Typesetted by LaTeX

函数概念

韩奇成

hanqch21@lzu.edu.cn

2023 年 9 月 15 日

定义

函数的古典的定义

设给定两变量 x 和 y, 它们的变动区域各为 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$. 如果依某一法则或规律, 对于 $\mathcal{X}$ 中的每一个 x 值, 总有唯一一个确定的 y 与之对应, 则变量 y 就称为变量 x 的**函数**, 我们写

$$y = f(x), \quad \text{或} f : x \to y.$$

定义

函数的古典的定义

设给定两变量 x 和 y, 它们的变动区域各为 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$. 如果依某一法则或规律, 对于 $\mathcal{X}$ 中的每一个 x 值, 总有唯一一个确定的 y 与之对应, 则变量 y 就称为变量 x 的**函数**, 我们写

$$y = f(x), \quad \text{或} f : x \to y.$$

集合 $\mathcal{X}$ 称为函数的**定义域**, $\mathcal{Y}$ 称为函数的**上域**. 函数值的集合 $f(\mathcal{X})$ 称为函数的**值域**.

定义

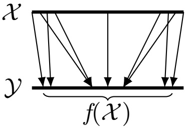
函数的古典的定义

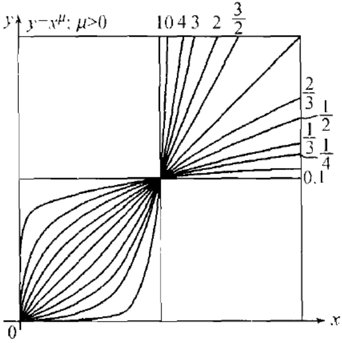
设给定两变量 x 和 y, 它们的变动区域各为 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$. 如果依某一法则或规律, 对于 $\mathcal{X}$ 中的每一个 x 值, 总有唯一一个确定的 y 与之对应, 则变量 y 就称为变量 x 的**函数**, 我们写

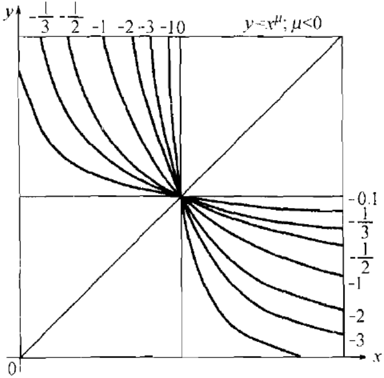
$$y = f(x), \quad \text{或} f: x \to y.$$

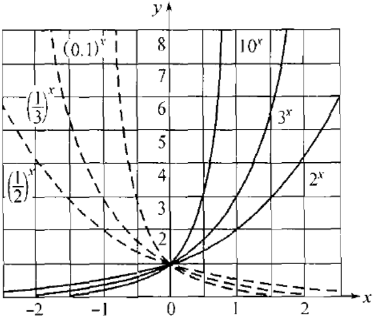
集合 $\mathcal{X}$ 称为函数的**定义域**, $\mathcal{Y}$ 称为函数的**上域**. 函数值的集合 $f(\mathcal{X})$ 称为函数的**值域**.

应该注意区分函数的值域和上域. 一般来讲, 函数的上域可为任意一个包含值域的集合.

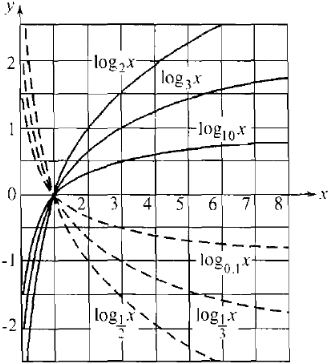



$y=x^{\mu};\ \mu>0$
10 4 3 2 $\frac{3}{2}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$
0.1
0
x
y


$y=x^{\mu};\ \mu<0$
$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ -1 -2 -3 -10
-0.1
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$
-1
-2
-3
0
x
y



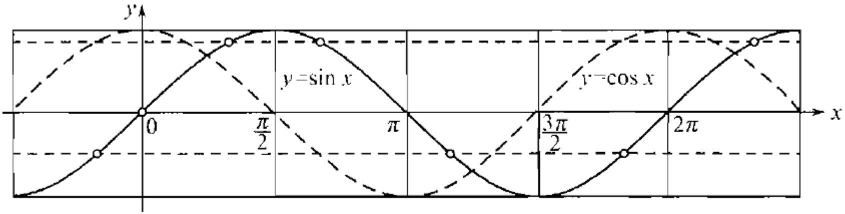
y
x
$(0.1)^x$
10^x
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
3^x
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
2^x
8
7
6
5
4
3
2
-2
-1
0
1
2

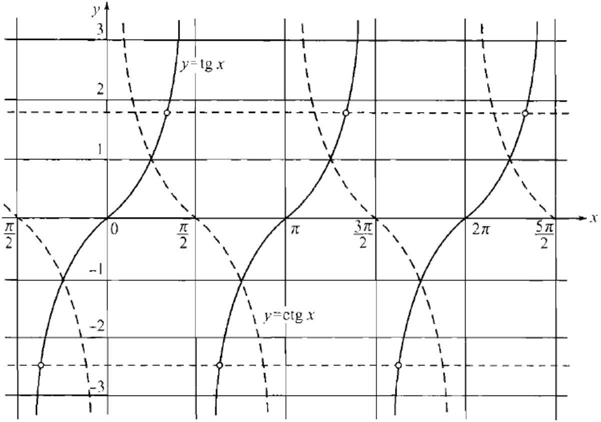


y
x
$\log_2 x$
$\log_3 x$
$\log_{10} x$
$\log_{0.1} x$
$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\log_{\frac{1}{3}} x$
2
1
0
-1
-2
2
3
4
5
6
7
8

基本初等函数

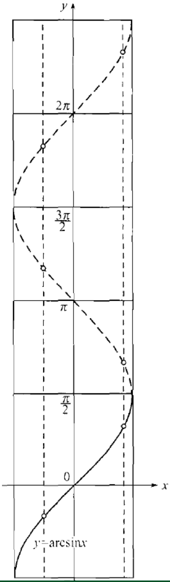
三角函数

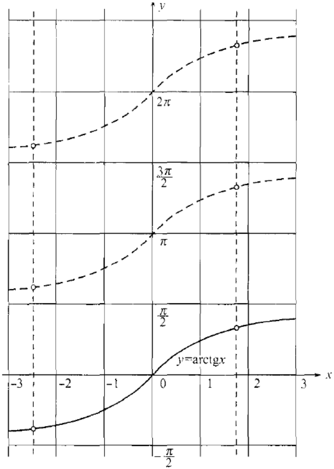




y
x
3
2
1
-1
-2
-3
0
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
y = tg x
y = ctg x

0.7


y
2π
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{2}$
0
x
y=arcsinx


y
2π
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{2}$
y=arctgx
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
$-\frac{\pi}{2}$

几种特别的函数

1. 取整函数

若 $x = n + r$, 其中 $n \in \mathbf{Z}, r \in [0, 1)$, 则定义函数 $[x] = n$.

这个函数给出实数 x 的整数部分. 同样, 函数 $x - [x]$ 给出实数 x 的小数部分.

几种特别的函数

2. Dirichlet 函数 $\mathcal{D}(x)$

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}. \end{cases}$$

它满足函数的定义，但它无法用图画出来.

问题 1: 求函数的定义域

函数的定义区域可能决定于数学定律, 也可能决定于实际的情形.

问题 1: 求函数的定义域

函数的定义区域可能决定于数学定律, 也可能决定于实际的情形.
决定于数学定律: $(f(x) = x^{1/2} \Rightarrow (x \geq 0), (f(x) = \log x) \Rightarrow (x > 0), \cdots$

问题 1: 求函数的定义域

函数的定义区域可能决定于数学定律, 也可能决定于实际的情形.
决定于数学定律: $(f(x) = x^{1/2} \Rightarrow (x \geq 0), (f(x) = \log x) \Rightarrow (x > 0), \cdots$
决定于实际的情形: 运动方程 $t \geq 0, \cdots$

问题 1: 求函数的定义域

函数的定义区域可能决定于数学定律, 也可能决定于实际的情形.
决定于数学定律: $(f(x) = x^{1/2} \Rightarrow (x \geq 0)$, $(f(x) = \log x) \Rightarrow (x > 0)$, $\cdots$
决定于实际的情形: 运动方程 $t \geq 0$, $\cdots$

习题

求下面函数的定义域:

1) $y = \dfrac{\sin \pi x}{\sin \pi x}$;
2) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$;
3) $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

问题 2: 求函数的值域

函数**定义中的两个要素**是定义域 $\mathcal{X}$ 和对应法则 f. 特别是, 后者可以决定值域.

习题

求下面两个函数的定义域和值域:
1. $y=\sqrt{2+x-x^2}$. 2. $y=\lg(1-2\cos x)$.
下面的函数在 $(0,1)$ 上定义着. 求值域:
1. $y=\dfrac{x}{2x-1}$. 2. $y=\sqrt{x-x^2}$.

函数的现代定义

上述定义有没有暴露出缺陷?

函数的现代定义

上述定义有没有暴露出缺陷?
使用了" 对应" 这个同义词.

上述定义有没有暴露出缺陷?
使用了" 对应" 这个同义词.

关系

一个表达式

$$\mathfrak{z}(x,y)=0$$

称为 x, y 间的一个**关系**或**约束**或**隐函数**.

上述定义有没有暴露出缺陷?
使用了"对应"这个同义词.

关系

一个表达式

$$\mathfrak{Z}(x, y) = 0$$

称为 x, y 间的一个**关系**或**约束**或**隐函数**.

如果 $(\mathfrak{Z}(x, y_1) = 0$ 且 $\mathfrak{Z}(x, y_2) = 0) \Rightarrow (y_1 = y_2)$, 则 $\mathfrak{Z}$ 称为函数关系.

函数的复合

复合函数

设两个函数 $f\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1, g: \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$. 如果 g 的定义域包含着 f 的值域, 即若 $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{X}_2$, 则对 $x \in \mathcal{X}_1$ 定义 f 和 g **(按这个顺序!)** 的**复合函数**: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

函数的复合

复合函数

设两个函数 $f\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1, g : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$. 如果 g 的定义域包含着 f 的值域, 即若 $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{X}_2$, 则对 $x \in \mathcal{X}_1$ 定义 f 和 g **(按这个顺序!)** 的**复合函数**: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

容易发现, 上面定义中的包含条件具有重要意义. 不然, 若 $f(x)$ 不在 g 的定义域内, 复合函数将没有意义.

函数的复合

复合函数

设两个函数 $f\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1, g : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$. 如果 g 的定义域包含着 f 的值域, 即若 $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{X}_2$, 则对 $x \in \mathcal{X}_1$ 定义 f 和 g **(按这个顺序!)** 的**复合函数**: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

容易发现, 上面定义中的包含条件具有重要意义. 不然, 若 $f(x)$ 不在 g 的定义域内, 复合函数将没有意义.

函数复合的结合律

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

它根据符号 $\circ$ 的定义显然可证.
但要注意, **函数的复合一般不满足交换律**.

例题

1. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$. 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.
由题意 $x+3\in(0,1)$, 所以 $x\in(-3,-2)$.
2. 函数 $f(x+3)$ 的定义域是 $(-3,-2)$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.
由题意 $x+3$ 中的 $x\in(-3,-2)$, 所以 $x+3\in(0,1)$, 此即所求.

问题 3: 用复合函数来提的函数定义域的问题

例题

1. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$. 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.
由题意 $x+3\in(0,1)$, 所以 $x\in(-3,-2)$.
2. 函数 $f(x+3)$ 的定义域是 $(-3,-2)$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.
由题意 $x+3$ 中的 $x\in(-3,-2)$, 所以 $x+3\in(0,1)$, 此即所求.

习题

设函数 $f(3x+2)$ 的定义域为 $(0,1)$, 求函数 $f(x+5)$ 的定义域.

问题 4: 用复合函数来提的函数解析式的问题

例题

设 $f(x+1)=x^2-3x+2$, 求 $f(x)$.
置 $x+1=y$, 则 $x=y-1$, 于是

$$f(y)=(y-1)^2-3(y-1)+2=y^2-5y+6,$$

此即所求.

问题 4：用复合函数来提的函数解析式的问题

例题

设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$.
置 $x+1=y$，则 $x=y-1$，于是

$$f(y)=(y-1)^2-3(y-1)+2=y^2-5y+6,$$

此即所求.

这种问题通常可以用替换的方法解决.

习题

1. 设 $f(x+1/x)=x^2+1/x^2(|x|\geq 2)$，求 $f(x)$.
2. 设 $f(1/x)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.
3. 设 $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$，求 $f(x)$.

函数的单调性

单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (开的, 闭的, 或一端开一端闭) $\mathcal{D}$ 上有定义. 则 f 被称为在区间 $\mathcal{D}$ 上

增的, 假如 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}((x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$;

不减的, 假如 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}((x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$;

减的, 假如 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}((x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$;

不增的, 假如 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}((x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$.

习题

考虑定义在 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 上的函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 用单调性的定义证明:

1. $f(x)$ 在区间 $[-1, 0)$ 及 $(0, 1]$ 各为减函数;
2. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, \infty)$ 各为增函数.

习题

考虑定义在 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 上的函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 用单调性的定义证明:
1. $f(x)$ 在区间 $[-1, 0)$ 及 $(0, 1]$ 各为减函数;
2. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, \infty)$ 各为增函数.

取 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \\ &= (x_1 - x_2)(1 - (x_1 x_2)^{-1}). \end{aligned}$$

函数的对称性

对称性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 $\mathcal{D}$ 上有定义. 称 $f(x)$ 为区间 $\mathcal{D}$ 上的
偶函数, 若 $\forall x \in \mathcal{D}(f(-x) = f(x))$;
奇函数, 若 $\forall x \in \mathcal{D}(f(-x) = -f(x))$.

习题

证明: 任意一个定义于对称区间的函数, 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

函数的对称性

对称性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 $\mathcal{D}$ 上有定义. 称 $f(x)$ 为区间 $\mathcal{D}$ 上的
偶函数, 若 $\forall x \in \mathcal{D}(f(-x) = f(x))$;
奇函数, 若 $\forall x \in \mathcal{D}(f(-x) = -f(x))$.

习题

证明: 任意一个定义于对称区间的函数, 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

注意到 $x = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

函数的绝对周期性

函数的绝对周期性

设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathcal{D}$ 上. 若存在数 $T > 0$ 使

$$x \in \mathcal{D}(f(x \pm T) = f(x)),$$

则函数 $f(x)$ 称为**周期函数**.

问题 5: 关于函数的周期性, 图像的对称性

习题

1. 考虑迪里希利函数. 它是周期函数吗? 如果是, 它的周期是什么? 它有没有最小周期?
2. 设有函数 $f(x)$ 满足 $f(x+T) = -f(x)$ (反周期函数). 证明: 它是以 $2T$ 为周期的周期函数.
3. 若定义在全轴的函数 $y = f(x)$ 的图像关于竖直方向上的两条不同的直线 $x = a$ 及 $x = b$ 对称, 则 $f(x)$ 为周期函数.
4. 若定义在全轴的函数 $y = f(x)$ 关于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b(b \neq a)$ 对称, 则 $f(x)$ 为周期函数.
5. 证明: 若定义在全轴的函数 $f(x)$ 的图像关于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别当 $y_0 = y_1$ 时, $f(x)$ 是周期函数.

函数的条件周期性

函数的条件周期性

若函数 $f(x)$ 在其定义域内满足 $f(x+T)=kf(x)$ (其中 k,T 为正常数), 则称 $f(x)$ 为**条件周期函数**.

关于条件周期性的定理

若函数 $f(x)$ 满足上述条件, 则 $f(x)=a^x\varphi(x)$, 其中 a 为正常数, 而 φ 是以 T 为周期的周期函数.

证. 我们试着反推. 假设结论成立, 则有

$$f(x+T)=a^{x+T}\varphi(x+T)=kf(x)=ka^x\varphi(x).$$

用 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$ 化简, 得 $a=k^{1/T}$, 所以 $\varphi(x)=f(x)k^{-x/T}$. 而我们找到的 a 和 φ 显然符合题意.

例题

求这样的 f, 在 $x \in [0,1]$ 时 $f(x) = x(1-x)$ 而 $f(x+1) = 2f(x)$.

函数的凸性

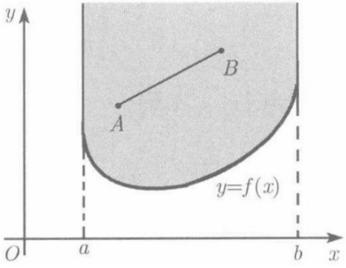
在其定义域 $\mathcal{D}$ 上连续的函数 $f(x)$ 称为**下凸函数**, 如果

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)).$$

若上面的不等号反向, 则称为上凸函数.

当 f 为下凸函数时, $-f$ 就是上凸函数.

凸函数的几何意义



设 $A(x_1, f(x_1))$ 和 $B(x_2, f(x_2))$ 是函数图形上 (或其上方) 的两点. 则**线段** AB

$$x = tx_1 + (1-t)x_2, \quad y = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

显然落在图形上方的阴影区域 ("凸集") 内.

函数的凸性

习题

1. 证明: 线性函数既是下凸函数又是上凸函数.
2. 几个下凸函数之和仍为下凸函数. (但几个下凸函数之积则不一定. 试举例说明).
3. 用定义证明当函数 $\varphi(u)$ 及 $u=f(x)$ 满足不同条件时, 它们的复合 $\varphi\circ f(x)$ 应具有下表所示的性质:

编号	$\varphi(u)$	$u=f(x)$	$\varphi\circ f(x)$
1	下凸, 递增	下凸	下凸
2	下凸, 递减	上凸	下凸
3	上凸, 递增	上凸	上凸
4	上凸, 递减	下凸	下凸