一元微分学

导数与微分概念的解释

韩奇成

hqcorange@gmail.com

2024 年 2 月 12 日

连续性

函数微分的概念需要借助连续性思想来定义.

函数微分的概念需要借助连续性思想来定义.

定义 (连续性)

假设函数 f 在 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ 上有定义. f 在点 $x \in \mathcal{B}$ 连续, 是指

$$\lim_{\mathcal{B} \ni y \to x} f(y) = f(x).$$

连续性

函数微分的概念需要借助连续性思想来定义.

定义 (连续性)

假设函数 f 在 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ 上有定义. f 在点 $x \in \mathcal{B}$ 连续, 是指

$$\lim_{\mathcal{B} \ni y \to x} f(y) = f(x).$$

设 $y = x + h$, 则

$$f(x+h) - f(x) = \alpha(x, h),$$

等号右端是一个无穷小量.

导数和微分的定义

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = \alpha(x, h)}$$

导数和微分的定义

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=\alpha(x,h)}$$

考虑最简单的情形: $\alpha(x,h)=\overbrace{D_f(x)\cdot h}^{h\text{的线性函数}}+o(h).$

导数和微分的定义

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=\alpha(x,h)}$$

考虑最简单的情形: $\alpha(x,h)=\overbrace{D_f(x)\cdot h}^{h\text{的线性函数}}+o(h)$.

定义

当这一情形被满足时, 我们称 $D_f\cdot h$ 为 f 的微分, 而这个线性函数的系数 $D_f(x)$ 为 x 点的导数.

记号: $h=dx$ 而 $D_f(x)=f'(x)=\frac{df}{dx}$.

说明

例

对 $f(x) = x^n$, 根据上述定义计算微分和导数.

说明

例

对 $f(x) = x^n$, 根据上述定义计算微分和导数.

解.

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \underbrace{C_n^2 x^{n-2}h^2 + \cdots}_{o(h)}.$$

说明

例

对 $f(x) = x^n$, 根据上述定义计算微分和导数.

解.

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \underbrace{C_n^2 x^{n-2}h^2 + \cdots}_{o(h)}.$$

进而

$$(x+h)^n - x^n = \underbrace{nx^{n-1}h}_{h\text{的线性函数}} + o(h).$$

说明

例

对 $f(x) = x^n$, 根据上述定义计算微分和导数.

解.

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \underbrace{C_n^2 x^{n-2}h^2 + \cdots}_{o(h)}.$$

进而

$$(x+h)^n - x^n = \underbrace{nx^{n-1}h}_{h\text{的线性函数}} + o(h).$$

所以按定义, x^n 的微分是 $nx^{n-1}dx$ 而导数是 nx^{n-1}. □

说明

1. 在 x 处可微的函数, 在这一点必然是连续的.

说明

1. 在 x 处可微的函数, 在这一点必然是连续的.
   根据定义显然, 因为微分是在连续性的基础上定义的.

说明

1. 在 x 处可微的函数, 在这一点必然是连续的.
   根据定义显然, 因为微分是在连续性的基础上定义的.
2. 但连续的函数不一定可微. 事实上, 处处连续但处处不可微的函数是存在的 (参见 Weierstrass, van de Waerden 等).

说明

1. 在 x 处可微的函数, 在这一点必然是连续的.
   根据定义显然, 因为微分是在连续性的基础上定义的.
2. 但连续的函数不一定可微. 事实上, 处处连续但处处不可微的函数是存在的 (参见 Weierstrass, van de Waerden 等).

定理

$$\text{可微} \Rightarrow \text{连续} \not\Rightarrow \text{可微}.$$

批判这样的说法:

增量 Δx 变得很小后成为 dx. (错的!)

说明

批判这样的说法:

增量 Δx 变得很小后成为 dx. (错的!)

1. $h = \Delta x = dx = \cdots$, 没有什么大小的假设和区分;

批判这样的说法:

$$\text{增量 } \Delta x \text{ 变得很小后成为 } dx. \text{ (错的!)}$$

1. $h = \Delta x = dx = \cdots$, 没有什么大小的假设和区分;
2. 微分 $f'(x)dx$ 与 x 和 dx 都有关, 而 x 与 dx 之间没有什么直接的联系.

概念的几何学解释

概念的几何学解释

函数 f 的图是 $x-y$ 平面内的曲线. 考虑过两点 $R(x, f(x))$ 和 $S(x+h, f(x+h))$ 的割线, 它的方程是

函数 f 的图是 $x-y$ 平面内的曲线. 考虑过两点 $R(x,f(x))$ 和 $S(x+h,f(x+h))$ 的割线, 它的方程是

$$y=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}x+B,$$

其中 B 由 R 或 S 的坐标确定.

概念的几何学解释

$$斜率 = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

概念的几何学解释

$$\text{斜率} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

当 $h \to 0$, S 点将以任意程度靠近 R, 也就是割线过渡到 R 点上的切线. 所以切线的斜率为

$$\text{斜率} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

当 $h \to 0$, S 点将以任意程度靠近 R, 也就是割线过渡到 R 点上的切线. 所以切线的斜率为

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

概念的几何学解释

$$\text{斜率} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

当 $h \to 0$, S 点将以任意程度靠近 R, 也就是割线过渡到 R 点上的切线. 所以切线的斜率为

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

若 f 可微, 则

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x)h + o(h)}{h} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

概念的几何学解释

因此我们证明了，在一点的导数值就等于函数的图形在这点切线的斜率. 对切点 $(\xi, f(\xi))$ 我们可以写出切线的方程

概念的几何学解释

因此我们证明了，在一点的导数值就等于函数的图形在这点切线的斜率．对切点 $(\xi, f(\xi))$ 我们可以写出切线的方程

$$y = f'(\xi)x + B, \tag{1}$$

而 B 由点 $(\xi, f(\xi))$ 的坐标确定．

概念的几何学解释

因此我们证明了, 在一点的导数值就等于函数的图形在这点切线的斜率.
对切点 $(\xi, f(\xi))$ 我们可以写出切线的方程

$$y = f'(\xi)x + B, \tag{1}$$

而 B 由点 $(\xi, f(\xi))$ 的坐标确定.
根据解析几何学, 垂直于 (1) 的直线斜率为

概念的几何学解释

因此我们证明了，在一点的导数值就等于函数的图形在这点切线的斜率.
对切点 $(\xi, f(\xi))$ 我们可以写出切线的方程

$$y = f'(\xi)x + B, \tag{1}$$

而 B 由点 $(\xi, f(\xi))$ 的坐标确定.
根据解析几何学，垂直于 (1) 的直线斜率为

$$-\frac{1}{f'(\xi)},$$

因此我们可以同时写出法线的方程.

概念的几何学解释

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

常被作为导数的定义.

概念的几何学解释

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

常被作为导数的定义.

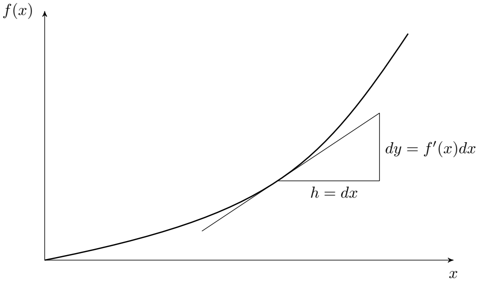

图: 可微函数

例

设 $f'(0)$ 存在, 求 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-3h)-f(0)}{2h}$.

例

设 $f'(0)$ 存在, 求 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-3h)-f(0)}{2h}$.

解.

$$\cdots = \lim_{h\to 0} -\frac{3}{2}\frac{f(0-3h)-f(0)}{-3h} = -\frac{3}{2}f'(0).$$

□

例

在什么条件下, 函数

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处 (1) 连续; (2) 可微?

解.

(1) 考虑到

$$0 \leq \left| x^n \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^n|$$

且当 $n > 0$ 时 $\lim_{x \to 0} |x^n| = 0$, 故所求的条件为 $n > 0$.

(2) 由

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^n \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{n-1} \sin \frac{1}{h},$$

由于 $\sin \frac{1}{h}$ 已经有界, 我们只需要保证 h^{n-1} 部分极限存在, 而这必须且只须 $n > 1$. 故 $n > 1$ 时 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0$. $\square$

例 (作业)

1. 由定义计算 $\exp x$, $\cos x$, $\ln x$ 的微分和导数.
2. 确定 a, b 使

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

在 $x = 1$ 处可微.