目录

1

Preliminaries

CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

1.1 基本符号和概念

DEFINITION 1

集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合 T 表示所有的老师，集合 S 表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1,Chinese 2,Math 1,Physics 1,English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom,Charlie,Mike,Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联

系起来。我们将这样的关系成为“二元关系”

DEFINITION 2

二元关系

设 A 和 B 是两个集合，R 是 A 和 B 之间的一个二元关系，如果对于每一个 $a \in A$，都存在一个 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的二元关系。

EXAMPLE 2

在上面的学校例子中，我们可以定义一个二元关系 R，表示老师与学生之间的指导关系。例如，Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie，Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有：

$$R = \{(\text{Chinese 1}, \text{Tom}), (\text{Chinese 1}, \text{Charlie}), (\text{Math 1}, \text{Mike}), (\text{Math 1}, \text{Michael})\}$$

我们来考虑一种特殊的二元关系，对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in R$，则称 R 为从 A 到 B 的映射，或者函数。

DEFINITION 3

函数

设 A 和 B 是两个集合，f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于每一个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in B$，使得 $(a, b) \in f$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$，并称 $b = f(a)$ 为 a 在 f 下的像。

EXAMPLE 3

在上面的学校例子中，我们可以定义一个函数 f，表示每个学生对应的指导老师。例如，Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1，Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有：

$$f(\text{Tom}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Charlie}) = \text{Chinese 1}, \quad f(\text{Mike}) = \text{Math 1}, \quad f(\text{Michael}) = \text{Math 1}$$

在这里，对于 A 和 B 之间的函数 $f : A \to B$，我们称 A 为定义域，B 为陪域，$f(A)$ 为 f 的值域。

在实际生活中，我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值：

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中，一个变量的值常常取决于另外一个变量的值，水的沸点 b 依赖于海拔高度 h。我们可以利用函数来表达他们，将 b 称之为**因变量**，h 称之为**自变量**

EXAMPLE 4

已知圆的面积 A 依赖于圆的半径 r，则可以用函数表示为 $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道：

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积 A，自变量是圆的半径 r

> 将函数想象成一个机器有助于理解这一概：将自变量 *input* 到机器中，经过函数（机器）的处理，会 *output* 出唯一一个值——因变量。

最后，我们需要了解一些详细的数学符号：

- 实数集 $\mathbb{R}$：表示所有实数的集合
- 自然数集 $\mathbb{N}$：表示所有自然数的集合
- 整数集 $\mathbb{Z}$：表示所有整数的集合
- 有理数集 $\mathbb{Q}$：表示所有有理数的集合

EXERCISES 1.1

Answers on ANS-1

在问题 1-3 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系 R 中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合 $F = \{$苹果, 香蕉, 葡萄$\}$，将一些颜色设定为集合 $C = \{$红色, 黄色, 紫色, 绿色$\}$。定义一个“具有该颜色”的二元关系 R。
2. 将国家设定为集合 $N = \{$中国, 日本, 英国, 法国$\}$，将洲设定为集合 $S = \{$亚洲, 欧洲, 非洲$\}$。定义一个“属于该洲”的二元关系 R。
3. 将一些实数设定为集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$，集合 $B = \{0, 1, 4\}$。定义一个“平方关系” R，即 $(a, b) \in R$ 当且仅当 $a^2 = b$。

在问题 4-6 中，判断所给出的二元关系是否构成“从 A 到 B 的函数”，并说明理由。

1. 集合 A 为平面上所有的三角形，集合 B 为所有的正实数。二元关系 f 定义为：每个三角形对应它的面积。
2. 集合 A 为所有的实数 $\mathbb{R}$，集合 B 也是 $\mathbb{R}$。二元关系 f 定义为：$f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$。
3. 集合 A 为某物理实验室中的所有温度计，集合 B 为当前室内的温度值。二元关系 f 为：每支温度计显示的读数。

在问题 7-9 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$。当电阻 R 固定时，电流 I 随电压 U 变化。
2. 匀加速运动的速度公式 $v = v_0 + at$。其中 v_0 和 a 是常数。
3. 理想气体的压强公式 $P = \frac{nRT}{V}$。假设温度 T 和物质的量 n 固定。

1.2 函数的性质和表达

函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法 (用语言来描述)
- 数值法 (用表格列出函数值)

- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

函数的奇偶性

DEFINITION 1

函数的奇偶性

如果 $y = f(x)$ 是:

$$x\text{的奇函数，如果}f(x) + f(-x) = 0$$
$$x\text{的偶函数，如果}f(x) = f(-x)$$

对于函数的整个区间成立

EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性:

- $f(x) = x^3 + 2x$，因为 $f(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数
- $f(x) = x^2 + 3$，因为 $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数
- $f(x) = x^2 + x$，因为 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

函数的单调性

DEFINITION 2

单调性和单调区间

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义:

- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是增函数。
- 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间上是减函数。

将区间 I 成为函数 $f(x)$ 的单调区间，函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有单调性。

EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x) = 3x + 2$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
- $f(x) = 2^x + 3$，该函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$，该函数在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增

函数的变换

平移变换

垂直平移图形:

- 往上平移函数 $y = f(x)$ 的图形，加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数 $y = f(x)$ 的图形，加一负常数到公示的右边。

EXAMPLE 3

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加一常数 1 就得到 $y = x^2 + 1$，把图形往上移位了一个单位。

在公式 $y = x^2$ 的基础上右端加 -2 就得到 $y = x^2 - 2$，把图形下移了两个单位。

水平平移图形

- 往右平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个负常数.
- 往左平移函数 $y = f(x)$ 的图形，在 x 上加一个正常数.

EXAMPLE 4

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x - 3$ 就得到 $y = (x - 3)^2$，把图形往右移了三个单位。

在公式 $y = x^2$ 的基础上把 x 替换成 $x + 2$ 就得到 $y = (x + 2)^2$，把图形往左移了两个单位。

对称变换

- **关于 x 轴对称**：把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称，只需把公式右端的 y 替换成 $-y$，即得到 $y = -f(x)$。
- **关于 y 轴对称**：把函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，只需把公式中的 x 替换成 $-x$，即得到 $y = f(-x)$。

EXAMPLE 5

把函数 $y = x^3$ 的图形关于 x 轴对称，得到 $y = -x^3$。
把函数 $y = x^3$ 的图形关于 y 轴对称，得到 $y = (-x)^3 = -x^3$。

复合函数和反函数

DEFINITION 3

复合函数

设存在两个函数分别为:$f : A \to B$ 和 $g : B \to C$, 则可以定义复合函数如下:

> 可以将 f 和 g 分别看作是一个机器，那么复合函数 $g \circ f$ 就是一个流水线，原材料先输入到 f 机器中然后 *output* 再作为 g 机器的 *input*。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

其中，$g \circ f : A \to C$ 成为 f 和 g 的复合函数

EXAMPLE 6

在恒温条件下，理想气体的压强 P 和体积 V 之间的关系为 $PV = C$，其中 C 为常数。如图所示，气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积 V。试求出压强 P 与活塞高度 h 之间的函数关系。

解 设气缸的横截面积为 S, 则体积 V 与活塞高度 h 之间的关系为:

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数 $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$ 为:

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$

■

DEFINITION 4

反函数

设存在两个函数 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $b \in B$, 满足:

> 这里我们需要格外注意反函数的定义域和值域问题，事实上一个具有反函数的函数一定是单射的

$$(g \circ f)a = a, \quad (f \circ g)b = b$$

我们称 f 和 g 互为反函数，符号记作 $g(x) = f^{-1}(x)$

EXAMPLE 7 **自由落体的“逆向思考”**

已知自由落体下落的高度 $h(t)$ 和时间 t 的函数关系为：

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

在这个过程中，时间 t 和下落高度的函数关系为：

$$t = f(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则函数 $h(t)$ 和函数 $f(h)$ 是一对反函数。其中：

- $h(t)$ 的定义域是下落的时间（非负实数），值域是下落的高度（非负实数）
- $f(h)$ 的定义域是下落的高度（非负实数），值域是下落的时间（非负实数）

PROPERTIES

1. **图像对称**: 图像 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像，关于直线 $y = x$ 对称
2. **奇偶性关联**：
   - 若 $f(x)$ 是奇函数且存在反函数，则 $f^{-1}(x)$ 同样是一个奇函数
   - 若 $f(x)$ 是一个偶函数，则在其对称区间上不存在反函数
3. **复合函数性质**: 对于互为反函数的 f 和 f^{-1} , 有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$，id 表示恒等函数

EXERCISES 1.2

Answers on ANS-1

在问题 1-5 中，探讨函数的奇偶性与单调性及其物理含义。

1. 判断函数 $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$ 的奇偶性，并说明其在 $(0, +\infty)$ 上的单调性。

2. **弹簧弹性势能**：公式为 $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$。若考虑位移 x 可正可负（代表压缩或拉伸）：

1. 证明 $E_p(x)$ 是偶函数。
2. 解释这个结论的物理意义（提示：关于平衡位置对称）。

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数。若当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) = 2x + 1$，求 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的解析式。

4. 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$。通过分析 $x^2 + 1$ 的性质，判断 $f(x)$ 的最大值及对应的 x 值。

5. 物理中的 ** 静电力 ** 公式为 $F(r) = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$。若电荷量固定，分析该函数在 $r \in (0, +\infty)$ 上的单调性。

在问题 6-11 中，通过平移与对称变换处理物理图像。

1. 将抛物线 $y = x^2$ 整体向左平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，写出新的函数解析式。

2. **高度偏移**：一架无人机从海拔 100m 的平台上起飞，其相对于平台的高度为 $h(t) = 5t^2$。请写出无人机相对于海平面高度 $H(t)$ 的函数。这属于哪种平移？

3. 考虑正弦波形 $y = \sin x$。若将其向右平移 $\pi/2$ 个单位，得到的解析式是什么？它与 $\cos x$ 的图像有什么关系？

4. **波动预演**：若波形 $f(x) = x^2$ 以 $v = 2\,\mathrm{m/s}$ 的速度向右传播，写出 $t = 5\,\mathrm{s}$ 时的波形解析式（提示：$x \to x - vt$）。

5. 证明：任何函数 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称后的图像对应的函数一定是 $-f(x)$。

6. 将函数 $y = \sqrt{x}$ 关于 y 轴对称，并说明所得新函数的定义域。

在问题 12-15 中，练习复合函数的拆解与代入。

1. 已知 $f(x) = 2x - 1$，$g(x) = x^2$。分别计算复合函数 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$。它们相等吗？

2. **功率链**：一台电动机的输出功率 $P = I^2R$。若电流随时间变化为 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$，请写出功率随时间变化的复合函数 $P(t)$。

3. 设 $u(x) = 1 - x$，$y(u) = \frac{1}{1-u}$。求 y 关于 x 的复合函数，并简化结果。

4. 物理中，圆周运动的向心加速度 $a = \frac{v^2}{r}$。若速度随时间线性增加 $v = v_0 + kt$，写出 a 随时间 t 变化的函数。

在问题 16-20 中，求解反函数并探讨其物理应用。

1. 求函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 的反函数。

2. **动量与速度**：动量公式为 $p = mv$。若已知动量 p，求速度 v 关于 p 的反函数。

3. **折射定律**：已知 $y = \sin\theta$。在物理实验中，我们测得了 y 的值。请问如何表示 θ?（注：只需说明这是反函数关系）。

4. 考虑函数 $f(x) = x^2$。为什么在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上它没有反函数？要使其拥有反函数，我们需要对 x 做什么样的限制？

5. **综合思考题**：证明如果一个函数 $f(x)$ 既是奇函数又存在反函数 $f^{-1}(x)$，则其反函数也一定是奇函数。（提示：从 $f(f^{-1}(-x))$ 出发）。

1.3 基本初等函数

SECTION OBJECTIVES

我们要花一些时间来研究几个基本函数的性质，这些函数将在实际问题中反复用到:

1. 了解三角函数和反三角函数的定义和变换
2. 了解指数函数和对数函数的定义和变换
3. 了解幂函数的基本运算性质

三角函数和反三角函数

我们先回忆中学视角下的三角函数。对于一个直角三角形，设其中一个锐角为 θ ，其对边（opposite）、邻边（adjacent）和斜边（hypotenuse）分别为 a, b, c 那么有：

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b} \qquad \theta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

现在，我们需要将这一个函数的定义域扩展到所有角度，单位元的三角函数定义如下：

DEFINITION 1

单位圆下的三角函数

单位圆是以原点为中心，半径为 1 的圆。任意角度 θ 对应于单位圆上的一点，三角函数的定义如下

- 正弦 (sin): 一个角 θ 对应的点的 y 坐标
- 余弦 (cos): 一个角 θ 对应的点的 x 坐标
- 正切 (tan): 正弦和余弦的比值 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

对于单位圆上的点 $P(x, y)$，其横坐标即为 $\cos\theta$，纵坐标即为 $\sin\theta$。由此可见，当点 P 在不同象限运动时，三角函数值的正负号会随之改变。

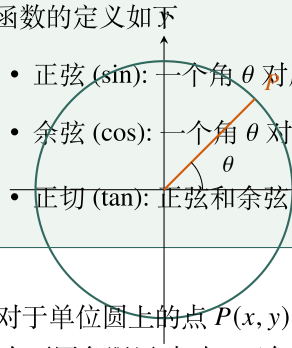


图 1.1: **单位圆**

PROPERTIES

> 在这些基本恒等式的基础上，我们也可以得到别的恒等式，例如二倍角公式和 tan 有关的恒等式，这些恒等式我们会在例题中讨论

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. **诱导公式**：奇变偶不变，符号看象限
   - $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta,\quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ （周期性）
     $\sin(-\theta) = -\sin\theta,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$ （奇偶性）
   - $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta,\quad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
     $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta,\quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
   - $\sin(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta,\quad \cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$
     $\sin(\dfrac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta,\quad \cos(\dfrac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$
3. **和差化角**：$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
   $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

EXAMPLE 1 **”拍”现象**

生活中，两个频率相近的波发生干涉后会出现**拍**现象。例如钢琴调音时，调音师同时敲击待调的弦和标准弦，在听觉上会感到音量有周期性的强弱。试利用三角函数及其恒等变换式，来解释这种现象的原理。

note: 振动的数学表达式是：$A = \cos(\omega t + \phi)$

三角函数的图像

三角函数的图像通常被称为“正弦波形”（Sinusoidal waves）。在物理学中，它们是描述简谐运动、波动以及交流电最基本的数学模型。

PROPERTIES

正弦函数 $y = \sin x$ 的图像性质

- **定义域与值域**：定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $[-1, 1]$。
- **周期性**：具有周期性，最小正周期 $T = 2\pi$。
- **对称性**：关于原点对称，是奇函数。
- **相位关系**：$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$，即余弦图像可看作正弦图像向左平移 $\pi/2$。

图像的变换与物理意义

在物理竞赛中，理解函数图像的平移与伸缩如何对应物理状态的变化至关重要。

PROPERTIES

参数对图像的影响

- **振幅** A：决定图像在垂直方向的拉伸或压缩。在振动学中，A 代表最大位移。
- **频率参数** ω：决定图像在水平方向的“胖瘦”。ω 越大，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 越小，图像越拥挤。
- **初相位** ϕ：决定图像在水平方向的左右平移。

EXAMPLE 2 简谐振动方程解析

对于 $y = \sin(\omega x + \phi)$，图像的平移量是 $\frac{\phi}{\omega}$ 不是 ϕ。必须先提取系数 ω：

$$y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

这说明图像是向左平移了 $\frac{\phi}{\omega}$ 个单位。

在物理中，这意味着“初相位”与“时间位移”是不同的概念。

已知一个质点的振动方程为 $x(t) = 10\sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})$（单位：cm, s）。请回答：(a) 该振动的振幅 A 和周期 T 分别是多少？(b) 该图像是由标准正弦波 $y = 10\sin(2\pi t)$ 向哪个方向平移了多少距离得到的？

解 (a) 由方程可知，振幅 $A = 10\,\text{cm}$。角频率 $\omega = 2\pi$，则周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1\,\text{s}$。

(b) 提取系数 ω：$2\pi t + \dfrac{\pi}{3} = 2\pi(t + \dfrac{1}{6})$。根据“左加右减”原则，该图像是由 $y = 10\sin(2\pi t)$ 向左平移了 1/6 个单位距离得到的。■

反三角函数及其图像

物理意义：反三角函数的结果是一个**角度**。在物理竞赛中，它最常用于通过力或速度的分量来确定矢量的方向（即求偏角）。

当我们需要从三角函数的值反推对应的角度时，就需要用到反三角函数。由于三角函数在整个实数域上不是单调的，为了定义其反函数，我们必须**限制其定义域**，使其在特定区间内是“一一对应”的。

DEFINITION 2

反正弦与反正切函数

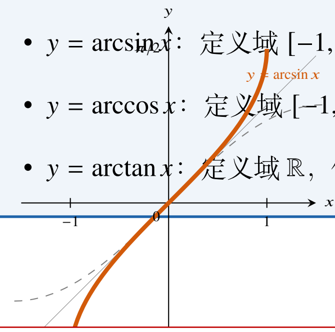
- **反正弦函数**: $y = \arcsin x$：是 $x = \sin y$ 在 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数。
- **反正切函数**: $y = \arctan x$：是 $x = \tan y$ 在 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数。

PROPERTIES

常用反三角函数的定义域与值域

在计算时，务必注意结果（角度）的取值范围：

- $y = \arcsin x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。
- $y = \arccos x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $[0, \pi]$。
- $y = \arctan x$：定义域 $\mathbb{R}$，值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。



注意事项：符号的使用习惯

在许多物理教材和科学计算器中，反正弦函数常记作 $\sin^{-1} x$。请务必记住：

$$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x \neq \frac{1}{\sin x}$$

指数 -1 在这里表示“反函数”，而非“倒数”。

EXAMPLE 3 利用分量确定矢量方向

在平面直角坐标系中，一个力矢量的水平分量为 $F_x = 3.0\,\text{N}$，竖直分量为 $F_y = 4.0\,\text{N}$。试求合力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正方向的夹角 θ。

解 根据矢量合成的几何关系，合力的方向角 θ 满足正切关系：

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4.0}{3.0} \approx 1.333$$

为了求出角度 θ，我们对等式两边取反正切函数：

> 在物理竞赛的复杂计算中，我们往往不需要算出具体的角度数值，直接保留 $\theta = \arctan(2/3)$ 这种形式通常也是被接受的。

$$\theta = \arctan\left(\frac{4.0}{3.0}\right)$$

利用计算器计算可得：

$$\theta \approx 0.927\ \text{rad} \quad (约53.1^\circ)$$

这说明该力指向第一象限，与水平方向成 53.1° 角。■

EXERCISES 1.3.1

Answers on ANS-1

在问题 1-5 中，探讨正切公式与二倍角公式的代数变形

1. **正切展开**：已知 $\tan\alpha = 1/2$，$\tan\beta = 1/3$，利用和角公式计算 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值，并指出 $\alpha+\beta$ 在 $(0, \pi)$ 范围内的具体弧度。

2. **斜面倾角**：在物理受力分析中，经常遇到 $\tan(\theta + 45^\circ)$。请将其展开为仅含 $\tan\theta$ 的表达式。

3. 利用二倍角公式证明：$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$。这个公式常用于将复

杂的振动方程简化。

4. **降幂公式**：利用 $\cos 2\theta$ 的变形公式，将 $\sin^2\theta$ 和 $\cos^2\theta$ 分别表示为含 $\cos 2\theta$ 的一次表达式。这在计算交流电有效值时非常重要。

5. 已知 $\tan\theta = t$，请利用倍角公式推导出 $\tan 2\theta$ 随 t 变化的表达式，并讨论当 $\theta \to \pi/4$ 时，该式的变化趋势。

在问题 6-10 中，掌握万能公式 (Universal Substitution) 的应用。

1. **万能公式推导**：设 $t = \tan(\theta/2)$，利用倍角公式和 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ 证明：
$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. **参数表达**：若一个物体的速度分量为 $v_x = v_0\cos\theta, v_y = v_0\sin\theta$，请利用 $t = \tan(\theta/2)$ 将其坐标分量转化为关于 t 的分式方程。

3. 利用万能公式求解方程：$\sin\theta + \cos\theta = 1$。

4. 证明：$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$。该结论在光学中分析半偏角时经常使用。

5. 思考：万能公式为什么被称为"万能"？在处理含有 sin 和 cos 的复杂分式方程时，这种代换有什么优势？

在问题 11-15 中，结合反三角函数进行深度运算。

1. 计算 $\tan(\arcsin\frac{3}{5})$ 的值（提示：先设 $\theta = \arcsin\frac{3}{5}$，画出直角三角形）。

2. 证明反正切加法公式：$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$（假设 $xy < 1$）。

3. w d 偏角计算：已知 $\mathbf{v} = (1, t)$，利用 $\theta = \arctan t$ 表达速度方向，并推导当 t 翻倍时，$\tan\theta$ 如何变化。

4. 计算 $\sin(2\arctan\frac{1}{3})$。请直接利用万能公式的结果。

5. 求解 x：$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$。

在问题 16-20 中，解决具有竞赛背景的物理综合问题。

1. **摩擦角模型**：一物体放在粗糙斜面上，恰好要下滑时，重力的下滑分量等于最大静摩擦力，即 $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$。
   1. 证明此时斜面倾角 $\theta = \arctan\mu$（μ 为摩擦系数）。
   2. 若斜面倾角变为 $\theta + \phi$，请用 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 表示此时合力倾向的切向比例。

2. **斜抛射程优化**：已知射程 $R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$。若要在水平距离 R 处击中高为 H 的目标，需满足 $H = R\tan\theta - \frac{gR^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$。利用 $1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，将此方程转化为关于 $\tan\theta$ 的一元二次方程。

3. **光的折射近似**：当光线从空气射入水中（$n = 1.33$），在入射角 θ 很小时，利用 $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$，证明实际深度 h 与视深 h' 的关系为 $h/h' \approx n$。

4. **振动合成**：两个同方向振动 $x_1 = A\cos(\omega t)$ 和 $x_2 = A\cos(\omega t + \phi)$ 叠加。利用和差化积（或和角公式展开）证明合振幅 $A_{total} = 2A\cos(\phi/2)$。

5. **视角问题**：一个高为 L 的物体竖直立在地面。观察者眼睛离地高度为 h，水平距离为 x。请用 arctan 写出观察者观察该物体时，眼睛张开的视角 γ 的解析式。

指数函数

函数 $f(x) = 2^x$ 称为**指数函数**，因为变量是指数。不要与幂函数 $g(x) = x^2$ 混淆，这里 x 为底数

DEFINITION 3

指数函数一般指形如：
$$f(x) = b^x$$
的函数，其中 b 为正常数

我们需要申明一下它的含义：

1. $x = n$, n 为正整数，则：
$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{个}b}$$

2. $x = n$, n 为负整数，则：
$$b^n = \frac{1}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{-n\text{个}b}}$$

3. $x = p/q$, 即 n 为有理数，则:

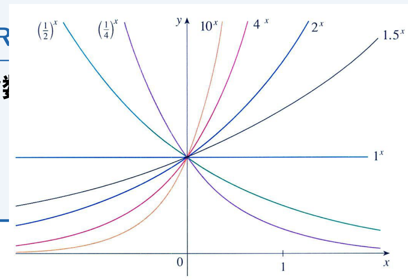
$$b^x = b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$$

而对于 x 是无理数的情况，我们可以利用有理数的逼近证明其只有一个只来保证指数函数的单调性。

PR

指

3.$(b^x)^y = b^{xy}$ 4.$(ab)^x = a^x b^x$



…指数函数图像

从图中可以看到指数函数具有单调性，根据底数的大小分为三类，指数函数的渐近线将在后文提及。

EXAMPLE 4

画出函数 $y = 3 - 2^x$ 的图像并指出其定义域和值域

指数函数的应用

指数函数在自然现象和社会现象的数学模型中频繁出现，我们将在后文解释其原因，这里简单举例一个细菌增殖的例子:

EXAMPLE 5 **培养基里的细菌数量**

考虑一个营养均匀充足的培养基，通过定时采样发现细菌数量每小时增值一倍，若 t(单位: h) 时的细菌数量为 $p(t)$ 初始数量为 $p(0) = 1000$, 则:

解

- $p(1) = 2p(0) = 2000$
- $p(2) = 2p(1) = 4000$
- $p(t) = 2^t \times 1000$

■

常数 e

在指数函数的所有底数中，从微积分的角度看有一个是最方便的，这就是自然常数 e

DEFINITION 4

自然常数

设自然常数 e 满足函数:

$$f(x) = e^x$$

使得函数在 $x = 0$ 时切线的斜率为 1

我们可以简单估计一下自然常数的值，如左图所示，指数函数在 $x = 0$ 处的斜率和底数 b 有函数关系，我们可以证明 $k = g(b)$ 是一个单调递增的函数，且:

$$g(2) < 1 < g(3)$$

所以我们可以得到: $e \in (2, 3)$

事实上，$e = 2.718\cdots$，是一个无理数。

对数函数

根据前文我们可以看到指数函数具有**单调性**, 根据反函数原理我们可以知道指数函数具有对应的反函数

DEFINITION 5

对数函数

对于一个正实数 $b > 0$ 且 $b \neq 1$，定义对数函数 $\log_b(x)$ 为:

$$y = \log_b(x) \quad \text{当且仅当} \quad b^y = x, \quad \text{其中} \quad x > 0.$$

在上面我们可以看到对数函数具有以下性质:

PROPERTIES

1. **定义域与值域**:
   - 对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$，即 x 必须大于 0。
   - 对数函数的值域为整个实数集 $\mathbb{R}$，即对于任何正实数 x，都有一个对应的实数值 y。
2. **基本运算规则**:
   - $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
   - $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
   - $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$
   - $\log_b(b) = 1$
   - $\log_b(1) = 0$
   - $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$

3. **换底公式**：对于任意的正实数 $a, b > 0$ 且 $a \neq 1$，可以通过换底公式将对数函数从一个底数转换为另一个底数：

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

换底公式是对数函数中非常常用的一条性质，尤其是在计算时，可以根据需要选择方便的底数。

常用对数函数

- **自然对数**：当底数 b 取 e（自然常数）时，对数函数被称为自然对数，记作 $\ln(x)$，即：

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

其中，$e \approx 2.71828$。

- **常用对数**：当底数 b 取 10 时，对数函数称为常用对数，记作 $\lg(x)$，即：

$$\lg(x) = \log_{10}(x)$$

对数函数的图像

对数函数是指数函数的反函数，因此它与指数函数有着密切的关系。对数函数的图像通常具有以下特点：

1. 定义域为 $(0, +\infty)$，即只对正数定义。
2. 值域为整个实数集 $\mathbb{R}$，即可以取任意实数值。
3. 在 $x = 1$ 处通过原点，且随着 x 增大，函数值逐渐增大。

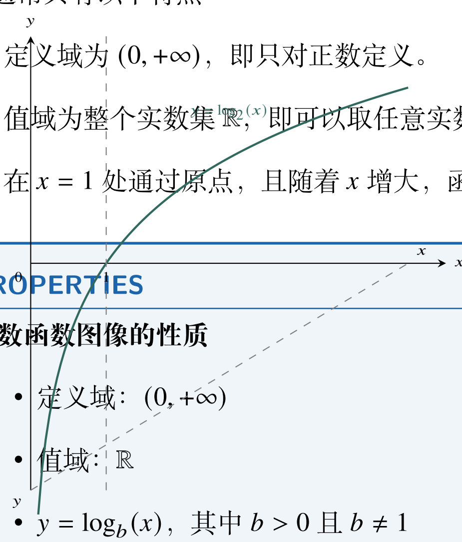


图 1.3: **对数函数图像**

PROPERTIES

对数函数图像的性质

- 定义域：$(0, +\infty)$
- 值域：$\mathbb{R}$
- $y = \log_b(x)$，其中 $b > 0$ 且 $b \neq 1$
- y 在 $x = 1$ 处经过原点，$y(1) = 0$
- 当 $b > 1$ 时，y 随着 x 增大而增大；当 $0 < b < 1$ 时，y 随着 x 增大而减小
- 图像通过点 $(1, 0)$，并且在 x 趋向于 0^+ 时，y 趋向于 $-\infty$。

上图为底数为 $b = 2$ 的对数函数图像。可以看到，随着 x 的增大，$y = \log_2(x)$ 的值逐渐增大，而当 x 趋向于 0 时，y 会趋向于 $-\infty$。函数图像在 $x = 1$ 处经过原点。

对数函数及其应用

在物理学中，对数函数常常用于描述衰减、增长等过程。例如，在放射性衰变中，物质的剩余量通常随时间呈指数衰减，而对数函数可以帮助我们求解不同时间点的物质剩余量。

EXAMPLE 6 放射性衰变

在放射性物质的衰变过程中，某物质的剩余量 $N(t)$ 随时间 t（单位：年）变化，符合以下指数衰减模型：

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

其中，N_0 是物质的初始量，λ 是衰变常数，t 是时间。已知该物质的初始量为 $N_0 = 1000$ 克，且每年剩余量减半。请求解该物质的衰变常数 λ。

解 根据题意，物质每年剩余量减半，即当 $t = 1$ 时，剩余量为初始量的一半，因此：

$$N(1) = \frac{N_0}{2}$$

代入衰变公式：

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \cdot 1}$$

两边除以 N_0：

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda}$$

对两边取自然对数：

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda$$

利用 $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$，得到：

$$-\ln(2) = -\lambda$$

因此，衰变常数为：

$$\lambda = \ln(2) \approx 0.693 \quad \text{每年}$$

■

第二问： 计算该物质在经过 10 年后的剩余量。

解 根据衰变公式：

$$N(10) = N_0 e^{-\lambda \cdot 10}$$

代入已知数值，$N_0 = 1000$ 克，$\lambda \approx 0.693$：

$$N(10) = 1000 e^{-0.693 \cdot 10}$$

计算指数部分：

$$N(10) = 1000 e^{-6.93} \approx 1000 \times 0.000998$$

因此，经过 10 年后，剩余量约为：

$$N(10) \approx 1 \text{ 克}$$

■

结论

- 该物质的衰变常数为 $\lambda \approx 0.693$ 每年。

- 经过 10 年后，该物质的剩余量约为 1 克。

EXERCISES 1.3.2

Answers on ANS-1

在问题 1-5 中，求解指数函数及其图像的基本性质。

1. 求解指数函数 $f(x) = 3^x$ 的定义域和值域，并画出其图像。
2. 画出函数 $f(x) = 2^{x-1}$ 的图像，并指出其定义域和值域。
3. 证明指数函数 $f(x) = 2^x$ 是单调递增的。
4. 求解函数 $f(x) = 5^x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程。
5. 判断函数 $f(x) = e^{2x}$ 的单调性，并给出理由。

在问题 6-10 中，运用对数函数的定义，解答以下问题。

1. 求解 $f(x) = \log_2(x)$ 的定义域和值域。
2. 求解 $f(x) = \log_3(x-1)$ 的定义域和值域。
3. 计算 $\log_2 8$ 和 $\log_2 32$，并验证其结果。
4. 给出 $\log_5 25$ 的计算方法并求值。
5. 设 $f(x) = \log_7(x)$，求 $f(49)$。

在问题 11-15 中，运用对数的基本运算规则解答以下问题。

1. 证明 $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ 并给出一个实际例子。
2. 证明 $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$ 并给出一个实际例子。
3. 证明 $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$，并解释其物理意义。
4. 证明 $\log_b(b) = 1$，并提供一个应用实例。
5. 证明 $\log_b(1) = 0$，并解释其应用。

在问题 16-20 中，指数函数应用到物理中的实际问题。

1. 某物质的半衰期为 5 年，初始量为 2000 克。该物质的剩余量 $N(t)$ 随时间变化，符合公式 $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$。求解该物质的衰变常数 λ，并计算经过 10 年后物质的剩余量。
2. 一颗原子核的放射性衰变遵循指数衰变模型，其衰变过程符合公式 $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$，其中 $N_0 = 500$ 克，$\lambda = 0.1$。求该物质在 20 年后的剩余量。
3. 由于热传导，某物体的温度 $T(t)$ 随时间 t 的变化满足 $T(t) = T_0e^{-kt}$。假设该物体的初始温度为 100°C，而在经过 2 小时后温度降至 50°C，求热传导常数 k。
4. 一个物体的质量 $m(t)$ 随时间 t 衰减，符合公式 $m(t) = m_0e^{-kt}$，其中 $m_0 = 500$ 克。假设物体在 5 小时后剩余 200 克，求该物体的衰变常数 k。
5. 某药物在体内的浓度随时间 t 的变化符合公式 $C(t) = C_0e^{-\lambda t}$，其中 $C_0 = 100$ mg/L，$\lambda = 0.5$。求该药物在 4 小时后的浓度。

在问题 21-25 中，结合对数函数应用到物理中的实际问题。

1. 某物质的剩余量 $N(t)$ 随时间 t 变化，符合公式 $N(t) = 1000e^{-0.693t}$。求解该物质在 $t = 5$ 年时的剩余量。
2. 在某物理过程中，某物体的温度 $T(t)$ 随时间变化，符合公式 $T(t) = 1000\log_2(t+1)$。求当 $t = 3$ 时的温度。
3. 计算放射性物质的半衰期，已知其衰变常数为 $\lambda = 0.3466$，并应用对数公式求解。
4. 某物理实验中，测得的衰变过程符合 $N(t) = 1000e^{-0.5t}$。求解该物质的衰变常数。
5. 某反应的速率常数 k 与温度 T 的关系为 $\ln(k) = 0.05T - 2$。求当 $T = 200$ 时，速率常数 k 的值。

在问题 26-29 中，结合对数的换底公式解答以下问题。

1. 使用换底公式计算 $\log_2 16$。
2. 使用换底公式计算 $\log_3 81$。
3. 使用换底公式将 $\log_7 49$ 转换为以 $\log_2$ 为底的对数，并求解。
4. 使用换底公式将 $\log_5 25$ 转换为以自然对数为底的对数，并求解。

在问题 30-35 中，探究对数运算法则的性质。

1. 证明：$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ 并用实例验证。
2. 证明：$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$ 并举例说明。
3. 证明：$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$。
4. 证明：$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$。
5. 证明：$\log_b b = 1$，并给出例子说明。
6. 探讨常用对数 $\lg(x)$ 与自然对数 $\ln(x)$ 之间的关系，并通过换底公式计算 $\lg(x)$ 和 $\ln(x)$ 的转换。
7. 证明：$\log_b(xy) - \log_b(z) = \log_b\left(\frac{xy}{z}\right)$，并应用此公式进行实际计算。
8. 证明：$\log_b(x) + \log_b(y) = \log_b(xy)$，并通过实际计算验证。
9. 证明：$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$，并解释其应用。
10. 使用对数运算法则解答：$\log_2 32 + \log_2 4 - \log_2 2$ 的值。

2

向量和线性代数

CHAPTER OBJECTIVES

在这一章我们将把视角从简单的数投向一种更复杂的数学结构，完成以下目标：

1. 了解向量和其基本的计算
2. 了解向量几何上的意义
3. 学会简单的线性代数，并尝试应用

2.1 二维向量

向量与向量运算

DEFINITION 1

二维向量

一个有序实数对称为一个**二维向量**，我们用大写字母来表示向量

$$\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$$

数 u_1, u_2 称为向量的**分量**，二维向量的全体称为**二维空间**，记作 $\mathbb{R}^2$

DEFINITION 2

向量的代数运算

- 用一个实数 c **乘**向量 $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$ 得到的结果记为 $c\boldsymbol{U}$, 定义为用 c 乘上 $\boldsymbol{U}$ 的各个分量
$$c\boldsymbol{U} = (cu_1, cu_2)$$
- 向量 $\boldsymbol{U}$ 和向量 $\boldsymbol{V}$ 的**和** $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$, 定义为两个向量对应分量相加得到的向量：
$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

向量的数乘和相加满足通常的代数性质：

PROPERTIES

- **交换律**：$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}$
- **结合律**: $(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} + (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W})$
- **分配律**：$(a + b)\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{U} + b\boldsymbol{V}$
- **分配律**：$c(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) = c\boldsymbol{U} + c\boldsymbol{V}$
- **加法逆元**：$\boldsymbol{U} + (-\boldsymbol{U}) = 0$

注意： 向量的另一种表示方法，是包裹在中括号之中，例如向量 (u_1, u_2) 可以被表表示为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$$

下面我们开始讨论向量及向量运算在几何上的意义：

向量的几何意义

我们注意到任意一个向量 $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 都可以视为：

> 在这里，我们可以将原本的 $\boldsymbol{U}$ 写作：
>
> $$x\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = (x, y) = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们可以将 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 分别看作是 x 轴和 y 轴的单位向量，那么可以将原本的向量 $\boldsymbol{U}$ 视为 $x - y$ 平面上的一个点。

通过将向量视为平面中的点，运算具有下述几何解释：

(a) **数乘**：对于非零向量 U 与实数 c，点 cU 位于通过原点与 U 的直线上。若 $c > 0$，方向相同；若 $c < 0$，方向相反。

(b) **加法**：若 $0, U, V$ 不在一条直线上，则 $0, U, U + V, V$ 构成一个平行四边形的四个顶点。

(c) **线段表达**：设 $0 \le c \le 1$，则点 $V + cU$ 位于从 V 到 $V + U$ 的线段上。

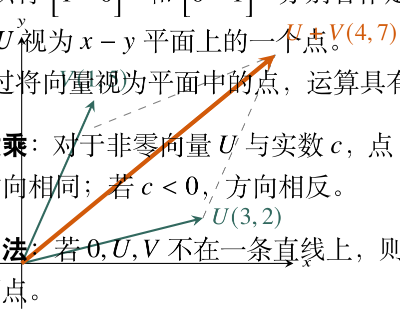


图 2.1: **向量加法的平行四边形法则**

线性组合与线性无关

DEFINITION 3

线性组合

向量 U 与 V 的一个 **线性组合**是一个形如如下结构的向量：

$$aU + bV$$

DEFINITION 3

其中 a 与 b 是实数。

EXAMPLE 1 **线性组合实例**

证明 $U = (5,3)$ 是 $(1,1)$ 与 $(-1,1)$ 的一个线性组合。

解　我们需要寻找 a, b 使得 $a(1,1) + b(-1,1) = (5,3)$。这产生方程组：

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

解得 $a = 4, b = -1$。因此 $U = 4(1,1) - (1,-1)$。■

DEFINITION 4

线性无关 (Linear Independence)

称向量 U 与 V **线性无关**，如果它们的某个线性组合 $aU + bV = \mathbf{0}$ 仅在 $a = 0, b = 0$ 时成立。

若存在不全为零的系数使得组合为零，则称它们为 **线性相关**。

物理意义： 如果两个向量线性相关，说明它们“共线”，即其中一个向量的信息可以由另一个完全替代。

THEOREM 1

线性无关的性质

给定位平面中两个线性无关的向量 C 和 D，则 $\mathbb{R}^2$ 中的每一个向量 U 都可以 **唯一**地写成 C 和 D 的线性组合：

$$U = aC + bD$$

线性函数

DEFINITION 5

线性函数

从 $\mathbb{R}^2$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个函数 $\ell : U \mapsto \ell(U)$ 称为线性的，如果：

1. $\ell(cU) = c\ell(U)$
2. $\ell(U + V) = \ell(U) + \ell(V)$

THEOREM 2

线性函数的结构

THEOREM 2

从 $\mathbb{R}^2$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的每一个线性函数 ℓ 仅当它具有如下形式：

$$\ell(x, y) = px + qy$$

其中 p, q 是实数。

平面的基向量和矩阵

在前文我们提到，对于向量 $= (x, y)$，我们可以将其视为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中，$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一个简写符号，用来指明向量的分量所对应的基向量，第一列对应第一个分量的**基向量**，第二列对应第二个分量的**基向量**。

DEFINITION 6

基向量 (Basis Vectors)

在二维平面 $\mathbb{R}^2$ 中，一组 **基向量**是指两个线性无关的向量 $_1$ 和 $_2$。

> **物理意义：**：基向量就像是测量和描述物理世界的"坐标轴"和"基本单位"。任何物理量（力、速度）都可以沿着这些基本方向进行分解。

- **标准基**：通常我们取 $_1 = (1, 0)$ 和 $_2 = (0, 1)$。在物理中，它们常被表示为单位矢量 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$。
- **唯一表示**：平面上的任何向量 都可以唯一地表示为基向量的线性组合： $= x_1 + y_2$。

矩阵的几何意义：基向量的集合

当我们写出一个 2×2 矩阵时，它的每一列都具有深刻的几何意义。

PROPERTIES

矩阵列的物理/几何意义

对于一个 2×2 矩阵 $= \begin{bmatrix} _1 & _2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$：

1. **第一列** $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$：表示第一个分量（通常是 x 坐标）所对应的 **基向量**。
2. **第二列** $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$：表示第二个分量（通常是 y 坐标）所对应的 **基向量**。

因此，一个矩阵可以被视为一个基向量的集合。

EXAMPLE 2　非标准基下的向量表示

M 本质上是将向量 的坐标（倍数）重新分配给矩阵 M 中定义的新基向量。

假设我们选择一组新的基向量：$v_1 = (1,1)$ 和 $v_2 = (-1,1)$。那么，由它们构成的矩阵是 $M' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。如果一个点在“新坐标系”下的坐标是 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，它所代表的实际向量是什么？

解　根据矩阵列的定义，矩阵的第一列是新的 x 轴方向的基向量，第二列是新的 y 轴方向的基向量。将“新坐标”与“基向量矩阵”相乘：

$$actual = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

物理意义： 矩阵在这里充当了“坐标转换器”，它将一组 **抽象坐标**转化为 **实际的物理向量**。■

注意事项：坐标与向量的区分

在这一框架下，我们需要严格区分两个概念：

- **坐标**：一个列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，它仅仅是一组数值系数（倍数）。
- **矩阵**：一个 2×2 矩阵，它存储了基向量（方向和大小）的信息。

只有当 **坐标**与 **矩阵**（基向量的集合）相乘时，它才具有了确定的 **物理意义**，表示空间中的一个实际向量。

利用矩阵我们可以快速处理基变量的变换，从而处理坐标变换：

EXAMPLE 3　向量的旋转变换

已知向量 $= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。若将该向量绕原点逆时针旋转 θ 角得到新向量 $'$，求 $'$ 在标准基下的坐标。

解　根据“矩阵是基向量集合”的原理，旋转后的向量 $\boldsymbol{U}'$ 可以看作是：原来的坐标份额 (x, y) 作用在了**旋转后的新基向量**上。

我们将标准基 $\hat{i}, \hat{j}$ 统一旋转 θ 角，得到一组新基向量：

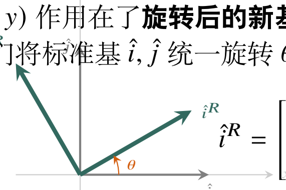


图 2.2: **基向量的旋转**

$$\hat{i}^R = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \hat{j}^R = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

新向量 $'$ 依然保持着 x 份的第一基向量和 y 份的第二基向量，只不过基向量变了：

$$U' = x\hat{i}^R + y\hat{j}^R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

展开矩阵乘法，得到旋转后的坐标：

$$\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

物理意义： 旋转矩阵的每一列，本质上就是旋转后的基向量在原坐标系中的“投影”。 ■

在上面的例题中，我们将对向量的变换改为对基向量的变换，我们可以将线性变换在应用场景中我们常常会遇到对向量的多次变换，我们可以利用基向量变换的思想引入矩阵乘法：

EXAMPLE 4

对向量 $\boldsymbol{U}$ 进行 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 先后两次线性变换，

3

电路模型和电路定律

3.1 参考方向和基尔霍夫定律

参考方向

DEFINITION 1

电流参考方向

电流的参考方向是选定的电流流动方向

DEFINITION 2

电压参考方向

表达两点之间的电压时，用正极性 (+) 和负极性 (-) 分别表示高电位和低电位，而正极指向负极的方向就是电压参考方向

物理意义：选定参考方向后，可以将电流和电压当作代数处理，流向一致为正，流向不一致为负。

DEFINITION 3

关联参考方向

一个元件的电流和电压参考方向可以独立地任意指定。如果指定流过元件的电流的参考方向和电压参考方向一致，我们称这种参考方向为**关联参考方向**

电阻元件

我们在之后所考虑的所有元件都可以视为二端元件，对于二端元件我们有以下定理：

THEOREM 1

电流恒等

二端元件的两个端子流入的电流等于流出的电流

而对于我们常见到的用电器，往往都可以视为线性电阻元件，即：

DEFINITION 4

线性电阻元件

在电压和电流取关联参考方向时，在任何时刻它两端的电压和电流服从欧姆定律：

$$u = Ri$$

上式中 R 是电阻元件的参数，称为元件的电阻

电压源和电流源

实际电源的形式多种多样，我们在这里可以抽象得到电压源和电流源，他们是二端有源元件：

DEFINITION 5

电压源

电压源是一个理想电路元件，它的端电压 $u(t)$ 为：

$$u(t) = u_s(t)$$

$u_s(t)$ 为给定的时间函数，称为电压源的激励电压

DEFINITION 6

电流源

电流源是一个理想电路元件，它的端电流 $i(t)$ 为：

$$i(t) = i_s(t)$$

$i_s(t)$ 为给定的时间函数，称为电流源的激励电流

基尔霍夫定律

我们在介绍基尔霍夫定律之前，先介绍支路、节点和回路的概念。

DEFINITION 7

电路基本构成

- **支路**：每一个二端元件称作一条支路
- **节点**：支路的连接点
- **回路**：支路所构成的闭合路径

如果将电路中各个支路的电压和电流（简称为**支路电流**和**支路电压**）作为变量来看，我们可以列出两类方程：

1. 由二端元件自身的特性所得到的方程
2. 由元件相互连接赋予支路电流之间或支路电压之间从而列出的方程，我们也称之为**几何约束**。这类方程可从基尔霍夫定律中体现

物理意义：在这里，几何约束往往指的是和研究对象无关的约束，后面我们会看到基尔霍夫定律仅仅和电路的形状有关。

基尔霍夫定律包括电流定律和电压定律：

THEOREM 2

KCL 定律

在复杂电路中，任何时刻，对于任意节点，所有流出节点的支路电流的代数和恒等于 0

面取"-"号

THEOREM 3

KVL 定律

在复杂电路中，任何时刻，对于任意回路，所有支路电压的代数和恒等于 0

在上式求和中的时候，需要任意指定一个回路的绕行方向，凡支路电压的参考方向与回路的绕行方向一致时，该电压取"+"号；凡支路电压的参考方向和回路的绕行方向不一致时，该电压取"-"号

3.2　电阻电路的等效变换

SECTION OBJECTIVES

等效变换是对于结构较为简单的电路变形的过程，我们将会介绍：

1. 电阻的串联、并联、混连的变换
2. Y 形联结与 Δ 形联结的变换
3. 对称性变换
4. 电源的等效变换

电阻的串联和并联

对多个电阻进行变换的条件为：

- 变换前后端点流入流出电流不变
- 变换前后任意两端点的元件特性可以视为不变

THEOREM 1

电路的串联和并联

- **串联**：等效电阻等于电阻之和
- **并联**：等效电阻的倒数等于各电阻倒数之和

3.3　电阻的 Y 形连结和 Δ 形联结的等效变换

- Y 型（星型）网络：三个电阻 $R_1R_2R_3$，接于公共节点与端钮 1、2、3 之间；
- 型（三角形）网络：三个电阻 $R_{12}R_{23}R_{31}$，分别接于端钮 1-2、2-3、3-1 之间。

THEOREM 1

$\Delta \to Y$ 变换公式

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \dfrac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases}$$

THEOREM 2

$Y \to \Delta$ 变换公式

$$\begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \end{cases}$$

Y 型与 Δ 型电阻等效变换证明

一、Δ 型 → Y 型证明 1. 计算端间等效电阻：Δ 型（串并）：$R_{12(\Delta)} = \dfrac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{S}$，$R_{23(\Delta)} = \dfrac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{S}$，$R_{31(\Delta)} = \dfrac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{S}$；Y 型（串联）：$R_{12(Y)} = R_1 + R_2$，$R_{23(Y)} = R_2 + R_3$，$R_{31(Y)} = R_3 + R_1$。

2. 等效条件列方程，三式相加得：

$$2(R_1 + R_2 + R_3) = \frac{2(R_{12}R_{23} + R_{23}R_{31} + R_{31}R_{12})}{S} \implies R_1 + R_2 + R_3 = \frac{\sum R_{ij}R_{jk}}{S}.$$

3. 上式分别减 $R_{23(Y)}R_{31(Y)}R_{12(Y)}$，得：

$$\boldsymbol{R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{S},\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{S},\ R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{S}}.$$

二、Y 型 → Δ 型证明 1. 由 Δ→Y 结论，令 $\Sigma = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1$，易推得：$\Sigma = \dfrac{R_{12}R_{23}R_{31}}{S}$。

2. 对 Δ→Y 公式变形反解：如 $R_1R_2 = \dfrac{R_{12}^2R_{23}R_{31}}{S^2}$，代入 Σ 得 $R_1R_2 = \dfrac{R_{12} \cdot \Sigma}{S}$，结合 $R_3 = \dfrac{R_{23}R_{31}}{S}$，化简得：

$$\boldsymbol{R_{12} = \frac{\Sigma}{R_3}}.$$

3. 对称推导其余电阻，最终得：

$$\boldsymbol{R_{23} = \frac{\Sigma}{R_1},\ R_{31} = \frac{\Sigma}{R_2}}.$$

3.4　电压源和电流源的串联和并联

THEOREM 1

电压源的串联

等效电压源的激励电压等于各个电压源激励电压之和

THEOREM 2

电流源的串联

等效电流源的激励电流等于各个电流源激励电流之和

在后文的叠加原理中，我们能看见一种更方便处理电源串并联的办法

对称性变换

在电路中，凡是连接在等电势节点即支路交点之间的任何电阻或者导线由于无电流通过，都可以去掉

THEOREM 3

对称性原理

一个电阻网络对于端点连线所形成的轴镜像对称，那么电阻网络上对称的两点电势相等

EXAMPLE 1

狭义惠斯通电桥 惠斯通电桥为四臂电阻网络（R_1, R_2, R_3, R_4）、电源 E、检流计 G 组成的平衡电路，**等阻条件**为 $\boldsymbol{R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R}$，此时电桥严格平衡。

解　观察可以发现，上下两节点对称 ■