

---

---

# 目录

<b>第一章 Preliminaries</b>	<b>2</b>
1.1 基本符号和概念 . . . . .	2
1.2 函数的性质和表达 . . . . .	4
1.2.1 函数的表示法 . . . . .	4
1.2.2 函数的奇偶性 . . . . .	5
1.2.3 函数的单调性 . . . . .	5
1.2.4 函数的变换 . . . . .	6
1.2.5 复合函数和反函数 . . . . .	7
1.3 基本初等函数 . . . . .	9
1.3.1 三角函数和反三角函数 . . . . .	9
1.3.2 指数函数 . . . . .	13
<b>第二章 向量和线性代数</b>	<b>14</b>
2.1 二维向量 . . . . .	14
2.1.1 向量与向量运算 . . . . .	14
2.1.2 向量的几何意义 . . . . .	15
2.1.3 线性组合与线性无关 . . . . .	15
2.1.4 线性函数 . . . . .	16
2.1.5 平面的基向量和矩阵 . . . . .	17

# 1

## Preliminaries

### CHAPTER OBJECTIVES

在深入研究微积分学之前，我们需要总结一些基本的数学概念和符号，这一章的知识将会在后续章节中详细讨论

1. 了解基本的数学符号和数学概念
2. 掌握函数和基本函数的性质
3. 掌握解析几何的初等知识
4. 了解向量的基本含义和运算法则

### 1.1 基本符号和概念

#### DEFINITION 1

##### 集合

集合是数学中最基本的概念，包含着一类具有相似性质的对象。集合中的对象成为元素，通常用小写字母表示，集合本身通常用大写元素字母表示。

#### EXAMPLE 1

我们来考虑这样一个学校，其中老师和学生分别构成两个集合。设集合  $T$  表示所有的老师，集合  $S$  表示所有的学生：

$$T = \{\text{Chinese 1}, \text{Chinese 2}, \text{Math 1}, \text{Physics 1}, \text{English 1}\}$$

$$S = \{\text{Tom}, \text{Charlie}, \text{Mike}, \text{Michael}\}$$

在学校中，我们可以看到老师和学生之间有一种特殊的关系，这种关系将两个集合联

系起来。我们将这样的关系成为“二元关系”

## DEFINITION 2

### 二元关系

设  $A$  和  $B$  是两个集合,  $R$  是  $A$  和  $B$  之间的一个二元关系, 如果对于每一个  $a \in A$ , 都存在一个  $b \in B$ , 使得  $(a, b) \in R$ , 则称  $R$  为从  $A$  到  $B$  的二元关系。

## EXAMPLE 2

在上面的学校例子中, 我们可以定义一个二元关系  $R$ , 表示老师与学生之间的指导关系。例如, Chinese 1 老师指导 Tom 和 Charlie, Math 1 老师指导 Mike 和 Michael。则有:

$$R = \{(Chinese\ 1, Tom), (Chinese\ 1, Charlie), (Math\ 1, Mike), (Math\ 1, Michael)\}$$


---

我们来考虑一种特殊的二元关系, 对于每一个  $a \in A$ , 都存在唯一的  $b \in B$ , 使得  $(a, b) \in R$ , 则称  $R$  为从  $A$  到  $B$  的映射, 或者函数。

## DEFINITION 3

### 函数

设  $A$  和  $B$  是两个集合,  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个映射, 如果对于每一个  $a \in A$ , 都存在唯一的  $b \in B$ , 使得  $(a, b) \in f$ , 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的函数, 记作  $f : A \rightarrow B$ , 并称  $b = f(a)$  为  $a$  在  $f$  下的像。

## EXAMPLE 3

在上面的学校例子中, 我们可以定义一个函数  $f$ , 表示每个学生对应的指导老师。例如, Tom 和 Charlie 的指导老师是 Chinese 1, Mike 和 Michael 的指导老师是 Math 1。则有:

$$f(Tom) = Chinese\ 1, \quad f(Charlie) = Chinese\ 1, \quad f(Mike) = Math\ 1, \quad f(Michael) = Math\ 1$$


---

在这里, 对于  $A$  和  $B$  之间的函数  $f : A \rightarrow B$ , 我们称  $A$  为定义域,  $B$  为陪域,  $f(A)$  为  $f$  的值域。

在实际生活中, 我们常常会发现一个变量的值依赖于另一个变量的值:

- 水的沸点依赖于海拔的高度
- 人口的增长依赖于出生率

在上述的情形中，一个变量的值常常取决于另外一个变量的值，水的沸点  $b$  依赖于海拔高度  $h$ 。我们可以利用函数来表达他们，将  $b$  称之为因变量， $h$  称之为自变量

#### EXAMPLE 4

已知圆的面积  $A$  依赖于圆的半径  $r$ ，则可以用函数表示为  $A = f(r)$

$$A = \pi r^2$$

这个过程中我们可以知道：

- 函数的值域为所有非负实数。定义域是所有可能的半径的集合
- 因变量是圆的面积  $A$ ，自变量是圆的半径  $r$

将函数想象为一个机器也有助于理解这一概：将自变量 *input* 到机器中，经过函数（机器）的处理，会 *output* 出唯一一个值——因变量。

最后，我们需要了解一些详细的数学符号：

- 实数集  $\mathbb{R}$ : 表示所有实数的集合
- 自然数集  $\mathbb{N}$ : 表示所有自然数的集合
- 整数集  $\mathbb{Z}$ : 表示所有整数的集合
- 有理数集  $\mathbb{Q}$ : 表示所有有理数的集合

## EXERCISES 1.1

[Answers on ANS-1](#)

在问题 1-3 中，请根据题目描述设定集合，并显式地写出二元关系  $R$  中的部分元素。

1. 将一些水果设定为集合  $F = \{\text{苹果, 香蕉, 葡萄}\}$ ，将一些颜色设定为集合  $C = \{\text{红色, 黄色, 紫色, 绿色}\}$ 。定义一个“具有该颜色”的二元关系  $R$ 。
2. 将国家设定为集合  $N = \{\text{中国, 日本, 英国, 法国}\}$ ，将洲设定为集合  $S = \{\text{亚洲, 欧洲, 非洲}\}$ 。定义一个“属于该洲”的二元关系  $R$ 。
3. 将一些实数设定为集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合  $B = \{0, 1, 4\}$ 。定义一个“平方关系”  $R$ ，即  $(a, b) \in R$  当且仅当  $a^2 = b$ 。

在问题 4-6 中，判断所给出的二元关系是否构成“从  $A$  到  $B$  的函数”，并说明理由。

1. 集合  $A$  为平面上所有的三角形，集合  $B$  为所有的正实数。二元关系  $f$  定义为：每个三角形对应它的面积。
2. 集合  $A$  为所有的实数  $\mathbb{R}$ ，集合  $B$  也是  $\mathbb{R}$ 。二元关系  $f$  定义为： $f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ 。
3. 集合  $A$  为某物理实验室中的所有温度计，集合  $B$  为当前室内的温度值。二元关系  $f$  为：每支温度计显示的读数。

在问题 7-9 中，识别下列物理公式中的自变量与因变量。

1. 欧姆定律  $I = \frac{U}{R}$ 。当电阻  $R$  固定时，电流  $I$  随电压  $U$  变化。
2. 匀加速运动的速度公式  $v = v_0 + at$ 。其中  $v_0$  和  $a$  是常数。
3. 理想气体的压强公式  $P = \frac{nRT}{V}$ 。假设温度  $T$  和物质的量  $n$  固定。

## 1.2 函数的性质和表达

### ■ 函数的表示法

函数有以下四种表示方法：

- 描述法（用语言来描述）
- 数值法（用表格列出函数值）

- 图像法 (用函数图像)
- 代数法 (用显示方程)

## ■ 函数的奇偶性

### DEFINITION 1

#### 函数的奇偶性

如果  $y = f(x)$  是：

$x$  的奇函数，如果  $f(x) + f(-x) = 0$

$x$  的偶函数，如果  $f(x) = f(-x)$

对于函数的整个区间成立

### EXAMPLE 1

判断下列函数的奇偶性：

- $f(x) = x^3 + 2x$ , 因为  $f(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  是奇函数
- $f(x) = x^2 + 3$ , 因为  $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ , 所以  $f(x)$  是偶函数
- $f(x) = x^2 + x$ , 因为  $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$  且  $f(-x) \neq -f(x)$ , 所以  $f(x)$  既不是奇函数也不是偶函数

## ■ 函数的单调性

### DEFINITION 2

#### 单调性和单调区间

设函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有定义：

- 如果对于任意  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 均有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在区间上是增函数。
- 如果对于任意  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 均有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在区间上是减函数。

将区间  $I$  成为函数  $f(x)$  的单调区间, 函数  $f(x)$  在区间  $I$  上具有单调性。

### EXAMPLE 2

判断下列函数的单调性

- $f(x) = 3x + 2$ , 该函数在  $\mathbb{R}$  上单调递增
- $f(x) = 2^x + 3$ , 该函数在  $\mathbb{R}$  上单调递增

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , 该函数在  $(-\infty, \frac{3}{2})$  上单调递减, 在  $(\frac{3}{2}, +\infty)$  上单调递增
- 

## ■ 函数的变换

### 平移变换

#### 垂直平移图形:

- 往上平移函数  $y = f(x)$  的图形, 加一正常数到公式的右边。
- 往下平移函数  $y = f(x)$  的图形, 加一负常数到公式右边。

### EXAMPLE 3

在公式  $y = x^2$  的基础上右端加一常数 1 就得到  $y = x^2 + 1$ , 把图形往上移位了一个单位。

在公式  $y = x^2$  的基础上右端加  $-2$  就得到  $y = x^2 - 2$ , 把图形下移了两个单位。

---

#### 水平平移图形

- 往右平移函数  $y = f(x)$  的图形, 在  $x$  上加一个负常数。
- 往左平移函数  $y = f(x)$  的图形, 在  $x$  上加一个正常数。

### EXAMPLE 4

在公式  $y = x^2$  的基础上把  $x$  替换成  $x - 3$  就得到  $y = (x - 3)^2$ , 把图形往右移了三个单位。

在公式  $y = x^2$  的基础上把  $x$  替换成  $x + 2$  就得到  $y = (x + 2)^2$ , 把图形往左移了两个单位。

---

### 对称变换

- **关于  $x$  轴对称:** 把函数  $y = f(x)$  的图形关于  $x$  轴对称, 只需把公式右端的  $y$  替换成  $-y$ , 即得到  $y = -f(x)$ 。
- **关于  $y$  轴对称:** 把函数  $y = f(x)$  的图形关于  $y$  轴对称, 只需把公式中的  $x$  替换成  $-x$ , 即得到  $y = f(-x)$ 。

**EXAMPLE 5**

把函数  $y = x^3$  的图形关于  $x$  轴对称, 得到  $y = -x^3$ 。  
 把函数  $y = x^3$  的图形关于  $y$  轴对称, 得到  $y = (-x)^3 = -x^3$ 。

**复合函数和反函数****DEFINITION 3**

可以将  $f$  和  $g$  分别看作是一个机器, 那么复合函数  $g \circ f$  就是一个流水线, 原材料先输入到  $f$  机器中然后 *output* 再作为  $g$  机器的 *input*。

**复合函数**

设存在两个函数分别为:  $f : A \rightarrow B$  和  $g : B \rightarrow C$ , 则可以定义复合函数如下:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

其中,  $g \circ f : A \rightarrow C$  成为  $f$  和  $g$  的复合函数

**EXAMPLE 6**

在恒温条件下, 理想气体的压强  $P$  和体积  $V$  之间的关系为  $PV = C$ , 其中  $C$  为常数。如图所示, 气缸的活塞可以上下移动以改变气体的体积  $V$ 。试求出压强  $P$  与活塞高度  $h$  之间的函数关系。

**解** 设气缸的横截面积为  $S$ , 则体积  $V$  与活塞高度  $h$  之间的关系为:

$$V = f(h) = Sh$$

则复合函数  $P(h) = P(V(h)) = g \circ f$  为:

$$P(h) = \frac{C}{f(h)} = \frac{C}{Sh}$$

**DEFINITION 4**

这里我们需要格外注意反函数的定义域和值域问题, 事实上一个具有反函数的函数一定是单射的

**反函数**

设存在两个函数  $f : A \rightarrow B$  和  $g : B \rightarrow A$ , 如果对于任意的  $a \in A$  和  $b \in B$ , 满足:

$$(g \circ f)a = a, \quad (f \circ g)b = b$$

我们称  $f$  和  $g$  互为反函数, 符号记作  $g(x) = f^{-1}(x)$

**EXAMPLE 7 自由落体的“逆向思考”**

已知自由落体下落的高度  $h(t)$  和时间  $t$  的函数关系为:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

在这个过程中, 时间  $t$  和下落高度的函数关系为:

$$t = f(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则函数  $h(t)$  和函数  $f(h)$  是一对反函数。其中:

- $h(t)$  的定义域是下落的时间 (非负实数), 值域是下落的高度 (非负实数)
- $f(h)$  的定义域是下落的高度 (非负实数), 值域是下落的时间 (非负实数)

### PROPERTIES

1. **图像对称:** 图像  $y = f(x)$  与其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图像, 关于直线  $y = x$  对称
2. **奇偶性关联:**
  - 若  $f(x)$  是奇函数且存在反函数, 则  $f^{-1}(x)$  同样是一个奇函数
  - 若  $f(x)$  是一个偶函数, 则在其对称区间上不存在反函数
3. **复合函数性质:** 对于互为反函数的  $f$  和  $f^{-1}$ , 有  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$ ,  $\text{id}$  表示恒等函数

## EXERCISES 1.2

[Answers on ANS-1](#)

在问题 1-5 中, 探讨函数的奇偶性与单调性及其物理含义。

1. 判断函数  $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$  的奇偶性, 并说明其在  $(0, +\infty)$  上的单调性。
2. 弹簧弹性势能: 公式为  $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ 。若考虑位移  $x$  可正可负 (代表压缩或拉伸):
  1. 证明  $E_p(x)$  是偶函数。
  2. 解释这个结论的物理意义 (提示: 关于平衡位置对称)。
3. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数。若当  $x \in (0, 1)$  时  $f(x) = 2x + 1$ , 求  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上的解析式。
4. 观察函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 。通过分析  $x^2 + 1$  的性质, 判断  $f(x)$  的最大值及对应的  $x$  值。
5. 物理中的 \*\* 静电力 \*\* 公式为  $F(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ 。若电荷量固定, 分析该函数在  $r \in (0, +\infty)$  上的单调性。

在问题 6-11 中, 通过平移与对称变换处理物理图像。

1. 将抛物线  $y = x^2$  整体向左平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位, 写出新的函数解析式。

2. **高度偏移:** 一架无人机从海拔 100m 的平台上起飞, 其相对于平台的高度为  $h(t) = 5t^2$ 。请写出无人机相对于海平面高度  $H(t)$  的函数。这属于哪种平移?
3. 考虑正弦波形  $y = \sin x$ 。若将其向右平移  $\pi/2$  个单位, 得到的解析式是什么? 它与  $\cos x$  的图像有什么关系?
4. **波动预演:** 若波形  $f(x) = x^2$  以  $v = 2 \text{ m/s}$  的速度向右传播, 写出  $t = 5 \text{ s}$  时的波形解析式 (提示:  $x \rightarrow x - vt$ )。
5. 证明: 任何函数  $y = f(x)$  关于  $x$  轴对称后的图像对应的函数一定是  $-f(x)$ 。
6. 将函数  $y = \sqrt{x}$  关于  $y$  轴对称, 并说明所得新函数的定义域。

在问题 12-15 中, 练习复合函数的拆解与代入。

1. 已知  $f(x) = 2x - 1$ ,  $g(x) = x^2$ 。分别计算复合函数  $f(g(x))$  和  $g(f(x))$ 。它们相等吗?
2. **功率链:** 一台电动机的输出功率  $P = I^2 R$ 。若电流随时间变化为  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ , 请写出功率随时间变化的复合函数  $P(t)$ 。

3. 设  $u(x) = 1 - x$ ,  $y(u) = \frac{1}{1-u}$ 。求  $y$  关于  $x$  的复合函数，并简化结果。
4. 物理中，圆周运动的向心加速度  $a = \frac{v^2}{r}$ 。若速度随时间线性增加  $v = v_0 + kt$ ，写出  $a$  随时间  $t$  变化的函数。
- 在问题 16-20 中，求解反函数并探讨其物理应用。
- 求函数  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  的反函数。
  - 动量与速度：** 动量公式为  $p = mv$ 。若已知动量  $p$ ，求速度  $v$  关于  $p$  的反函数。

- 折射定律：** 已知  $y = \sin \theta$ 。在物理实验中，我们测得了  $y$  的值。请问如何表示  $\theta$ ? (注：只需说明这是反函数关系)。
- 考虑函数  $f(x) = x^2$ 。为什么在整个实数集  $\mathbb{R}$  上它没有反函数？要使其拥有反函数，我们需要对  $x$  做什么样的限制？
- 综合思考题：** 证明如果一个函数  $f(x)$  既是奇函数又存在反函数  $f^{-1}(x)$ ，则其反函数也一定是奇函数。(提示：从  $f(f^{-1}(-x))$  出发)。

## 1.3 基本初等函数

### SECTION OBJECTIVES

我们要花一些时间来研究几个基本函数的性质，这些函数将在实际问题中反复用到：

- 了解三角函数和反三角函数的定义和变换
- 了解指数函数和对数函数的定义和变换
- 了解幂函数的基本运算性质

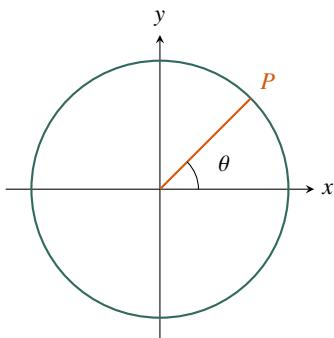
### ■ 三角函数和反三角函数

我们先回忆中学视角下的三角函数。对于一个直角三角形，设其中一个锐角为  $\theta$ ，其对边 (opposite)、邻边 (adjacent) 和斜边 (hypotenuse) 分别为  $a, b, c$  那么有：

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \quad \cos \theta = \frac{b}{c} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{b} \quad \theta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

现在，我们需要将这一个函数的定义域扩展到所有角度，单位元的三角函数定义如下：

#### DEFINITION 1



#### 单位圆下的三角函数

单位圆是以原点为中心，半径为 1 的圆。任意角度  $\theta$  对应于单位圆上的一点，三角函数的定义如下

- 正弦 (sin): 一个角  $\theta$  对应的点的  $y$  坐标
- 余弦 (cos): 一个角  $\theta$  对应的点的  $x$  坐标
- 正切 (tan): 正弦和余弦的比值  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

对于单位圆上的点  $P(x, y)$ ，其横坐标即为  $\cos \theta$ ，纵坐标即为  $\sin \theta$ 。由此可见，当点  $P$  在不同象限运动时，三角函数值的正负号会随之改变。

图 1.1: 单位圆

在这些基本恒等式的基础上，我们也可以得到别的恒等式，例如二倍角公式和  $\tan$  有关的恒等式，这些恒等式我们会在例题中讨论。

## PROPERTIES

1.  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
2. 诱导公式：奇变偶不变，符号看象限
  - $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$  (周期性)
  - $\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$  (奇偶性)
  - $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta, \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$
  - $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
  - $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$
  - $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$
3. 和差化角： $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$   
 $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

## EXAMPLE 1 “拍”现象

生活中，两个频率相近的波发生干涉后会出现**拍**现象。例如钢琴调音时，调音师同时敲击待调的弦和标准弦，在听觉上会感到音量有周期性的强弱。试利用三角函数及其恒等变换式，来解释这种现象的原理。

**note:** 振动的数学表达式是： $A = \cos(\omega t + \phi)$

## 三角函数的图像

三角函数的图像通常被称为“正弦波形”(Sinusoidal waves)。在物理学中，它们是描述简谐运动、波动以及交流电最基本的数学模型。

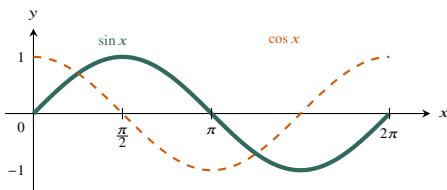


图 1.2: 正弦与余弦图像

## PROPERTIES

### 正弦函数 $y = \sin x$ 的图像性质

- 定义域与值域：定义域为  $\mathbb{R}$ ，值域为  $[-1, 1]$ 。
- 周期性：具有周期性，最小正周期  $T = 2\pi$ 。
- 对称性：关于原点对称，是奇函数。
- 相位关系： $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ，即余弦图像可看作正弦图像向左平移  $\pi/2$ 。

## 图像的变换与物理意义

在物理竞赛中，理解函数图像的平移与伸缩如何对应物理状态的变化至关重要。

### PROPERTIES

#### 参数对图像的影响

- **振幅  $A$** : 决定图像在垂直方向的拉伸或压缩。在振动学中， $A$  代表最大位移。
- **频率参数  $\omega$** : 决定图像在水平方向的“胖瘦”。 $\omega$  越大，周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  越小，图像越拥挤。
- **初相位  $\phi$** : 决定图像在水平方向的左右平移。

**物理直觉：**在物理中，我们更习惯研究一般形式：

$$y = A \sin(\omega x + \phi)$$

其中每一个参数都对应一个明确的物理量。

对于  $y = \sin(\omega x + \phi)$ ，图像的平移量  $\frac{\phi}{\omega}$  不是  $\phi$ 。必须先提取系数  $\omega$ ：

$$y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

这说明图像是向左平移了  $\frac{\phi}{\omega}$  个单位。在物理中，这意味着“初相位”与“时间偏移”是不同的概念。

#### 物理意义：

反三角函数的结果是一个角度。在物理竞赛中，它最常用于通过力或速度的分量来确定矢量的方向（即求偏角）。

### DEFINITION 2

#### 反正弦与反正切函数

- **反正弦函数**:  $y = \arcsin x$ : 是  $x = \sin y$  在  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的反函数。
- **反正切函数**:  $y = \arctan x$ : 是  $x = \tan y$  在  $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上的反函数。

## PROPERTIES

### 常用反三角函数的定义域与值域

在计算时，务必注意结果（角度）的取值范围：

- $y = \arcsin x$ : 定义域  $[-1, 1]$ , 值域  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。
- $y = \arccos x$ : 定义域  $[-1, 1]$ , 值域  $[0, \pi]$ 。
- $y = \arctan x$ : 定义域  $\mathbb{R}$ , 值域  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。

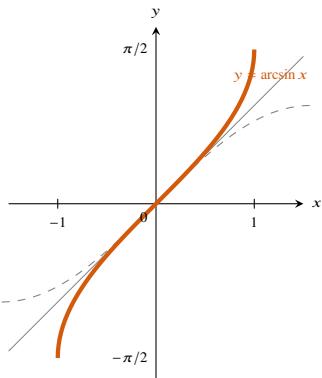


图 1.3: 反正弦函数图像与其对称性

### 注意事项：符号的使用习惯

在许多物理教材和科学计算器中，反正弦函数常记作  $\sin^{-1} x$ 。请务必记住：

$$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x \neq \frac{1}{\sin x}$$

指数  $-1$  在这里表示“反函数”，而非“倒数”。

## EXAMPLE 3 利用分量确定矢量方向

在平面直角坐标系中，一个力矢量的水平分量为  $F_x = 3.0 \text{ N}$ ，竖直分量为  $F_y = 4.0 \text{ N}$ 。试求合力  $\mathbf{F}$  与  $x$  轴正方向的夹角  $\theta$ 。

**解** 根据矢量合成的几何关系，合力的方向角  $\theta$  满足正切关系：

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4.0}{3.0} \approx 1.333$$

为了求出角度  $\theta$ ，我们对等式两边取反正切函数：

$$\theta = \arctan \left( \frac{4.0}{3.0} \right)$$

利用计算器计算可得：

$$\theta \approx 0.927 \text{ rad} \quad (\text{约} 53.1^\circ)$$

这说明该力指向第一象限，与水平方向成  $53.1^\circ$  角。

## EXERCISES 1.3.1

Answers on ANS-1

在问题 1-5 中，探讨正切公式与二倍角公式的代数变形

2. 斜面倾角：在物理受力分析中，经常遇到  $\tan(\theta + 45^\circ)$ 。请将其展开为仅含  $\tan \theta$  的表达式。

1. 正切展开：已知  $\tan \alpha = 1/2$ ,  $\tan \beta = 1/3$ ，利用和角公式计算  $\tan(\alpha + \beta)$  的值，并指出  $\alpha + \beta$  在  $(0, \pi)$  范围内的具体弧度。

3. 利用二倍角公式证明： $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan \theta$ 。这个公式常用于将复

杂的振动方程简化。

4. **降幂公式:** 利用  $\cos 2\theta$  的变形公式, 将  $\sin^2 \theta$  和  $\cos^2 \theta$  分别表示为含  $\cos 2\theta$  的一次表达式。这在计算交流电有效值时非常重要。
5. 已知  $\tan \theta = t$ , 请利用倍角公式推导出  $\tan 2\theta$  随  $t$  变化的表达式, 并讨论当  $\theta \rightarrow \pi/4$  时, 该式的变化趋势。

在问题 6-10 中, 掌握万能公式 (*Universal Substitution*) 的应用。

1. **万能公式推导:** 设  $t = \tan(\theta/2)$ , 利用倍角公式和  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  证明:

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. **参数表达:** 若一个物体的速度分量为  $v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta$ , 请利用  $t = \tan(\theta/2)$  将其坐标分量转化为关于  $t$  的分式方程。

3. 利用万能公式求解方程:  $\sin \theta + \cos \theta = 1$ 。

4. 证明:  $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$ 。该结论在光学中分析半偏角时经常使用。

5. 思考: 万能公式为什么被称为“万能”? 在处理含有  $\sin$  和  $\cos$  的复杂分式方程时, 这种代换有什么优势?

在问题 11-15 中, 结合反三角函数进行深度运算。

1. 计算  $\tan(\arcsin \frac{3}{5})$  的值 (提示: 先设  $\theta = \arcsin \frac{3}{5}$ , 画出直角三角形)。
2. 证明反正切加法公式:  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$  (假设  $xy < 1$ )。

3. **w d 偏角计算:** 已知  $v = (1, t)$ , 利用  $\theta = \arctan t$  表达速度方向, 并推导当  $t$  翻倍时,  $\tan \theta$  如何变化。

4. 计算  $\sin(2 \arctan \frac{1}{3})$ 。请直接利用万能公式的结果。

5. 求解  $x$ :  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$ 。

在问题 16-20 中, 解决具有竞赛背景的物理综合问题。

1. **摩擦角模型:** 一物体放在粗糙斜面上, 恰好要下滑时, 重力的下滑分量等于最大静摩擦力, 即  $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ 。

1. 证明此时斜面倾角  $\theta = \arctan \mu$  ( $\mu$  为摩擦系数)。

2. 若斜面倾角变为  $\theta + \phi$ , 请用  $\tan \theta$  和  $\tan \phi$  表示此时合力倾向的切向比例。

2. **斜抛射程优化:** 已知射程  $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ 。若要在水平距离  $R$  处击中高为  $H$  的目标, 需满足  $H = R \tan \theta - \frac{gR^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$ 。利用  $1/\cos^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ , 将此方程转化为关于  $\tan \theta$  的一元二次方程。

3. **光的折射近似:** 当光线从空气射入水中 ( $n = 1.33$ ), 在入射角  $\theta$  很小时, 利用  $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ , 证明实际深度  $h$  与视深  $h'$  的关系为  $h/h' \approx n$ 。

4. **振动合成:** 两个同方向振动  $x_1 = A \cos(\omega t)$  和  $x_2 = A \cos(\omega t + \phi)$  叠加。利用和差化积 (或和角公式展开) 证明合振幅  $A_{total} = 2A \cos(\phi/2)$ 。

5. **视角问题:** 一个高为  $L$  的物体竖直立在地面。观察者眼睛离地高度为  $h$ , 水平距离为  $x$ 。请用  $\arctan$  写出观察者观察该物体时, 眼睛张开的视角  $\gamma$  的解析式。

## ■ 指数函数

### EXAMPLE 4

### 银行复利

# 向量和线性代数

## CHAPTER OBJECTIVES

在这一章我们将把视角从简单的数投向一种更复杂的数学结构，完成以下目标：

1. 了解向量和其基本的计算
2. 了解向量几何上的意义
3. 学会简单的线性代数，并尝试应用

## 2.1 二维向量

### ■ 向量与向量运算

#### DEFINITION 1

##### 二维向量

一个有序实数对称为一个**二维向量**，我们用大写字母来表示向量

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2)$$

数  $u_1, u_2$  称为向量的**分量**，二维向量的全体称为**二维空间**，记作  $\mathbb{R}^2$

#### DEFINITION 2

##### 向量的代数运算

- 用一个实数  $c$  乘向量  $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$  得到的结果记为  $c\mathbf{U}$ ，定义为用  $c$  乘上  $\mathbf{U}$  的各个分量

$$c\mathbf{U} = (cu_1, cu_2)$$

- 向量  $\mathbf{U}$  和向量  $\mathbf{V}$  的**和**  $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ ，定义为两个向量对应分量相加得到的向量：

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

向量的数乘和相加满足通常的代数性质：

### PROPERTIES

- **交换律:**  $UV = V + U$
- **结合律:**  $(U + V) + W = U + (V + W)$
- **分配律:**  $(a + b)U = aU + bV$
- **分配律:**  $c(U + V) = cU + cV$
- **加法逆元:**  $U + (-U) = 0$

**注意：**向量的另一种表示方法，是包裹在中括号之中，例如向量  $(u_1, u_2)$  可以被表示为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$$

下面我们开始讨论向量及向量运算在几何上的意义：

## ■ 向量的几何意义

我们注意到任意一个向量  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  都可以视为：

$$\mathbf{U} = (x, y) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们可以将  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  和  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  分别看作是 x 轴和 y 轴的单位向量，那么可以将原本的向量  $\mathbf{U}$  视为  $x - y$  平面上的一个点。

通过将向量视为平面中的点，运算具有下述几何解释：

- 数乘:** 对于非零向量  $U$  与实数  $c$ ，点  $cU$  位于通过原点与  $U$  的直线上。若  $c > 0$ ，方向相同；若  $c < 0$ ，方向相反。
- 加法:** 若  $0, U, V$  不在一条直线上，则  $0, U, U + V, V$  构成一个平行四边形的四个顶点。
- 线段表达:** 设  $0 \leq c \leq 1$ ，则点  $V + cU$  位于从  $V$  到  $V + U$  的线段上。

在这里，我们可以将原本的  $\mathbf{U}$  写作：

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

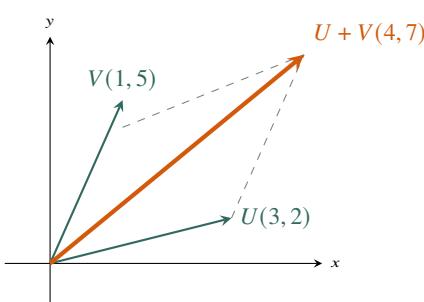


图 2.1：向量加法的平行四边形法则

## ■ 线性组合与线性无关

### DEFINITION 3

#### 线性组合

向量  $U$  与  $V$  的一个 **线性组合** 是一个形如如下结构的向量：

$$aU + bV$$

**DEFINITION 3**

其中  $a$  与  $b$  是实数。

**EXAMPLE 1 线性组合实例**

证明  $U = (5, 3)$  是  $(1, 1)$  与  $(-1, 1)$  的一个线性组合。

**解** 我们需要寻找  $a, b$  使得  $a(1, 1) + b(-1, 1) = (5, 3)$ 。这产生方程组：

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

解得  $a = 4, b = -1$ 。因此  $U = 4(1, 1) - (-1, 1)$ 。 ■

**DEFINITION 4****物理意义：**

如果两个向量线性相关，说明它们“共线”，即其中一个向量的信息可以由另一个完全替代。

**线性无关 (Linear Independence)**

称向量  $U$  与  $V$  **线性无关**，如果它们的某个线性组合  $aU + bV = \mathbf{0}$  仅在  $a = 0, b = 0$  时成立。

若存在不全为零的系数使得组合为零，则称它们为**线性相关**。

**THEOREM 1****线性无关的性质**

给定位平面中两个线性无关的向量  $C$  和  $D$ ，则  $\mathbb{R}^2$  中的每一个向量  $U$  都可以**唯一**地写成  $C$  和  $D$  的线性组合：

$$U = aC + bD$$

**■ 线性函数****DEFINITION 5****线性函数**

从  $\mathbb{R}^2$  到实数集  $\mathbb{R}$  的一个函数  $\ell : U \mapsto \ell(U)$  称为线性的，如果：

1.  $\ell(cU) = c\ell(U)$
2.  $\ell(U + V) = \ell(U) + \ell(V)$

**THEOREM 2****线性函数的结构**

**THEOREM 2**

从  $\mathbb{R}^2$  到实数集  $\mathbb{R}$  的每一个线性函数  $\ell$  仅当它具有如下形式：

$$\ell(x, y) = px + qy$$

其中  $p, q$  是实数。

## ■ 平面的基向量和矩阵

在前文我们提到，对于向量  $= (x, y)$ ，我们可以将其视为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中， $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  是一个简写符号，用来指明向量的分量所对应的基向量，第一列对应第一个分量的**基向量**，第二列对应第二个分量的**基向量**。

**DEFINITION 6**

**物理意义：**

**基向量**就像是你测量和描述物理世界的“坐标轴”和“基本单位”。任何物理量（力、速度）都可以沿着这些基本方向进行分解。

### 基向量 (Basis Vectors)

在二维平面  $\mathbb{R}^2$  中，一组**基向量**是指两个线性无关的向量  $_1$  和  $_2$ 。

- **标准基**：通常我们取  $_1 = (1, 0)$  和  $_2 = (0, 1)$ 。在物理中，它们常被表示为单位矢量  $\hat{i}$  和  $\hat{j}$ 。
- **唯一表示**：平面上的任何向量都可以唯一地表示为基向量的线性组合： $= x_1 + y_2$ 。

## 矩阵的几何意义：基向量的集合

当我们写出一个  $2 \times 2$  矩阵时，它的每一列都具有深刻的几何意义。

**PROPERTIES**

### 矩阵列的物理/几何意义

对于一个  $2 \times 2$  矩阵  $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ：

1. **第一列**  $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ：表示第一个分量（通常是  $x$  坐标）所对应的**基向量**。
2. **第二列**  $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ ：表示第二个分量（通常是  $y$  坐标）所对应的**基向量**。

因此，一个矩阵可以被视为一个基向量的集合。

**重要观察：**

矩阵乘法  $M$  本质上是将向量的坐标（倍数）重新分配给矩阵  $M$  中定义的新基向量。

**EXAMPLE 2 非标准基下的向量表示**

假设我们选择一组新的基向量： $v_1 = (1, 1)$  和  $v_2 = (-1, 1)$ 。那么，由它们构成的矩阵是  $M' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。如果一个点在“新坐标系”下的坐标是  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，它所代表的实际向量是什么？

**解** 根据矩阵列的定义，矩阵的第一列是新的  $x$  轴方向的基向量，第二列是新的  $y$  轴方向的基向量。将“新坐标”与“基向量矩阵”相乘：

$$\text{actual} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1 \\ 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**物理意义：**矩阵在这里充当了“坐标转换器”，它将一组 **抽象坐标** 转化为 **实际的物理向量**。 ■

**注意事项：坐标与向量的区别**

在这一框架下，我们需要严格区分两个概念：

- **坐标**：一个列向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，它仅仅是一组数值系数（倍数）。

- **矩阵**：一个  $2 \times 2$  矩阵，它存储了基向量（方向和大小）的信息。

只有当 **坐标** 与 **矩阵**（基向量的集合）相乘时，它才具有了确定的 **物理意义**，表示空间中的一个实际向量。

矩阵还有一个