$。根据“左加右减”原则，该图像是由 $y = 10\sin(2\pi t)$ 向左平移了 1/6 个单位距离得到的。■

对于 $y = \sin(\omega x + \phi)$，图像的平移量 $\frac{\phi}{\omega}$ 不是 ϕ。必须先提取系数 ω：

$$y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

这说明图像是向左平移了 $\frac{\phi}{\omega}$ 个单位。在物理中，这意味着“初相位”与“时间偏移”是不同的概念。

反三角函数及其图像

当我们需要从三角函数的值反推对应的角度时，就需要用到反三角函数。由于三角函数在整个实数域上不是单调的，为了定义其反函数，我们必须**限制其定义域**，使其在特定区间内是“一一对应”的。

物理意义：
反三角函数的结果是一个**角度**。在物理竞赛中，它最常用于通过力或速度的分量来确定矢量的方向（即求偏角）。

DEFINITION 2

反正弦与反正切函数

- **反正弦函数**: $y = \arcsin x$：是 $x = \sin y$ 在 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数。
- **反正切函数**: $y = \arctan x$：是 $x = \tan y$ 在 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数。

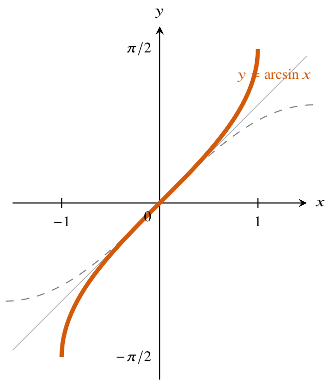

图 1.3: 反正弦函数图像与其对称性

PROPERTIES

常用反三角函数的定义域与值域

在计算时，务必注意结果（角度）的取值范围：

- $y = \arcsin x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。
- $y = \arccos x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $[0, \pi]$。
- $y = \arctan x$：定义域 $\mathbb{R}$，值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。

注意事项：符号的使用习惯

在许多物理教材和科学计算器中，反正弦函数常记作 $\sin^{-1} x$。请务必记住：

$$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x \neq \frac{1}{\sin x}$$

指数 -1 在这里表示“反函数”，而非“倒数”。

EXAMPLE 3 利用分量确定矢量方向

在平面直角坐标系中，一个力矢量的水平分量为 $F_x = 3.0\,\mathrm{N}$，竖直分量为 $F_y = 4.0\,\mathrm{N}$。试求合力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正方向的夹角 θ。

解 根据矢量合成的几何关系，合力的方向角 θ 满足正切关系：

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4.0}{3.0} \approx 1.333$$

为了求出角度 θ，我们对等式两边取反正切函数：

$$\theta = \arctan\left(\frac{4.0}{3.0}\right)$$

在物理竞赛的复杂计算中，我们往往不需要算出具体的角度数值，直接保留 $\theta = \arctan(2/3)$ 这种形式通常也是被接受的。

利用计算器计算可得：

$$\theta \approx 0.927\ \mathrm{rad} \quad (约53.1^\circ)$$

这说明该力指向第一象限，与水平方向成 53.1° 角。 ■

EXERCISES 1.3.1

Answers on ANS-1

在问题 *1-5* 中，探讨正切公式与二倍角公式的代数变形

1. **正切展开**：已知 $\tan\alpha = 1/2$，$\tan\beta = 1/3$，利用和角公式计算 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值，并指出 $\alpha+\beta$ 在 $(0, \pi)$ 范围内的具体弧度。

2. **斜面倾角**：在物理受力分析中，经常遇到 $\tan(\theta + 45^\circ)$。请将其展开为仅含 $\tan\theta$ 的表达式。

3. 利用二倍角公式证明：$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$。这个公式常用于将复

杂的振动方程简化。

4. **降幂公式**：利用 $\cos 2\theta$ 的变形公式，将 $\sin^2\theta$ 和 $\cos^2\theta$ 分别表示为含 $\cos 2\theta$ 的一次表达式。这在计算交流电有效值时非常重要。

5. 已知 $\tan\theta = t$，请利用倍角公式推导出 $\tan 2\theta$ 随 t 变化的表达式，并讨论当 $\theta \to \pi/4$ 时，该式的变化趋势。

在问题 6-10 中，掌握万能公式 (Universal Substitution) 的应用。

1. **万能公式推导**：设 $t = \tan(\theta/2)$，利用倍角公式和 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ 证明：
$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. **参数表达**：若一个物体的速度分量为 $v_x = v_0\cos\theta, v_y = v_0\sin\theta$，请利用 $t = \tan(\theta/2)$ 将其坐标分量转化为关于 t 的分式方程。

3. 利用万能公式求解方程：$\sin\theta + \cos\theta = 1$。

4. 证明：$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$。该结论在光学中分析半偏角时经常使用。

5. 思考：万能公式为什么被称为"万能"？在处理含有 sin 和 cos 的复杂分式方程时，这种代换有什么优势？

在问题 11-15 中，结合反三角函数进行深度运算。

1. 计算 $\tan(\arcsin\frac{3}{5})$ 的值（提示：先设 $\theta = \arcsin\frac{3}{5}$，画出直角三角形）。

2. 证明反正切加法公式：$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$（假设 $xy < 1$）。

3. w d 偏角计算：已知 $\boldsymbol{v} = (1, t)$，利用 $\theta = \arctan t$ 表达速度方向，并推导当 t 翻倍时，$\tan\theta$ 如何变化。

4. 计算 $\sin(2\arctan\frac{1}{3})$。请直接利用万能公式的结果。

5. 求解 x：$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$。

在问题 16-20 中，解决具有竞赛背景的物理综合问题。

1. **摩擦角模型**：一物体放在粗糙斜面上，恰好要下滑时，重力的下滑分量等于最大静摩擦力，即 $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$。
   1. 证明此时斜面倾角 $\theta = \arctan\mu$（μ 为摩擦系数）。
   2. 若斜面倾角变为 $\theta + \phi$，请用 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 表示此时合力倾向的切向比例。

2. **斜抛射程优化**：已知射程 $R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$。若要在水平距离 R 处击中高为 H 的目标，需满足 $H = R\tan\theta - \frac{gR^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$。利用 $1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，将此方程转化为关于 $\tan\theta$ 的一元二次方程。

3. **光的折射近似**：当光线从空气射入水中（$n = 1.33$），在入射角 θ 很小时，利用 $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$，证明实际深度 h 与视深 h' 的关系为 $h/h' \approx n$。

4. **振动合成**：两个同方向振动 $x_1 = A\cos(\omega t)$ 和 $x_2 = A\cos(\omega t + \phi)$ 叠加。利用和差化积（或和角公式展开）证明合振幅 $A_{total} = 2A\cos(\phi/2)$。

5. **视角问题**：一个高为 L 的物体竖直立在地面。观察者眼睛离地高度为 h，水平距离为 x。请用 arctan 写出观察者观察该物体时，眼睛张开的视角 γ 的解析式。

指数函数

EXAMPLE 4 **银行复利**

1.4 向量和线性代数

SECTION OBJECTIVES

在这一章我们将把视角从简单的数投向一种更复杂的数学结构，完成以下目标：

1. 了解向量和其基本的计算
2. 了解向量几何上的意义
3. 学会简单的线性代数，并尝试应用

向量与向量运算

DEFINITION 1

二维向量

一个有序实数对称为一个**二维向量**，我们用大写字母来表示向量

$$\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$$

数 u_1, u_2 称为向量的**分量**，二维向量的全体称为**二维空间**，记作 $\mathbb{R}^2$

DEFINITION 2

向量的代数运算

- 用一个实数 c **乘**向量 $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$ 得到的结果记为 $c\boldsymbol{U}$, 定义为用 c 乘上 $\boldsymbol{U}$ 的各个分量
$$c\boldsymbol{U} = (cu_1, cu_2)$$
- 向量 $\boldsymbol{U}$ 和向量 $\boldsymbol{V}$ 的**和** $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}$, 定义为两个向量对应分量相加得到的向量:
$$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V} = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

向量的数乘和相加满足通常的代数性质:

PROPERTIES

- **交换律**: $\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}$
- **结合律**: $(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})+\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}+(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})$
- **分配律**: $(a+b)\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{U}+b\boldsymbol{V}$
- **分配律**: $c(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}) = c\boldsymbol{U}+c\boldsymbol{V}$
- **加法逆元**: $\boldsymbol{U}+(-\boldsymbol{U}) = 0$

注意: 向量的另一种表示方法，是包裹在中括号之中，例如向量 (u_1, u_2) 可以被表表示为:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$$

下面我们可以讨论向量及向量运算在几何上的意义:

向量的几何意义