

星系形成的抑制作用

The Galaxy Quenching Effect

指导老师：文德华，祖颖

2014级应用物理学 陈晓凯





1 课题分析——课题的研究意义

2 研究基础——指导文献

3 课题内容——数据对比、理论分析

4 研究结果——数据对比结果，结论

5 模型分析与课题深入

课题分析



1. 课题研究意义

1) 星系：恒星、星际介质、尘埃和暗物质组成的物质体系。

2) 星系研究的意义：

往下：星系的研究——星际介质（主要是气体和尘埃），恒星活动（包括形成和演化），超新星

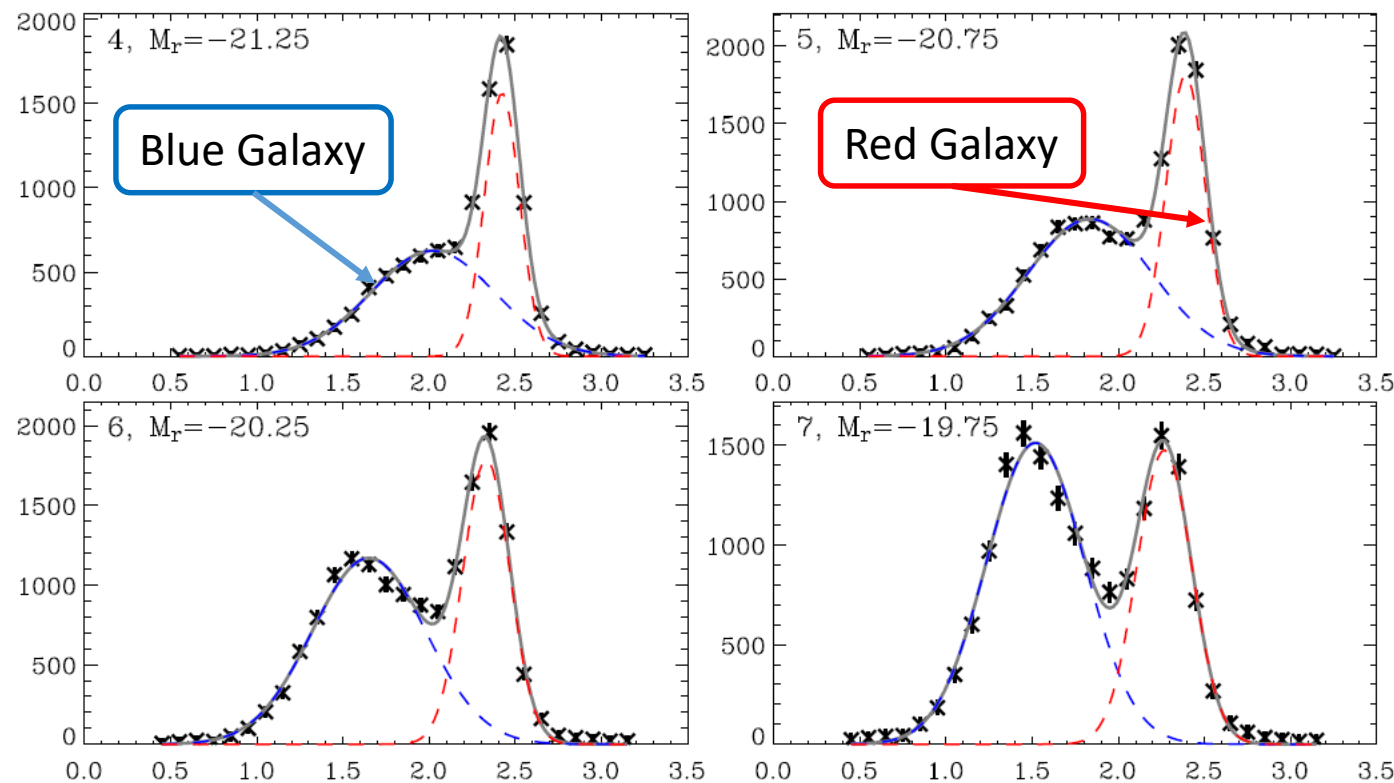
往上：星系的研究——星系是宇宙学研究的基础，是探索宇宙的探针

问题关键：星系研究上目前为止缺少一个合适的模型！

课题分析



2.仍存在的困难—Bimodality of Galaxy



“双峰性”分布还表现在：

金属丰度

恒星年龄

冷气体组分含量

Quenching Effect

Reference : Ivan K. Baldry, Karl Glazebrook, Jon Brinkmann et.al. arXiv : astro-ph/0309710v1
25 Sep 2003.

课题分析



3.Quenching Effect提出的必要性

- 1) 星系形成的“抑制”作用 (Quenching Effect—QE) 是指星系内部的恒星形成活动因为某种物理机制被停止，星系的结构性质、形态演化也因此而改变的物理过程。
- 2) 星系在统计分布上的“双峰性”表现，说明两种序列之间的转化是非常迅速的
- 3) QE的其他观测表现：

宇宙平均恒星形成率随红移演化存在峰值

高红移宇宙观测发现红星系数目与蓝星系数目比值增大

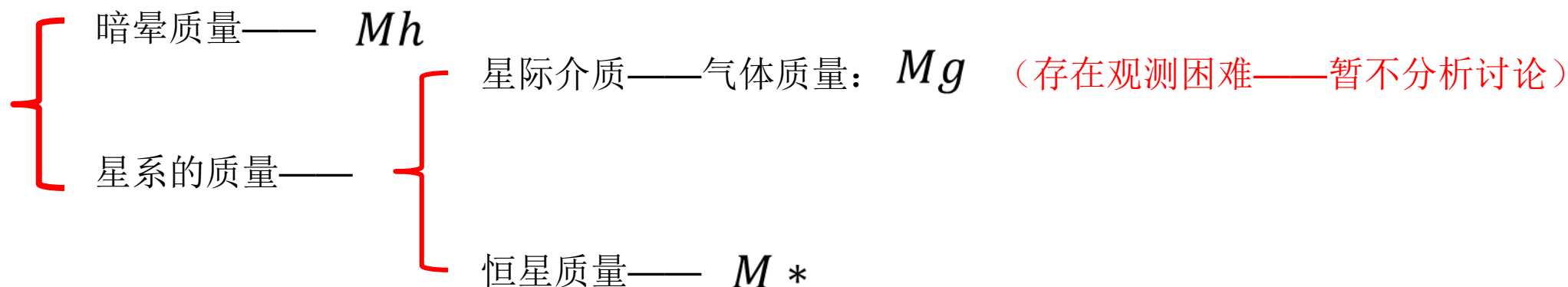
问题关键：**a.对于QE效应的物理机制目前没有一致的理论认识**
b.在观测上QE目前没有有力的观测证据

课题分析



4. 关键任务

考虑引力作用是QE的驱动力——考虑的主要机制：星系的质量，暗晕质量



关键：分别考虑暗晕质量和恒星质量作为QE的驱动机制——得到暗晕-恒星质量关系曲线

观测数据

对比分析

研究基础



1.NFW(short for Navarro, Frenk, & White)暗晕模型——面密度涨落计算

NFW的暗晕密度分布:

$$\rho(r) = \frac{\delta_c \rho_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}$$

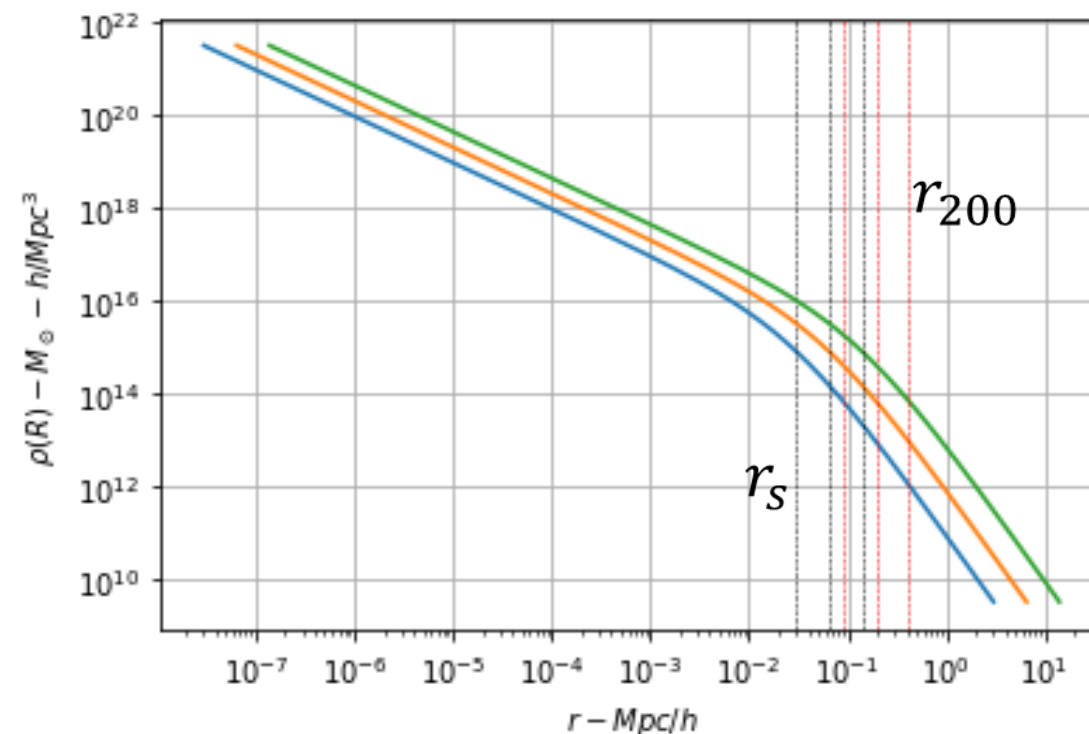
$$\rho_c = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}$$

$$\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)}$$

$$r_s = r \quad d\log(\rho)/d\log(r) = -2$$



暗晕的特征尺度 $r_s = r_{200}/c$



基本参数: $h = 0.673$ $\Omega_m = 0.315$ $c = 6$

研究基础



1.NFW暗晕模型——面密度涨落计算

$\Delta\Sigma(R) = \bar{\Sigma}(R) - \Sigma(R)$ 面密度涨落基本计算公式

$$\Sigma(R) = 2 \int_0^{r_{200}} \rho(\sqrt{R^2 + z^2}) dz \quad \bar{\Sigma}(R) = 2 \int_0^{r_{200}} \rho(\sqrt{R^2 + z^2}) z dz$$

实际情况计算: Candace Oaxaca, Wright and Tereasa G. Brainerd. THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 534:34—40, 2000 May 1.

$R = D_d(\theta_1^2 + \theta_2^2)$ 其中 D_d 表示观测者到透镜的角距离, θ 表示天空的张角矢量

$$\Sigma(R) = 2 \int_0^\infty \rho(R, z) dz \quad \bar{\Sigma}(R) = 2 \int_0^\infty \rho(R, z) z dz \quad \longrightarrow \quad \Delta\Sigma(x) = \bar{\Sigma}(x) - \Sigma(x) = r_s \delta_c \rho_c g(x)$$

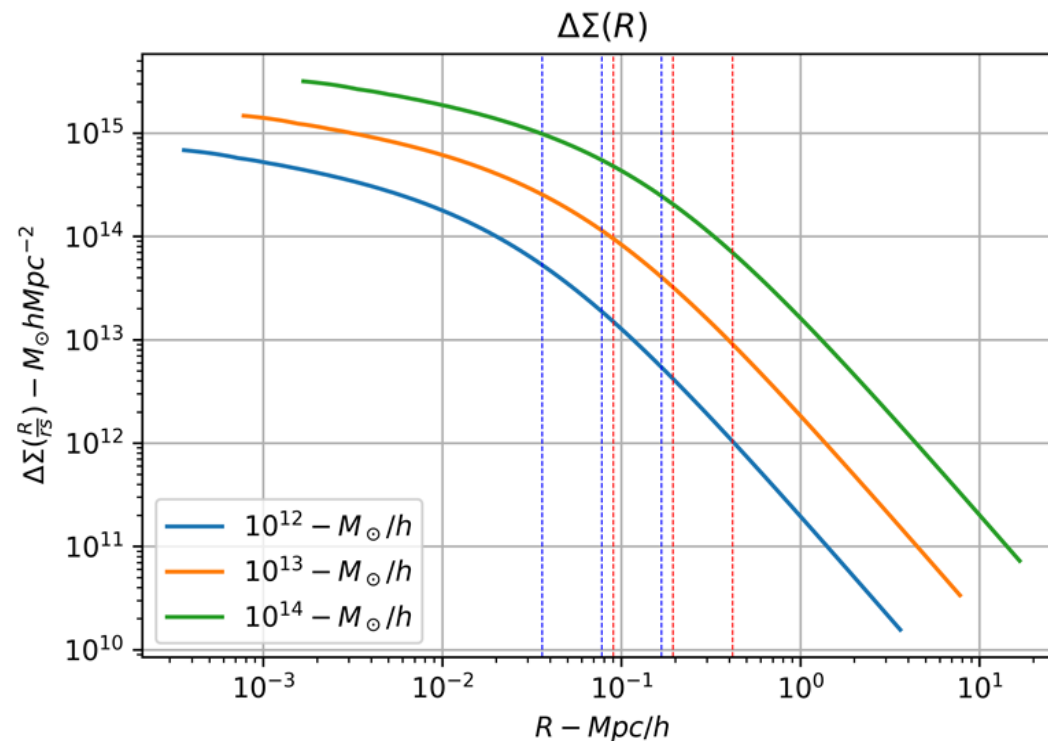
$x = R/r_s$

研究基础



1.NFW暗晕模型——面密度涨落计算

$$g(x) = \begin{cases} \frac{8 \operatorname{arctanh} \sqrt{(1-x)/(1+x)}}{x^2 \sqrt{(1-x^2)}} + \frac{4}{x^2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{(x^2-1)} \\ + \frac{4 \operatorname{arctanh} \sqrt{(1-x)/(1+x)}}{(x^2-1)(1-x^2)^{1/2}}, x < 1 \\ \left[\frac{10}{3} + 4 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right], x = 1 \\ \frac{8 \operatorname{arctan} \sqrt{(x-1)/(1+x)}}{x^2 \sqrt{(x^2-1)}} + \frac{4}{x^2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{(x^2-1)} \\ + \frac{4 \operatorname{arctan} \sqrt{(x-1)/(1+x)}}{(x^2-1)^{3/2}}, x > 1 \end{cases}$$





2. 星系的SHMR以及红化系数

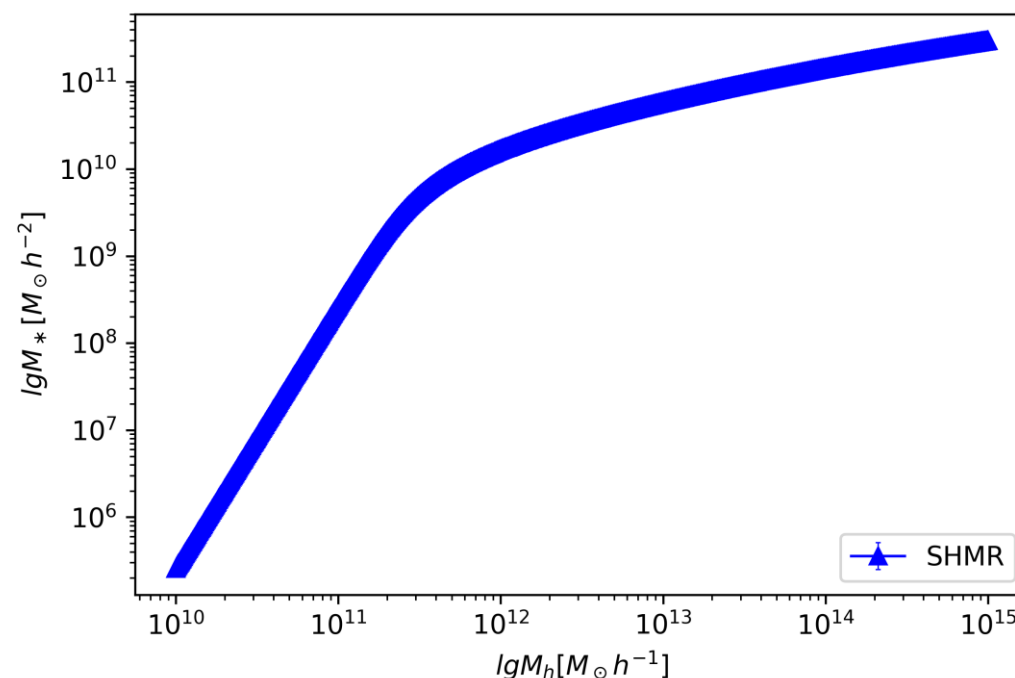
SHMR 以反函数形式定义为:

$$f_{SHMR}^{-1} = Mh = M_1 m^\beta 10^{\left(\frac{m^\sigma}{1+m^{-\gamma}} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$M_0^* = 2 \times 10^{10} M_\odot h^{-2}, \quad M_1 = 1.3 \times 10^{12} M_\odot h^{-1}$$

$$\beta = 0.33, \quad \sigma = 0.42, \quad \gamma = 1.21$$

$$m = \frac{M_*}{M_0^*}$$



Ying Zu and Rachel Mandelbaum. arXiv:1505.02781v1 [astro-ph.CO] 11 May 2015.

研究基础



2.星系的SHMR以及红化系数

红化系数定义为:

$$f_{M*}^{red}(M*, Mh) = 1 - \exp[-(M*/M*^q)^{\mu_{m*}}]$$

$$\mu_{m*} = 0.66 \quad \lg M*^q [h^{-2} M_{\odot}] = 10.55$$

$$f_{M*}^{blue} = 1 - f_{M*}^{red} \quad \text{Reference!!}$$

假设M*为QE的主导物理机制

$$f_{Mh}^{red}(M*, Mh) = 1 - \exp[-(Mh/Mh^q)^{\mu_{mh}}]$$

$$\mu_{mh} = 0.42 \quad \lg Mh^q [h^{-1} M_{\odot}] = 12.25$$

$$f_{Mh}^{blue} = 1 - f_{Mh}^{red} \quad \text{Reference!!}$$

假设Mh为QE的主导物理机制

Ying Zu and Rachel Mandelbaum. arXiv:1509.06758v1 [astro-ph.GA] 22 Sep 2015.

课题内容



1.观测数据的对比分析

数据来源: SDSS 部分LBGs [数据](#)

对比工作: Rechal Mandelbaum et.al. 2016.Strong bimodality in the host halo mass of central galaxies from galaxy-galaxy lensing.

对比方法:

- 1.Get the projection distance of observed data—Rp
- 2.Calculate the prediction signal of weak lensing by NFW profile (for which choose Rp<2Mpc,cause we don't know r200)
- 3.Comparing the observation data and the prediction
And repeat many times to get a better result



单变优化量问题

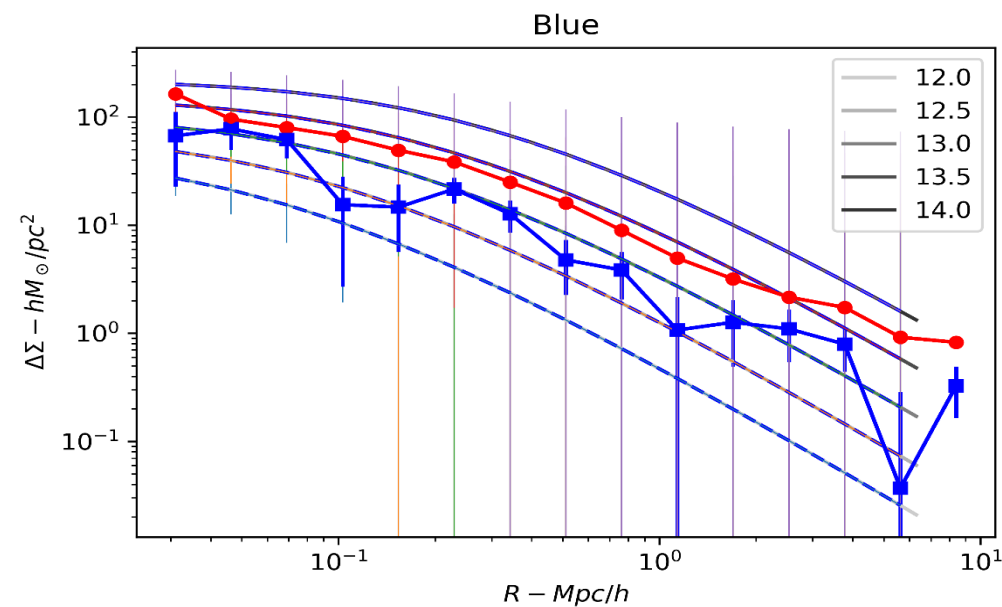
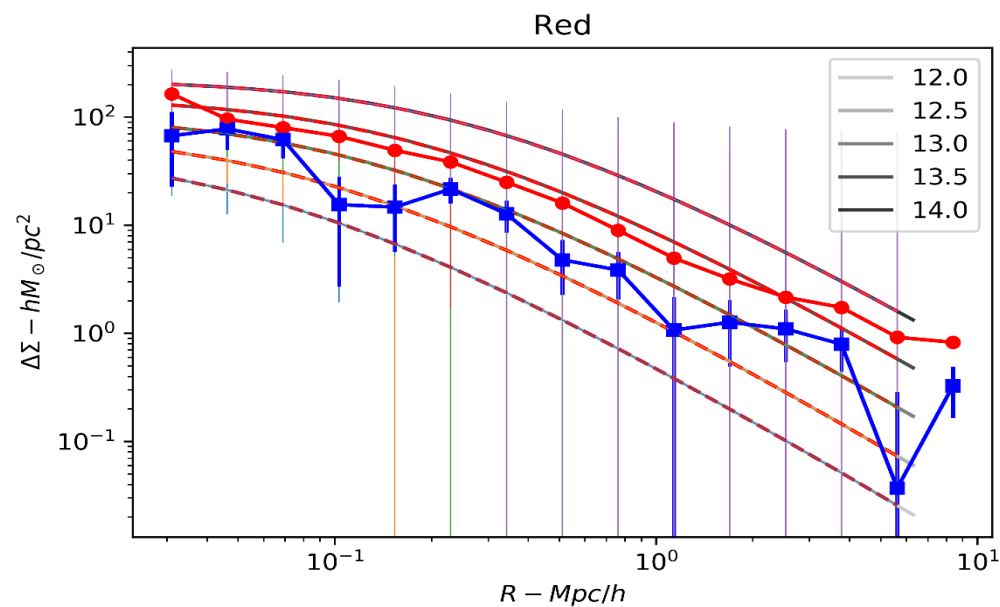
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y - y_i}{\sigma_i} \right)^2$$

课题内容



1. 观测数据的对比分析

部分过程结果示意图(对比参考预测, $R_p < 5 \text{ Mpc}$)



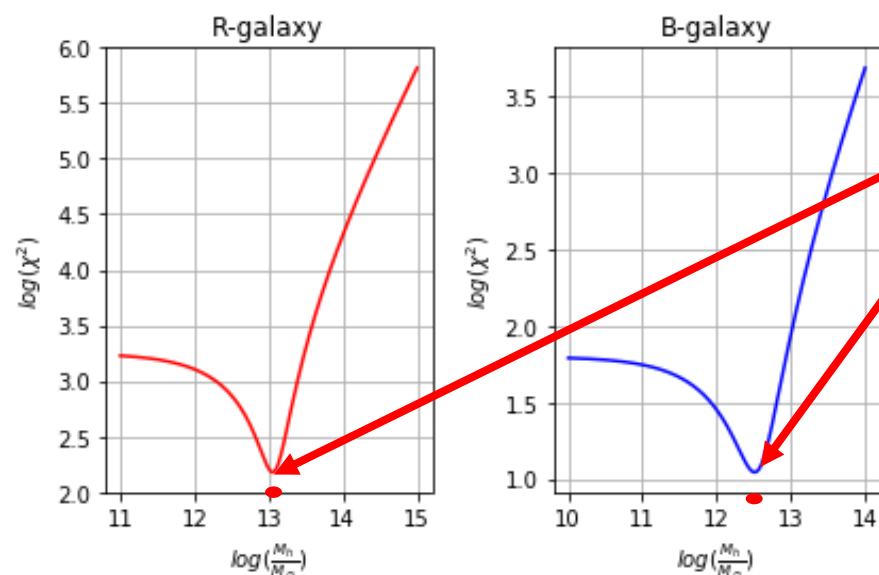
红蓝色为预测值, 灰色为参考估计值 (from Mandelbaum's work)

课题内容



1. 观测数据的对比分析

最佳比较结果——卡方数值分布示意图



找到 $\chi^2 - Mh$ 曲线上的最小值，对应的横坐标的暗晕质量表示对该恒星质量区间的星系对应的暗晕的最佳质量估计值。

R-galaxy: 红星系, B-galaxy: 蓝星系

对应不同的恒星质量区间有不同的关系曲线
给出相应的暗晕质量估计。

课题内容



1. 观测数据的对比分析

数据对比结果

M16 : Mandelbaum's work

My prediction

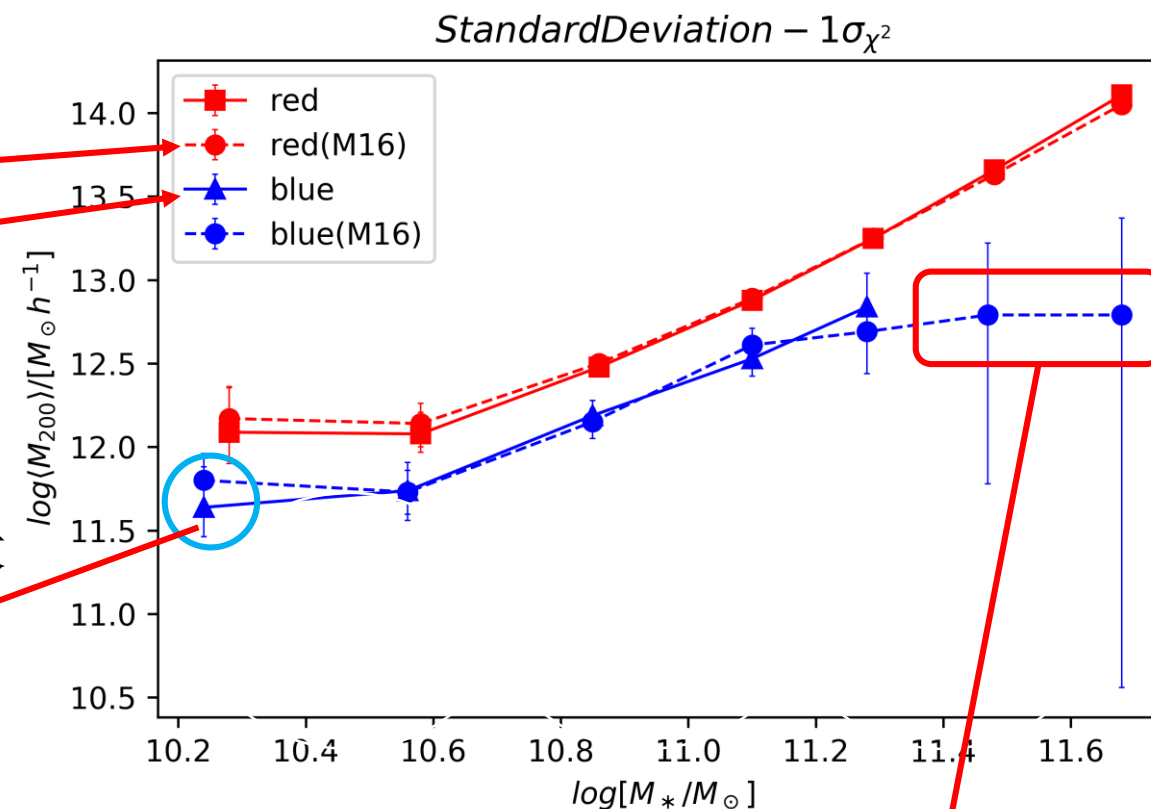
该处估计值与Mandelbaum et.al 的结果差别比较大

原因：

Mandelbaum et.al分析的数据方法不同

实际上模型给出的预测在Mandelbaum et.al

预测值的下误差边界处。



观测数据的信号取值

课题内容



1. 观测数据的对比分析

预测结果的卡方检测——预测与观测的对比——5%

R	<i>Mh</i>	12.09	12.08	12.48	12.88	13.25	13.66	14.11
	P	0.883	0.231	0.0168	6.64e-5	5.85e-3	0.182	0.312
B	<i>Mh</i>	11.64	11.74	12.19	12.58	12.84	——	——
	P	2.55e-4	0.0155	0.0194	0.998	0.949	——	——

原因：模型假设(NFW模型假设)简单，没有考虑C-M关系

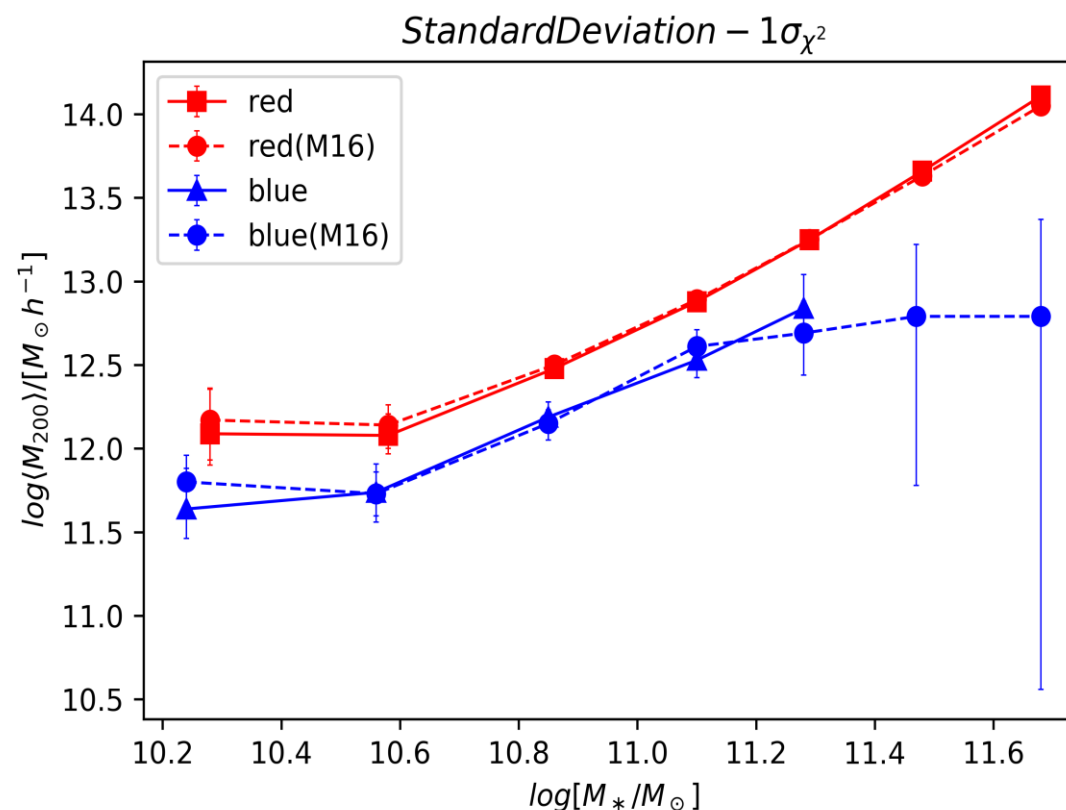
课题内容



2. $Mh - M_*$ 的关系分析

观测数据和NFW暗晕模型出发——
两条恒星-暗晕质量关系，分别对应
两个序列。

如果红蓝星系划分是因为QE作用
那么假设QE机制，应该可以从理
论上得到两条恒星-暗晕质量关系曲线



课题内容



2. $Mh - M^*$ 的关系分析

1). 给定一组 M^* 和 Mh 的质量, 并给定模型假设SHMR关系, 计算 $\langle N(M^* | Mh) \rangle$

$$f_{SHMR}^{-1} = Mh = M_1 m^\beta 10^{\left(\frac{m^\sigma}{1+m^{-\gamma}} - \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{对于SHMR关系, 定义是以反函数形式给出})$$

$$\langle N(M^* | Mh) \rangle = \frac{1}{\sigma_{M^*}(Mh)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln M^* - \ln f_{SHMR})^2}{2\sigma_{M^*}^2(Mh)}\right] \quad \longrightarrow \quad \boxed{P(M^* | Mh)}$$

2). 计算关于 M^* 和 Mh 的联合概率密度分布函数

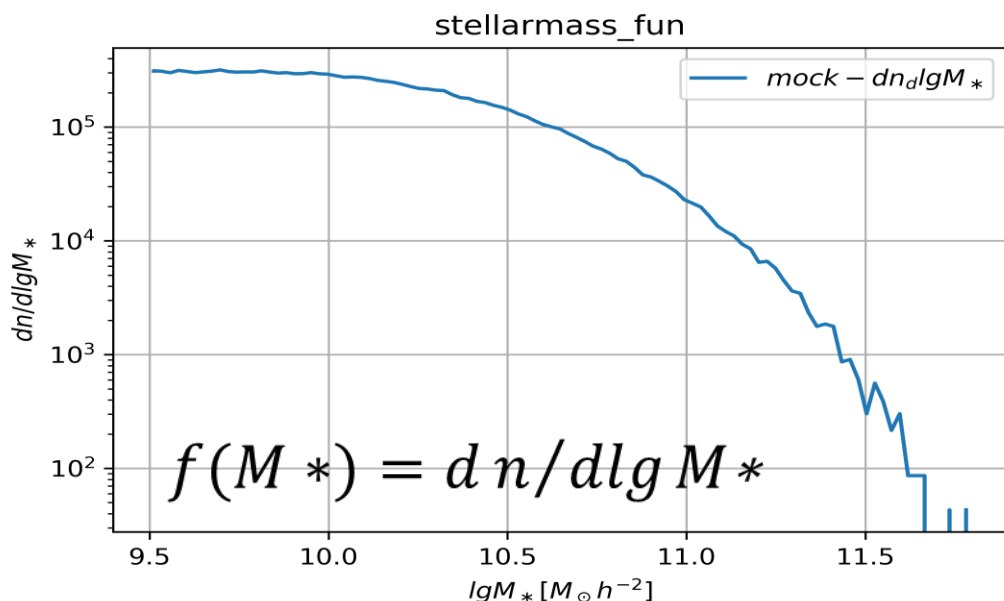
$$p(M^*, Mh) = \frac{\lg e}{ng M^*} \frac{dN(M^* | Mh)}{d \lg M^*} \frac{dn}{dMh} \quad \longrightarrow \quad p(M^*, Mh) = \langle N(M^* | Mh) \rangle p(Mh)$$

课题内容

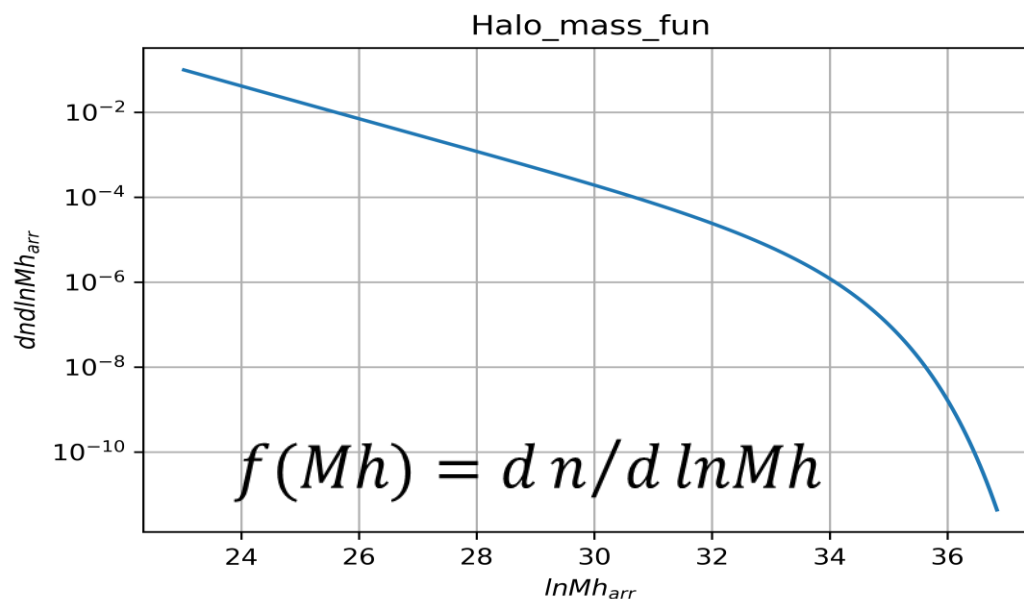


2. $Mh - M^*$ 的关系分析

3). 以观测为基础得到恒星质量函数—— $\text{fun}(M^*)$ 和暗晕质量函数—— $\text{fun}(Mh)$



$$p(M^*) = \frac{dM^* \cdot dn/dM^*}{\int \frac{dn}{dM^*} dM^*} = \frac{d\lg M^* \cdot dn/d\lg M^*}{\int \frac{dn}{d\lg M^*} d\lg M^*}$$



$$p(Mh) = \frac{dMh \cdot dn/dMh}{\int \frac{dn}{dMh} d\ln Mh} = \frac{d\ln Mh \cdot dn/d\ln Mh}{\int \frac{dn}{d\ln Mh} d\ln Mh}$$

课题内容



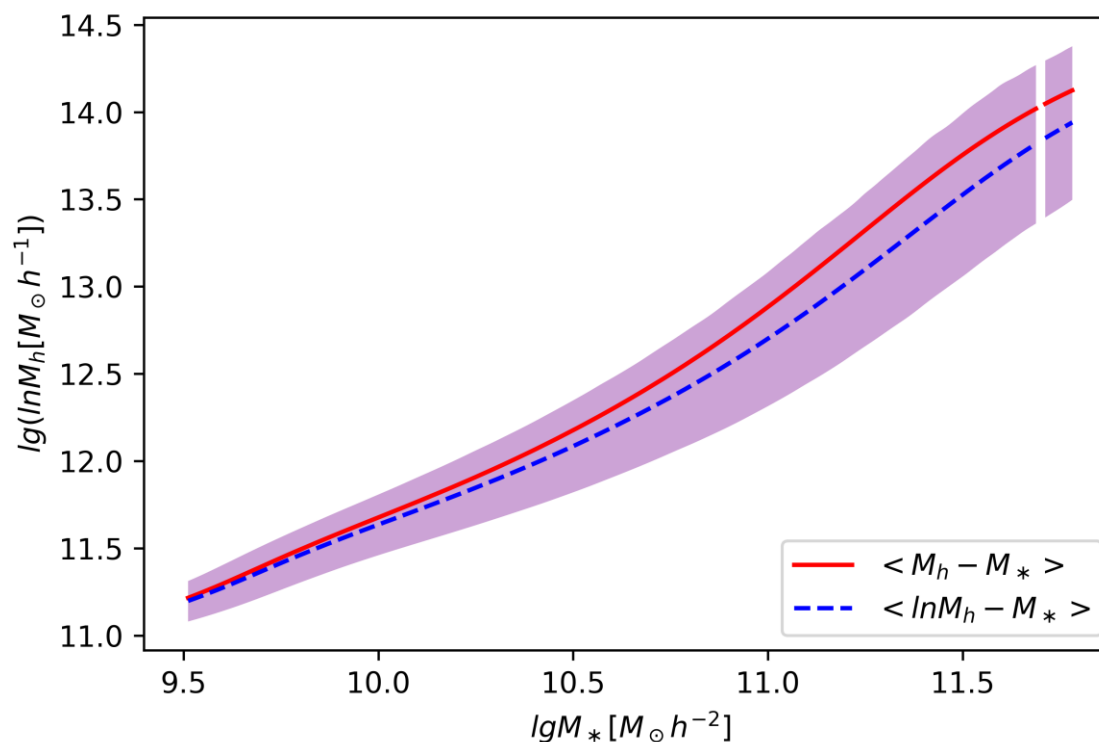
2. $M_h - M_*$ 的关系分析

4). 计算条件概率分布

$$p(M_h|M_*) = p(M_*, M_h)/p(M_*)$$

$$\langle M_h|M_* \rangle = \int p(M_h|M_*) M_h dM_h$$

最后得到的恒星-暗晕质量关系曲线
利用求得的条件概率可以方便的分析可能的
恒星-暗晕质量关系（对数坐标空间）



课题内容



2. $Mh - M_*$ 的关系分析

5).根据不同的QE机制，引入不同的星系红化系数 f^{red} ，分析观测数据

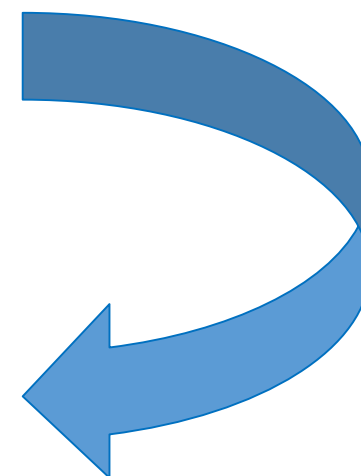
$$\left\{ \begin{array}{ll} p^{red}(Mh|M_*) & p^{blue}(Mh|M_*) \end{array} \right\} \xleftarrow{\quad} f^{red}(M_*)$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} p^{red}(Mh|M_*) & p^{blue}(Mh|M_*) \end{array} \right\} \xleftarrow{\quad} f^{red}(Mh)$$

$$f_{M_*}^{red}(M_*, Mh) = 1 - \exp[-(M_*/M_*^q)^{\mu_{m*}}] \quad f^{red}(M_*)$$

$$\mu_{m*} = 0.66 \quad \lg M_*^q [h^{-2} M_\odot] = 10.55$$

$$f_{Mh}^{red}(M_*, Mh) = 1 - \exp[-(Mh/Mh^q)^{\mu_{mh}}] \quad f^{red}(Mh)$$

$$\mu_{mh} = 0.42 \quad \lg Mh^q [h^{-1} M_\odot] = 12.25$$



课题内容



2. $Mh - M^*$ 的关系分析

5).根据不同的QE机制，引入不同的星系红化系数 f^{red} ，分析观测数据

$$p^{red}(M^*, Mh) = p(M^*, Mh) \frac{f^{red}(M^*, Mh)}{f_{tot}^{red}} \longrightarrow f^{red}(M^*) \quad f^{red}(Mh)$$

$$f_{tot}^{red} = \iint f^{red}(M^*, Mh) p(M^*, Mh) dM^* dMh$$

$$p^{red}(Mh|M^*) = \frac{p^{red}(Mh, M^*)}{p^{red}(M^*)}$$

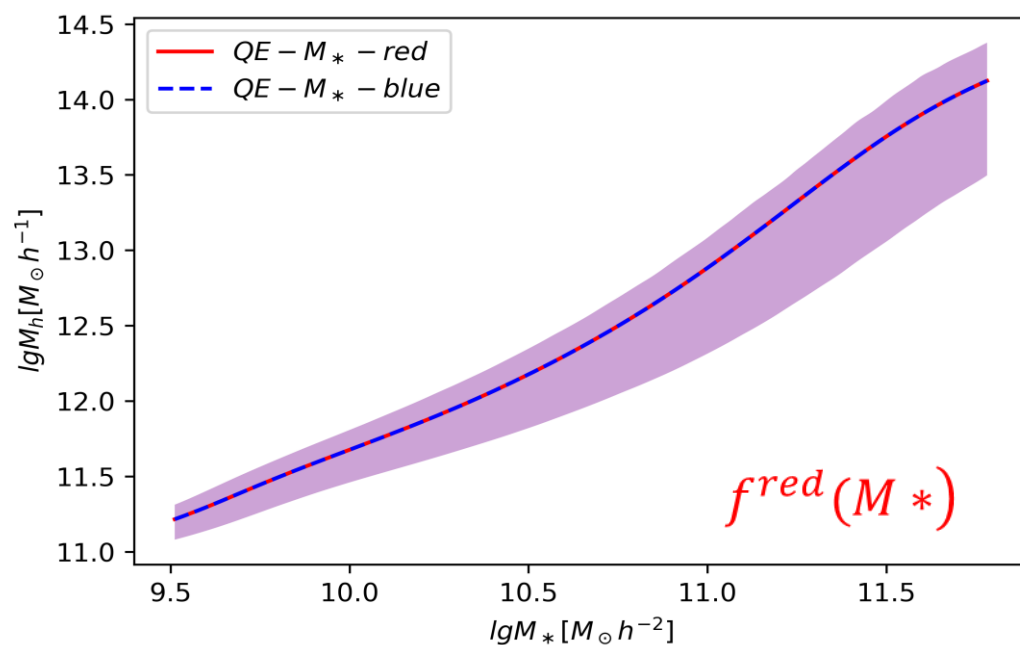
对于蓝星系，将关系 $f_{M^*}^{blue} = 1 - f_{M^*}^{red}$ 和 $f_{Mh}^{blue} = 1 - f_{Mh}^{red}$ 分别代入计算即可。

课题内容

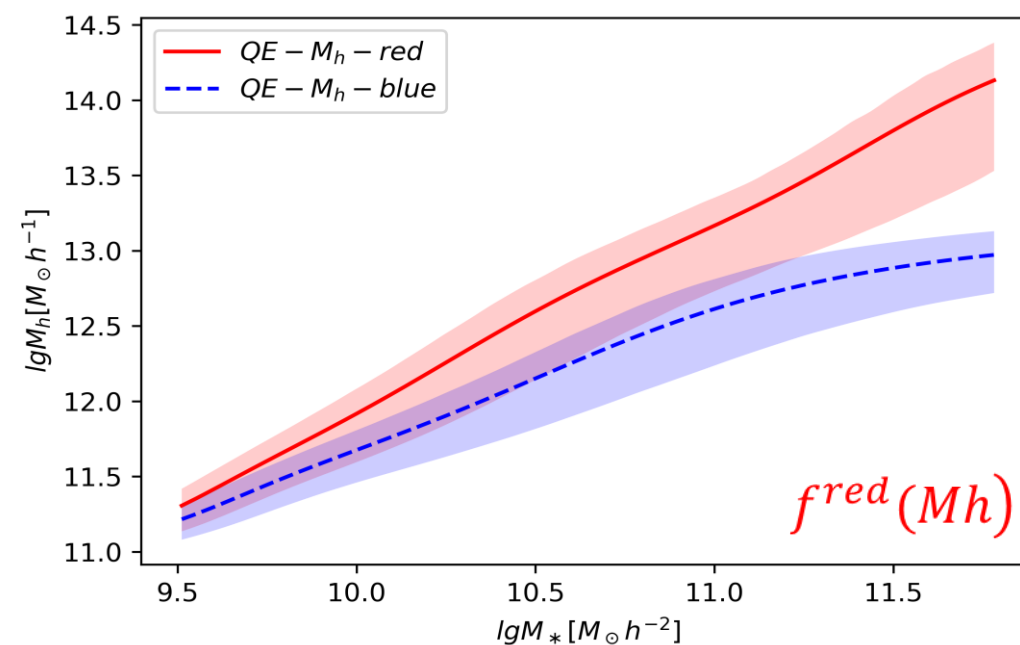


2. $M_h - M_*$ 的关系分析

6). 分析结果对比——两种机制下的红蓝星系恒星-暗晕质量关系



两类星系序列的关系曲线重合



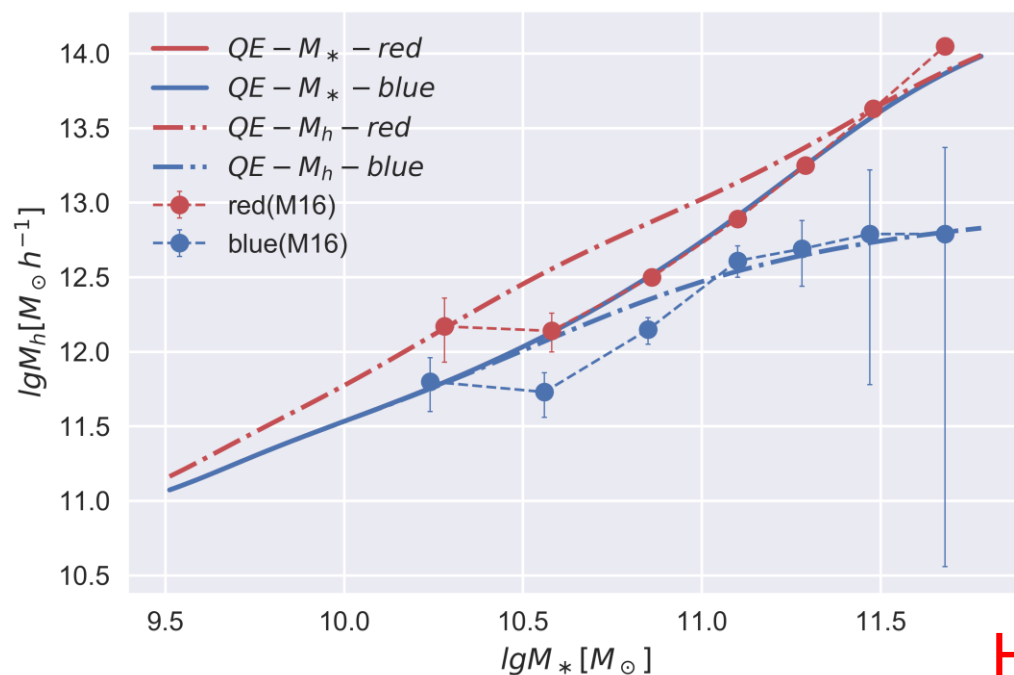
两类星系序列存在不同的关系曲线

课题内容



2. $M_h - M_*$ 的关系分析

6). 分析结果对比：两个星系序列的质量关系曲线对比



结果:

- 1) 假设恒星质量是**QE**的主导物理机制, 得到的质量函数关系只有一条, 但是观测数据表现出不同的两条质量关系曲线
- 2) 假设暗晕质量是**QE**的主导物理机制, 得到的是两条不同的质量函数关系曲线, 一条靠近红色序列, 一条靠近蓝色序列

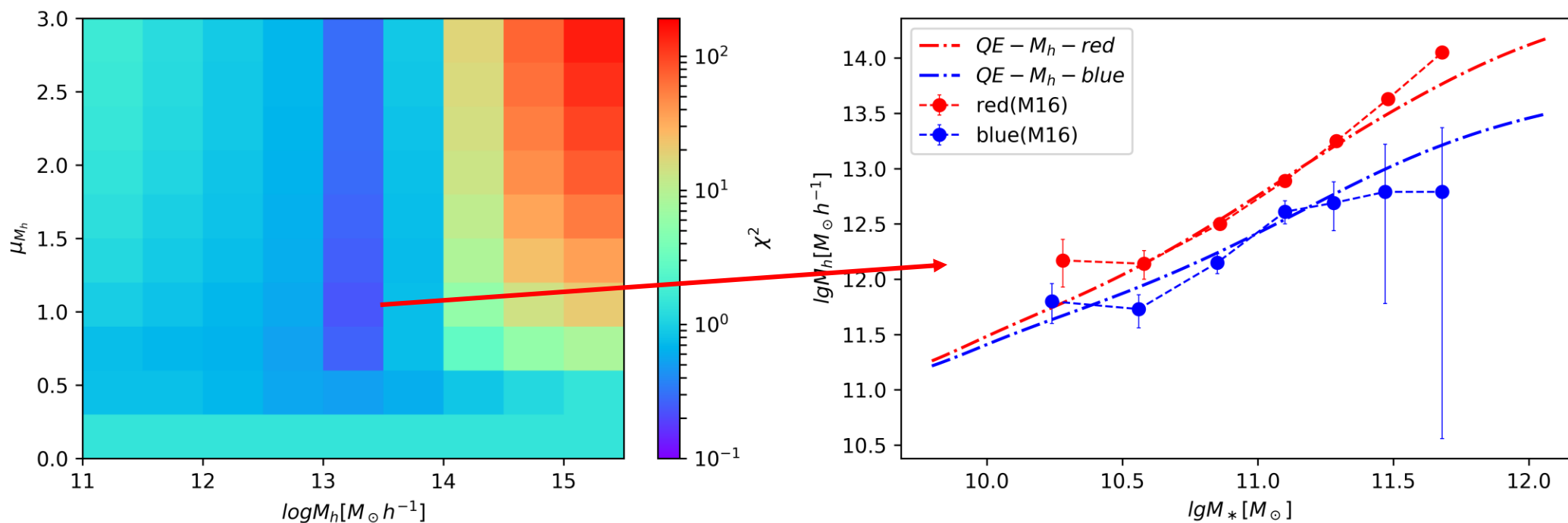
Halo mass plays a more important role in QE

课题内容



2. $M_h - M_*$ 的关系分析

6). 分析结果对比：进一步参数调整和逼近结果



研究结果



- 1.从NFW暗晕模型出发，根据g-g weak lensing 预测观测星系的暗晕质量是可行的
- 2.从NFW暗晕模型出发，根据g-g weak lensing 预测观测星系的暗晕质量，以95%的置信区间做卡方检验，在较大的恒星质量区间可以得到比较好的预测结果
- 3.在QE作用过程中，从引力角度考虑，星系的宿主暗晕质量起主导作用，并且在该条件下我们可以分析得到两条不同的恒星-暗晕质量关系曲线，分别逼近红星系和蓝星系

模型分析与课题深入



模型分析

1. 假设简单，计算直接，最后的数据对比结果也比较理想
2. 给出了观测数据的对比和参数取值优化
3. 从SHMR和星系红化系数约束出发，对观测数据和星系的QE主导物理机制给出了合理的说明
4. 从数据分析和理论分析上，建立的模型基本解决了课题提出的问题

模型分析与课题深入



课题深入

- 1.考虑更加合理的暗晕质量分布——如：椭球分布
- 2.在分析之初便加入应用的关系限制——如：C-M关系
- 3.在分析中加入气体质量，相应的，作用过程除了引力作用，还需考虑压强、温度变化，气体电离等过程。
- 4.进一步深入分析暗晕质量在QE中如何起作用，恒星质量如何参与到星系的演化历程（重点关注HI的巡天项目）



THANKS

2014级应用物理学陈晓凯

模型分析与课题深入



模型分析

- 1.在观测数据对比分析部分，不能引入**C-M**关系对比较结果做出更好的对比和优化
- 2.假设过于假单，对于蓝星系序列最小恒星质量的区间不能给出很好的暗晕质量估计对大的恒星质量区间星系的暗晕估计受到限制
- 3.对质量的考虑部分到目前为止还没有加入气体质量的考虑——现有模型基础不能做出这部分的工作
- 4.现有的模型基础不能给出恒星质量在**QE**过程中所起作用的分析或描述

自我评价



1.了解星系形成的物理过程，重点了解恒星形成过程及其“抑制”作用

2.利用弱引力透镜的观测数据来限制暗物质晕质量和星系形成“抑制”之间的关系

基础任务：完成!

3.利用中性氢的巡天观测来限制宇宙潮汐力场对星系中性氢含量的作用

4.结合2) 和3) 的结果建立一个中性氢 和暗物质晕之间的统计关系

课题深入



SDSS巡天 + HI观测项目ALFALFA

附录：特别过程结果与说明

1. $\Delta\chi^2$ 参数取值说明

$\Delta\chi^2$ as a Function of Confidence Level and Degrees of Freedom						
p	ν					
	1	2	3	4	5	6
68.3%	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04
90%	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6
95.4%	4.00	6.17	8.02	9.70	11.3	12.8
99%	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8
99.73%	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2	20.1
99.99%	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7	27.8

其中 ν 表示自由参数的个数： $\nu=N+M-1$

N:自由参数数目 N:对比的数据个数

在单参数情况下，取值分析：

$$\Delta\chi^2=1$$

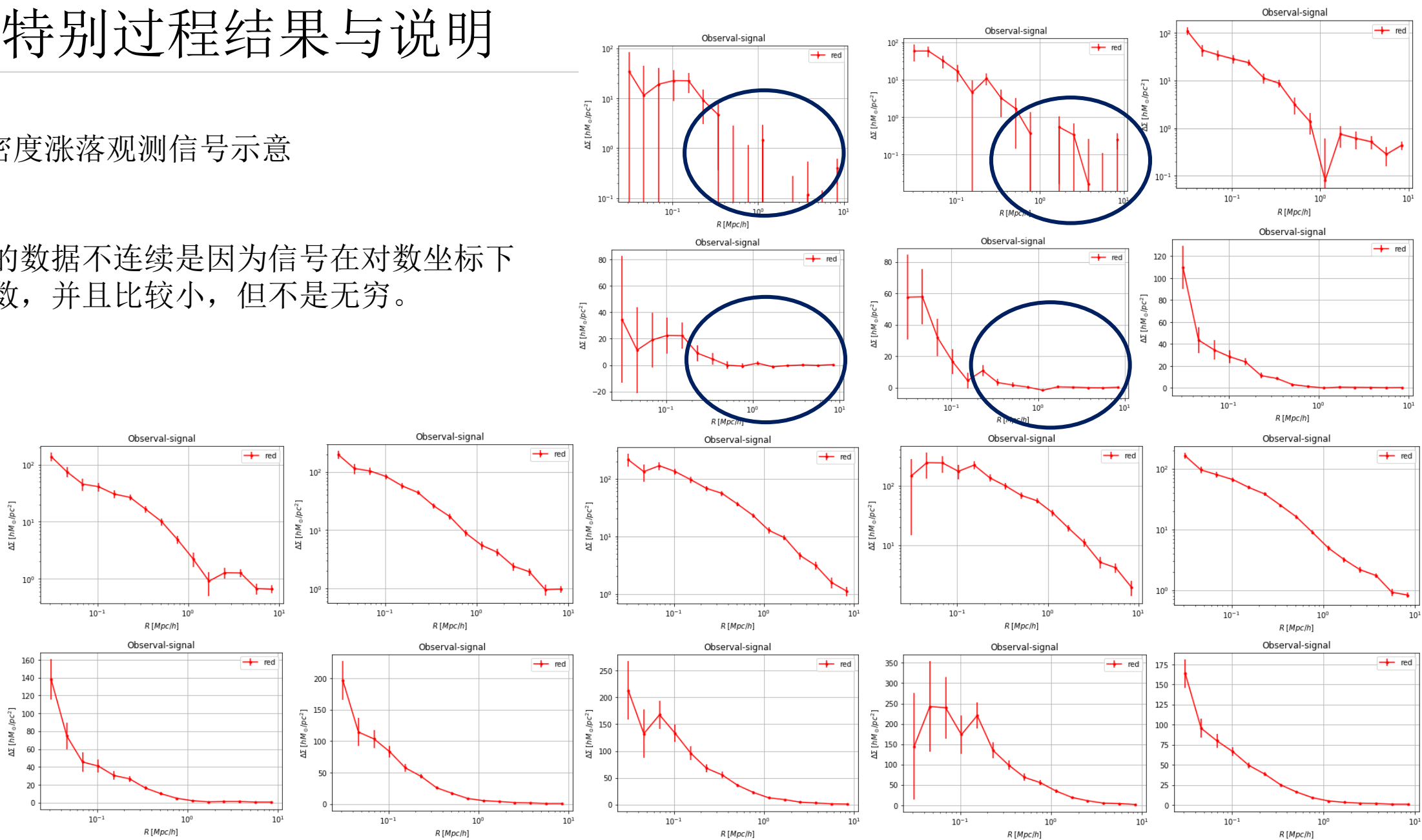


1σ 置信区间

附录：特别过程结果与说明

2. 红星系面密度涨落观测信号示意

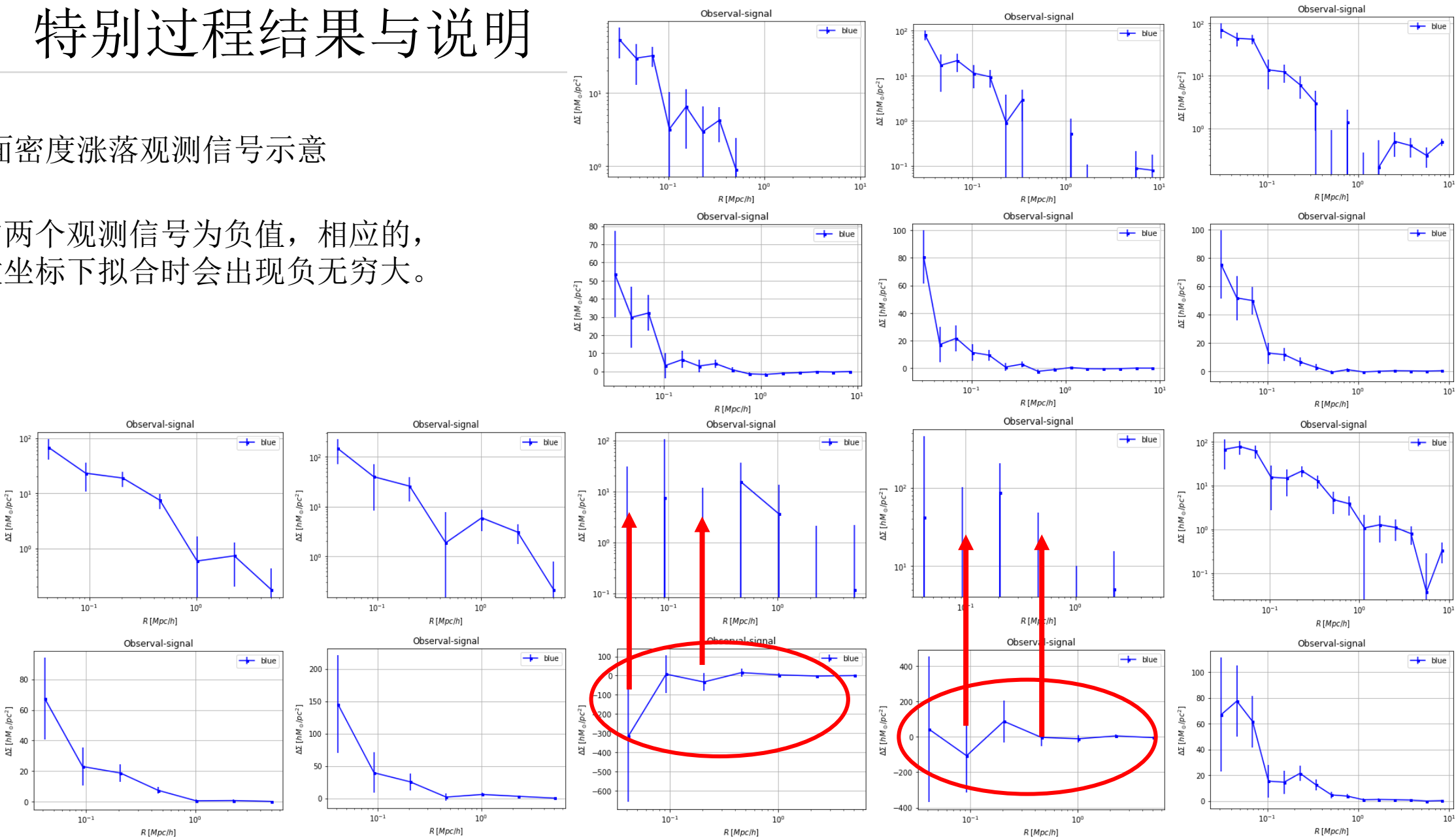
两处打圈的数据不连续是因为信号在对数坐标下取值为负数，并且比较小，但不是无穷。



附录：特别过程结果与说明

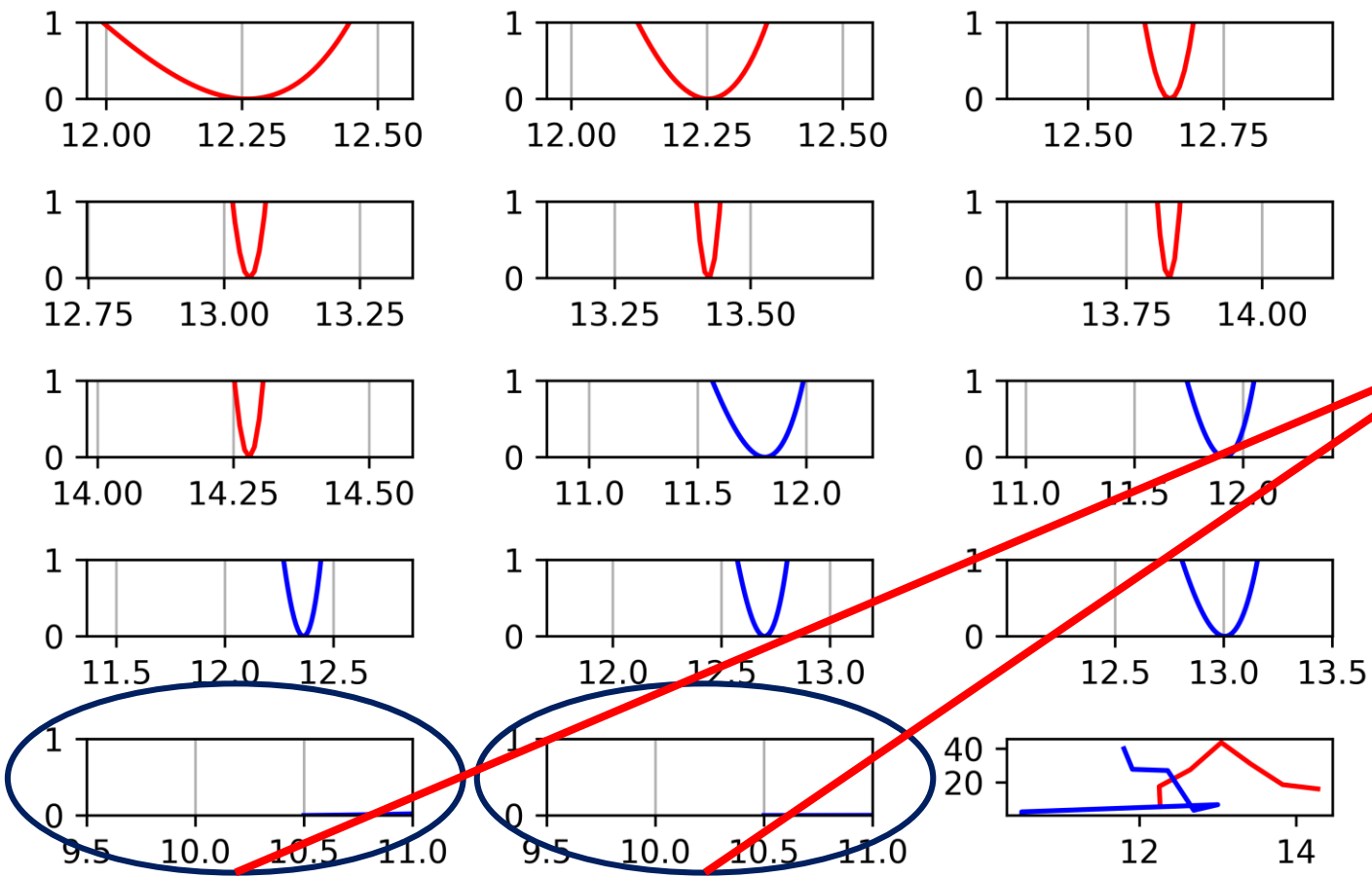
3.蓝星系面密度涨落观测信号示意

标圈的两个观测信号为负值，相应的，在对数坐标下拟合时会出现负无穷大。



附录：特别过程结果与说明

4.全部恒质量区间的卡方差值示意图

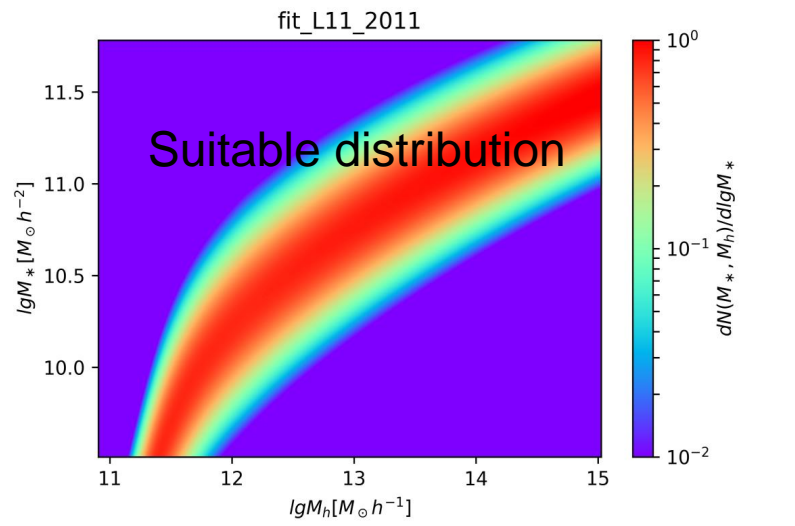
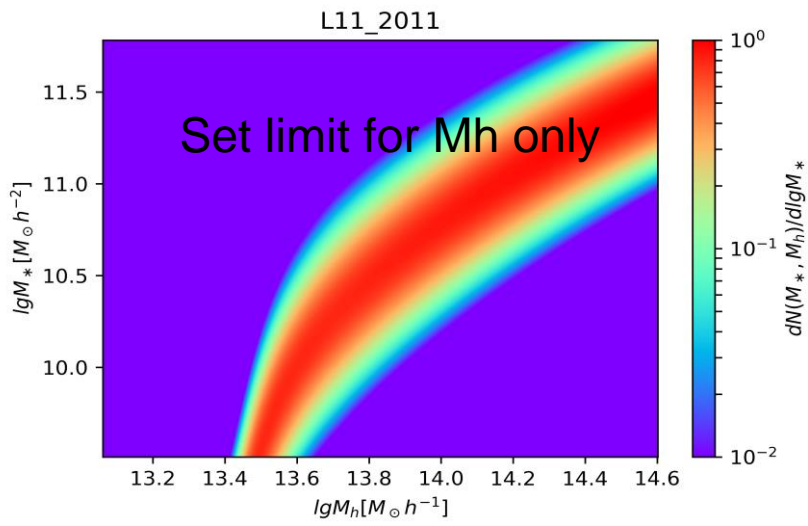
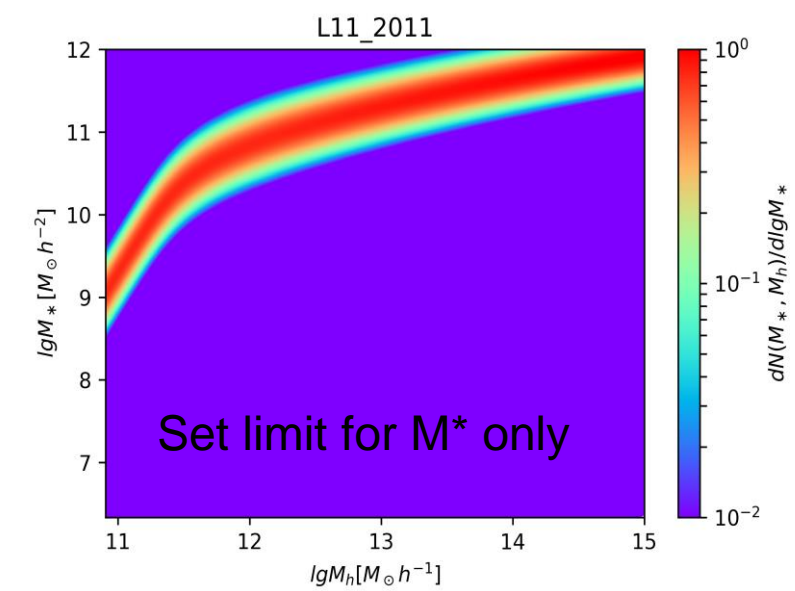
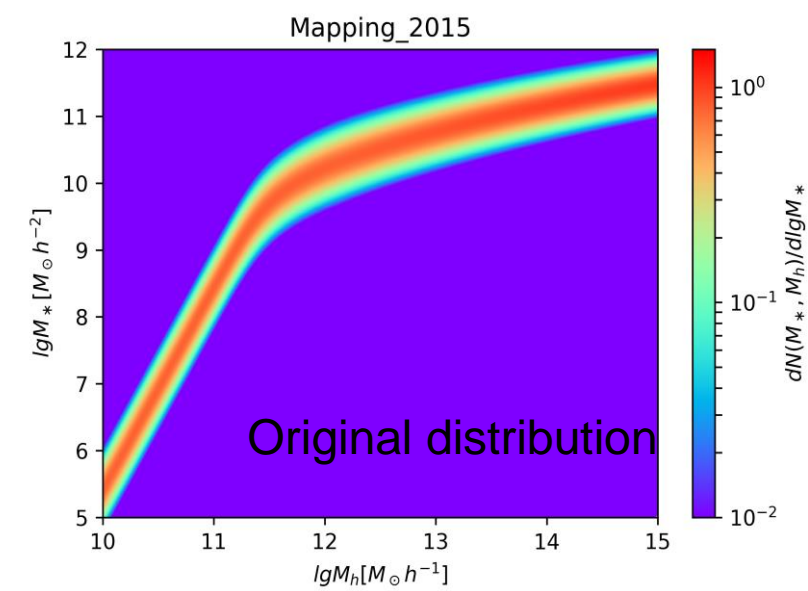


给出了暗晕质量越小，拟合越好的情况。
此时我们只能给出质量上限。

附录：特别过程结果与说明

5.联合分布参数质量区间限制取值示意图

在给定的均匀分布的
恒星质量区间和暗晕
质量区间的基础上，结合
SHMR对两者同时限制，
得到适应于质量函数的
联合概率密度分布。



附录：特别过程结果与说明

6.HI观测项目ALFALFA简介：

ALFALFA (shot for the Arecibo Legacy Fast Arecibo L-band Feed Array) 是第二代近邻宇宙的HI探测的巡天项目

优势：Arecibo卓越的灵敏度，角度分辨率和数字技术

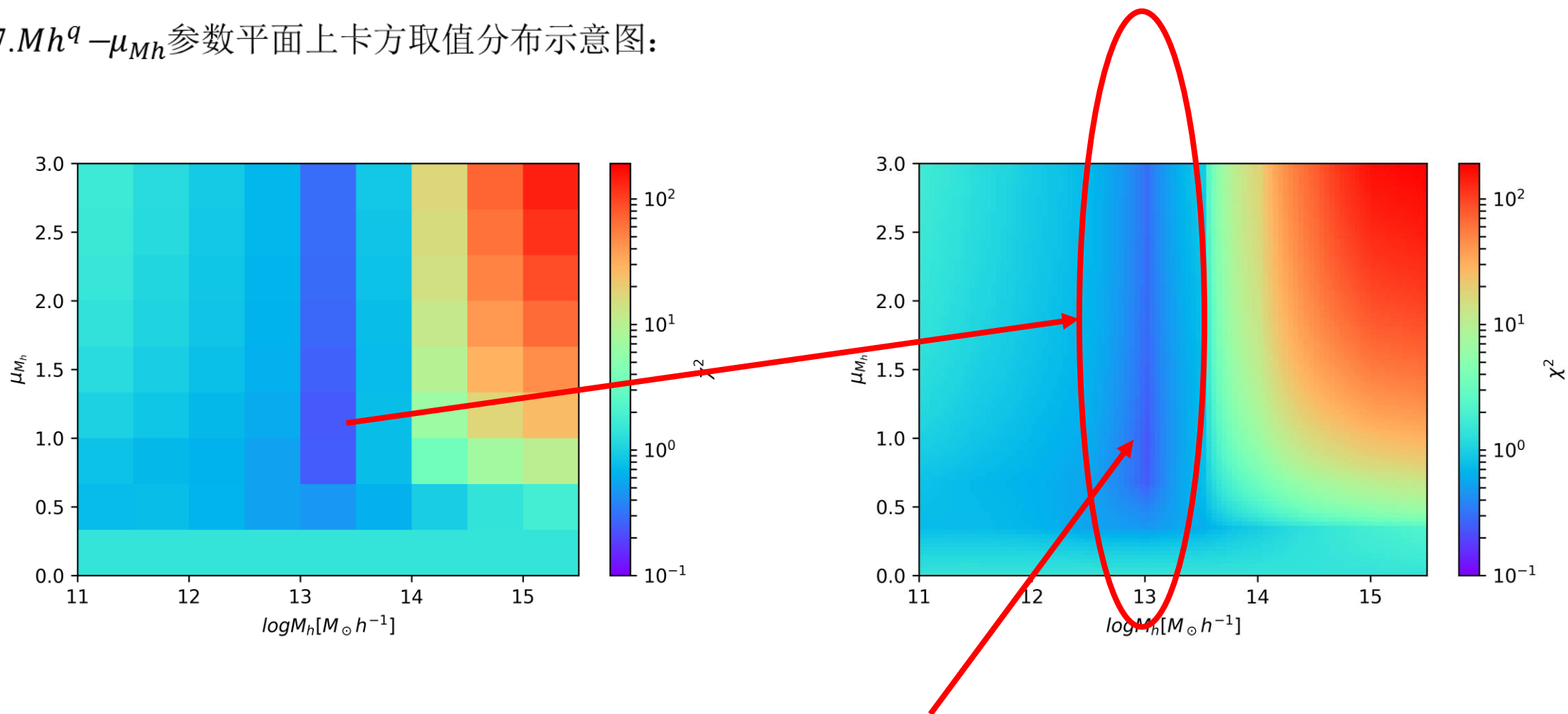
Science goals:

- A Legacy Survey: HI in the Nearby Universe
- The HI Mass Function and the "Missing Satellite Problem"
- Galaxy Evolution and Dynamics within Local Large Scale Structure
- The Extent and Origin of HI Disks
- The Nature of High Velocity Clouds
- A Blind Survey for 21 cm Absorbers at $z < 0.06$
- A Blind Survey for OH Megamasers at $0.16 < z < 0.25$
- Comparison with other surveys——SDSS,LAMOST

May be More
related to the project

附录：特别过程结果与说明

7. $Mh^q - \mu_{Mh}$ 参数平面上卡方取值分布示意图：



参数空间bins分得足够细致时，可以看到明显的最小值分布。

附录：特别过程结果与说明

8.Mandelbaum’s work 数据说明列表：

Table 1. Summary of the properties of the galaxy samples included in each color and stellar mass bin in this analysis. The quantities that are tabulated are the minimum and maximum stellar mass, the number of galaxies N_{gal} , the effective weighted stellar mass of the galaxies taking into account their effective weight in the lensing measurement for our canonical (VAGC) stellar masses and the MPA/JHU stellar masses, the effective weighted redshift z_{eff} of the galaxies in the bin including the lensing weight, and the fraction of Main sample galaxies f_{LBG} in this bin that are selected as LBGs.

	$\log_{10} \left(\frac{M_{*,\text{min}}}{M_{\odot}} \right)$	$\log_{10} \left(\frac{M_{*,\text{max}}}{M_{\odot}} \right)$	N_{gal}	$\log_{10} \left(\frac{M_{*,\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)$	$\log_{10} \left(\frac{M_{*,\text{eff}}^{\text{MPA}}}{M_{\odot}} \right)$	z_{eff}	f_{LBG}
	Red						
R1~R7 质量区间	10.0	10.4	4244	10.28	10.39	0.064	0.13
	10.4	10.7	17542	10.58	10.70	0.081	0.27
	10.7	11.0	44724	10.86	10.97	0.105	0.47
	11.0	11.2	37987	11.10	11.20	0.131	0.66
	11.2	11.4	28008	11.29	11.38	0.159	0.79
	11.4	11.6	12599	11.48	11.56	0.191	0.88
	11.6	15.0	3195	11.68	11.75	0.230	0.91
	Blue						
B1~B7 质量区间	10.0	10.4	20690	10.24	10.29	0.079	0.32
	10.4	10.7	30842	10.56	10.63	0.100	0.48
	10.7	11.0	33621	10.85	10.94	0.124	0.65
	11.0	11.2	11040	11.10	11.18	0.155	0.79
	11.2	11.4	2626	11.28	11.35	0.183	0.87
	11.4	11.6	325	11.47	11.54	0.220	0.90
	11.6	15.0	96	11.68	11.69	0.246	0.96

恒星质量区间

$10^{10.0 \sim 10.4} M_{\odot} h^{-1}$

其余类似



附录： 特别过程结果与说明

9.Mandelbaum’s work 预测数据摘录列表：

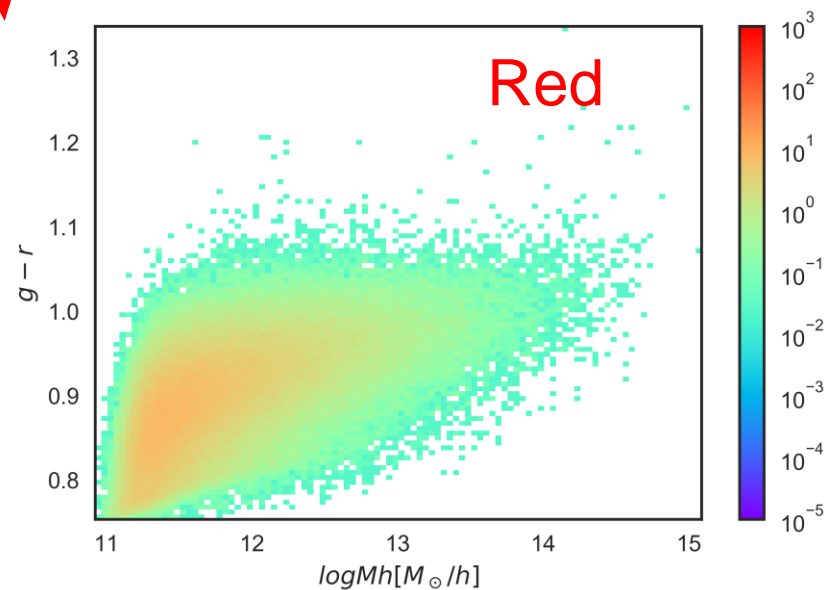
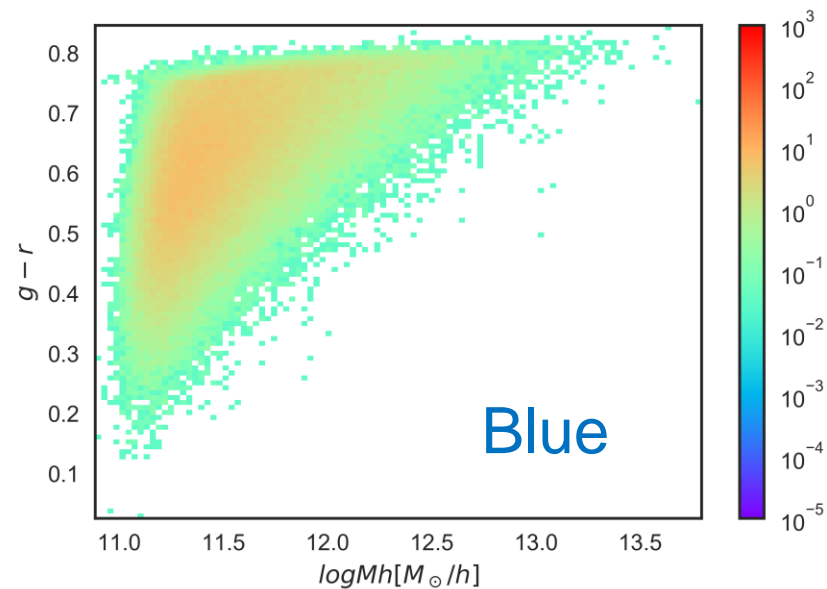
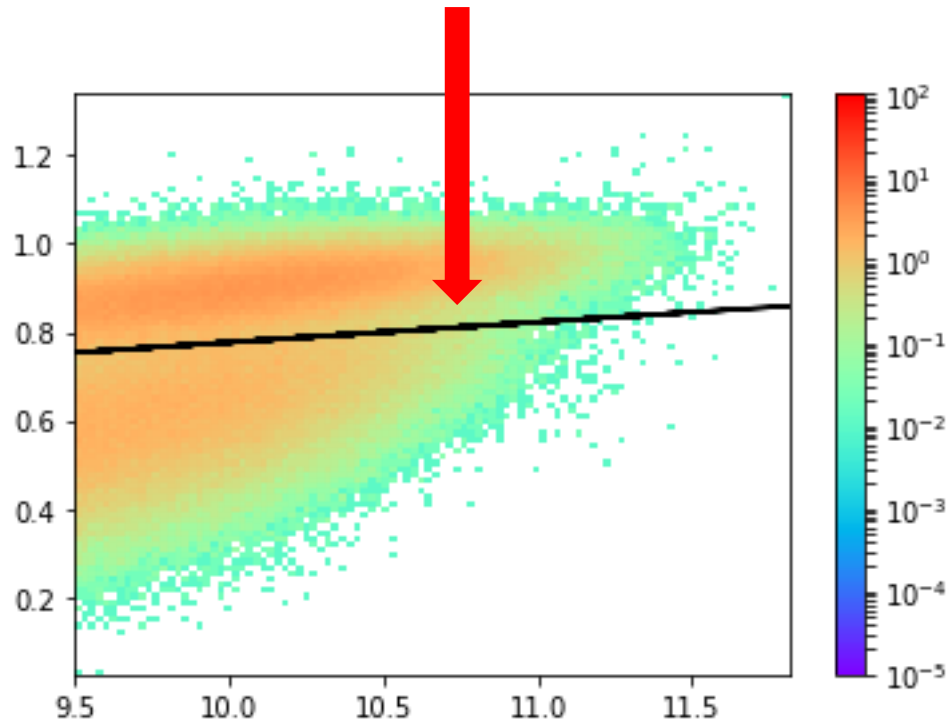
表 3-2.Mandelbaum et.al 模型预测结果摘要（B 表示 blue， R 表示 red）。↵

R↵	$\log_{10}(M_{*,\text{eff}} / M_{\odot})$	10. 28↵	10. 58↵	10. 86↵	11. 10↵	11. 29↵	11. 48↵	11. 68↵
	$\log_{10}(\frac{\langle M_{200m} \rangle}{h^{-1}M_{\odot}})$ ↵	$12.17^{+0.19}_{-0.24}$ ↵	$12.14^{+0.12}_{-0.14}$ ↵	$12.50^{+0.04}_{-0.05}$ ↵	$12.89^{+0.04}_{-0.04}$ ↵	$13.25^{+0.03}_{-0.03}$ ↵	$13.63^{+0.03}_{-0.03}$ ↵	$14.05^{+0.05}_{-0.05}$ ↵
B↵	$\log_{10}(M_{*,\text{eff}} / M_{\odot})$	10. 24↵	10. 56↵	10. 85↵	11. 10↵	11. 28↵	11. 47↵	11. 68↵
	$\log_{10}(\frac{\langle M_{200m} \rangle}{h^{-1}M_{\odot}})$ ↵	$11.80^{+0.16}_{-0.20}$ ↵	$11.73^{+0.13}_{-0.17}$ ↵	$12.15^{+0.08}_{-0.10}$ ↵	$12.61^{+0.10}_{-0.11}$ ↵	$12.69^{+0.19}_{-0.25}$ ↵	$12.79^{+0.43}_{-1.01}$ ↵	$12.79^{+0.58}_{-2.23}$ ↵

附录：特别过程结果与说明

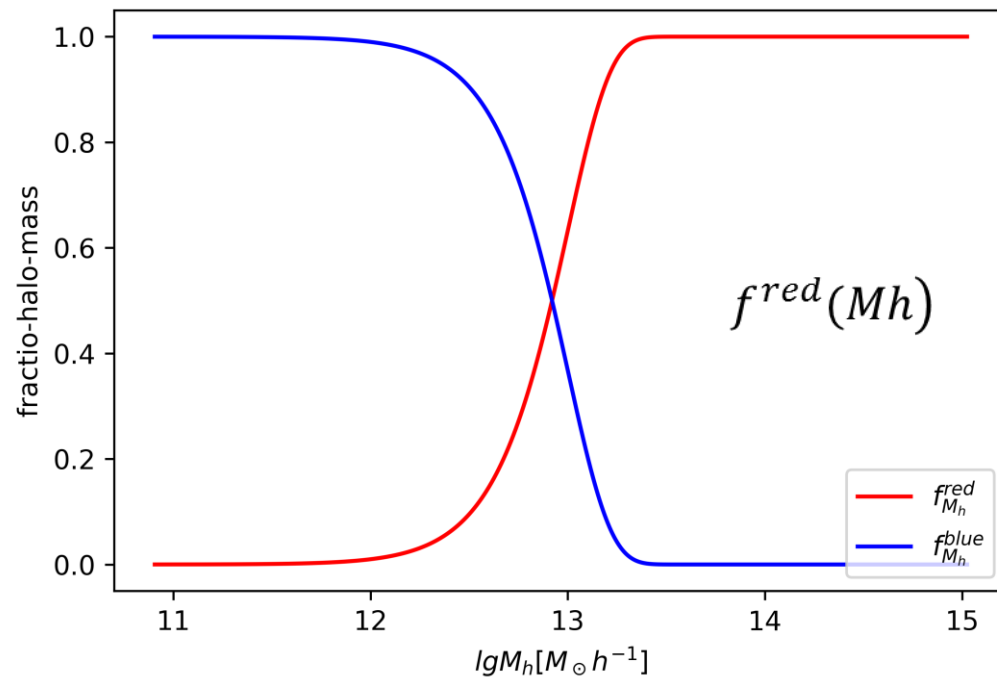
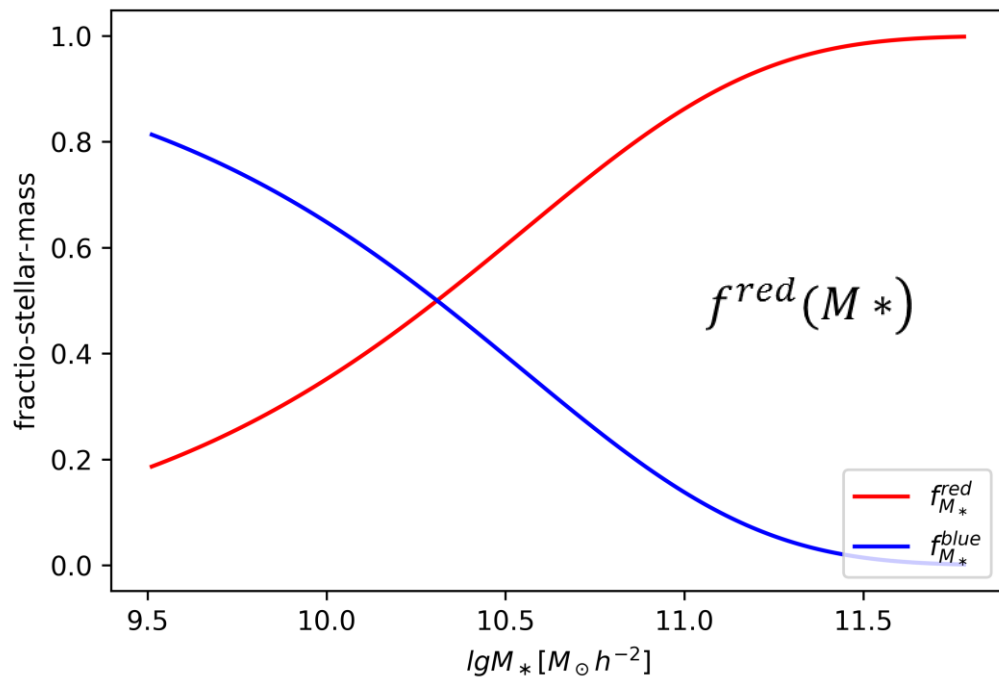
10.红、蓝星系分类依据——依赖于星系的恒星质量

$$(g-r)_{\text{split}}|_{M_*} = 0.8 \left(\frac{\lg M_*}{10.5} \right)^{0.6}$$



附录：特别过程结果与说明

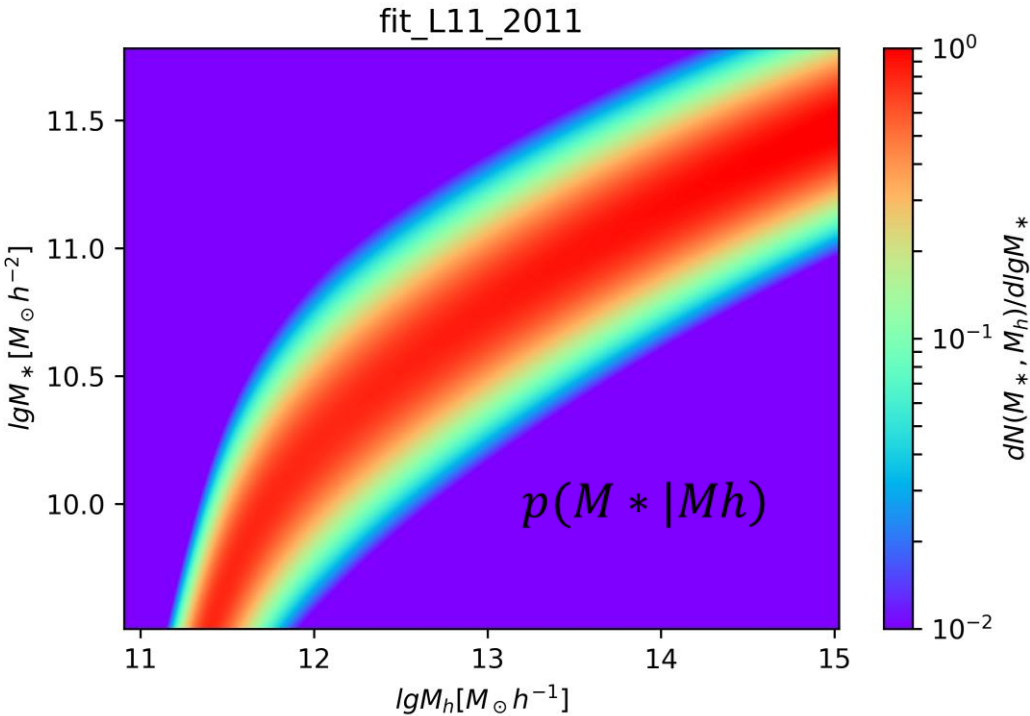
11. 红化系数关系曲线示意图：



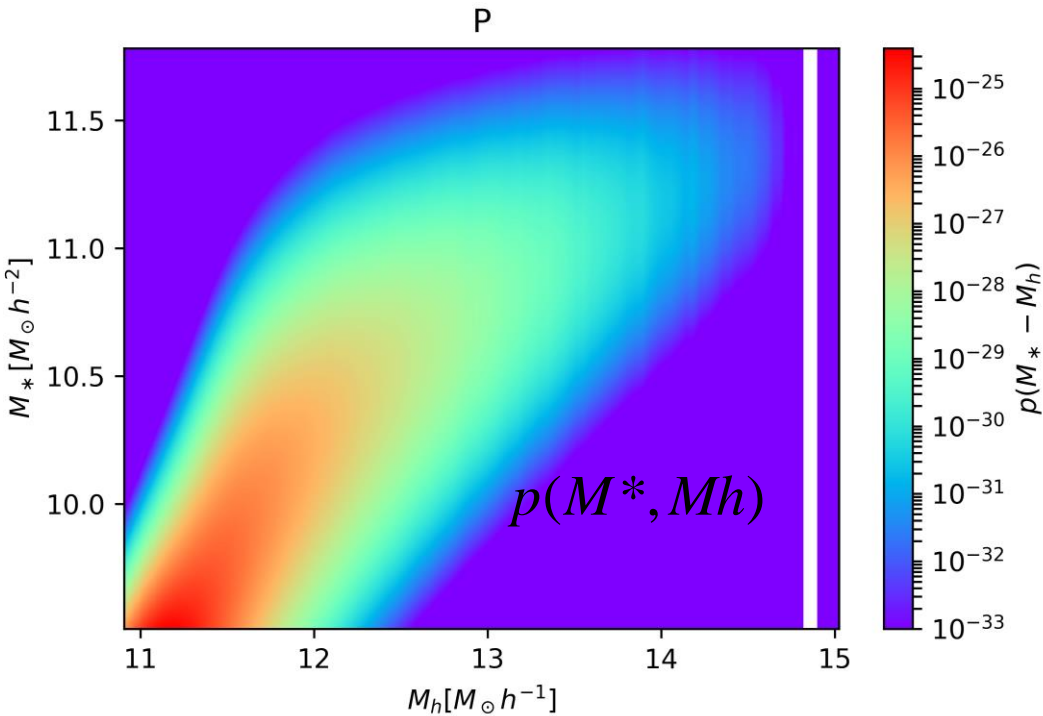
不同的Quenching Effect 主导物理机制下的红化系数-质量变化曲线

附录：特别过程结果与说明

12. 红化约束条件下恒星-暗晕质量联合概率密度分布示意图：



SHMR约束下的适应质量函数区间的 $p(M^* | M_h)$



f^{red} 约束下的恒星-暗晕质量联合概率密度分布

附录：特别过程结果与说明

13. C-M关系的参考形式

$$\log_{10} c_{200} = \log_{10} A + B \log_{10} \left(\frac{M_{200}}{10^{14} \text{ M}_{\odot}} \right)$$

Hydrodynamical simulations of galaxy clusters in dark energy cosmologies: II. c –M relation.
C. De Boni et.al 2012.

在小质量区间，**c**对
质量的变化更敏感！

$$c_{200c} = A \left[\left(\frac{M_{200c}/M_{\star}}{b} \right)^m \left(1 + \frac{M_{200c}/M_{\star}}{b} \right)^{-m} - 1 \right] + c_0.$$

HALO PROFILES AND THE CONCENTRATION-MASS RELATION FOR A CDM UNIVERSE
HALO PROFILES AND THE CONCENTRATION-MASS RELATION FOR A Λ CDM UNIVERSE. Hillary L. Child et.al 2018.