基本理论的新解释

关于交换域中方阵的标准形

韩奇成

hanqch21@lzu.edu.cn

2024 年 1 月 2 日

问题的提法

设 $\mathfrak{M} = (u_1, \cdots, u_n)$ 是交换域 $\mathbb{K}$ 上的一个模, 而

$$\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, \quad u_k \to v_k = \sum_i u_i \alpha_{ik}$$

是线性变换. 求新基

$$(u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n) P,$$

其中 P 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆方阵, 使方阵 $A = (\alpha_{ik})$ 具标准形

$$A' = P^{-1} A P.$$

基本定理和方法

- Abel 群基本定理.

定理

具有有限多个生成元的 *Abel* 群 $\mathfrak{G}$ 可被分解成一些循环群的直和，这些循环群的零化理想或是零理想，或是由 $\mathbb{K}$ 中的单个元素生成的.

基本定理和方法

- Abel 群基本定理.

定理

具有有限多个生成元的 *Abel* 群 $\mathfrak{G}$ 可被分解成一些循环群的直和，这些循环群的零化理想或是零理想，或是由 $\mathbb{K}$ 中的单个元素生成的.

- 环的表示.

定义

环 $\mathfrak{o}$ 在 $\mathbb{K}$ 上的一个表示是指同态

$$\mathfrak{o} \sim \mathfrak{D},$$

此处 $\mathfrak{D}$ 是 $\mathbb{K}$ 中一定阶数的方阵所组成的环. 借助这个同态, 对每个 $a \in \mathfrak{o}$, 有 $\mathbb{K}$ 中的一个方阵 A 与之对应.

记号

引入表示

$$x \to A,$$

并且对每个多项式 $f(x) = \sum \alpha_k x^k$, 使方阵 $f(A) = \sum \alpha_k A^k$ 与之对应. 借助于

$$\left(\sum \alpha_k x^k\right) u = \sum \alpha_k (A^k u), \quad u \in \mathfrak{M},$$

$\mathfrak{M}$ 成为一个 $\mathbb{K}[x]$-模.

第一标准形

$\mathfrak{M}$ 可以被分解成一些循环 $\mathbb{K}[x]$-模的直和

$$\mathfrak{M} = (w_1) + (w_2) + \cdots + (w_r),$$

这些模的零化理想是由 $\mathbb{K}[x]$ 中的一个多项式生成的.

第一标准形

$\mathfrak{M}$ 可以被分解成一些循环 $\mathbb{K}[x]$-模的直和

$$\mathfrak{M} = (w_1) + (w_2) + \cdots + (w_r),$$

这些模的零化理想是由 $\mathbb{K}[x]$ 中的一个多项式生成的.
对每个 w_k, 序列

$$w_k,\ xw_k,\ x^2 w_k,\ \cdots$$

中最多只可能有 n 个线性无关者, 进而存在一个零化多项式

$$f_k(x) = x^s + \alpha_{s-1}x^{s-1} + \cdots + \alpha_0$$

且

$$f_{k+1}(x) \equiv 0(f_k).$$

第一标准形

$\mathfrak{M}$ 可以被分解成一些循环 $\mathbb{K}[x]$-模的直和

$$\mathfrak{M} = (w_1) + (w_2) + \cdots + (w_r),$$

这些模的零化理想是由 $\mathbb{K}[x]$ 中的一个多项式生成的.
对每个 w_k, 序列

$$w_k,\ xw_k,\ x^2 w_k,\ \cdots$$

中最多只可能有 n 个线性无关者, 进而存在一个零化多项式

$$f_k(x) = x^s + \alpha_{s-1}x^{s-1} + \cdots + \alpha_0$$

且

$$f_{k+1}(x) \equiv 0(f_k).$$

此时

$$w_k,\ xw_k,\ \cdots,\ x^{s-1}w_k$$

在 $\mathbb{K}$ 上线性无关, 因而可以作为 (w_k) 的基.

第一标准形

$$
\begin{aligned}
Aw_k &= xw_k, \\
Axw_k &= x^2 w_k, \\
&\cdots\cdots, \\
Ax^{s-1}w_k = x^s w_k &= -\alpha_0 w_k - \alpha_1 x w_k - \cdots - \alpha_{s-1} x^{s-1} w_k.
\end{aligned}
$$

第一标准形

$$\begin{aligned} Aw_k &= xw_k, \\ Axw_k &= x^2 w_k, \\ &\cdots\cdots, \\ Ax^{s-1}w_k &= x^s w_k = -\alpha_0 w_k - \alpha_1 xw_k - \cdots - \alpha_{s-1}x^{s-1}w_k. \end{aligned}$$

从而线性变换在上述新基中由方阵

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix}$$

表示.

第一标准形

由上述, 我们有第一标准形

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

第三 (Jordan) 标准形

循环模 (w_k) 可以进一步分解成一些以素多项式的幂 $(p_k(x))^{\rho_k}$ 为零化多项式的循环群的直和. 尤其是 $\mathbb{K}$ 代数封闭时, $p(x)$ 可以是一次的:

$$p_k(x) = x - \lambda_k, \quad f_k(x) = (x - \lambda_k)^{\rho_k}.$$

循环模 (w_k) 可以进一步分解成一些以素多项式的幂 $(p_k(x))^{\rho_k}$ 为零化多项式的循环群的直和. 尤其是 $\mathbb{K}$ 代数封闭时, $p(x)$ 可以是一次的:

$$p_k(x) = x - \lambda_k, \quad f_k(x) = (x-\lambda_k)^{\rho_k}.$$

采用记号

$$\left.\begin{aligned} v_k^{(1)} &= (x-\lambda_k)^{\rho_k-1} w_k, \\ v_k^{(2)} &= (x-\lambda_k)^{\rho_k-2} w_k, \\ &\cdots\cdots, \\ v_k^{(\rho_k)} &= w_k, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x-\lambda_k) v_k^{(1)} = 0, \\ (x-\lambda_k) v_k^{(\mu)} = v_k^{(\mu-1)}, \quad 1 < \mu \leqslant \rho_k \end{cases}$$

第三 (Jordan) 标准形

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_k^{(1)} = xv_k^{(1)} = \lambda_k v_k^{(1)}, \\ Av_k^{(\mu)} = xv_k^{(\mu)} = \lambda_k v_k^{(\mu)} + v_k^{(\mu-1)}. \end{cases}$$

第三 (Jordan) 标准形

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_k^{(1)} = xv_k^{(1)} = \lambda_k v_k^{(1)}, \\ Av_k^{(\mu)} = xv_k^{(\mu)} = \lambda_k v_k^{(\mu)} + v_k^{(\mu-1)}. \end{cases}$$

于是, 块 A_k 还可以约化为

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_k^{(1)} = xv_k^{(1)} = \lambda_k v_k^{(1)}, \\ Av_k^{(\mu)} = xv_k^{(\mu)} = \lambda_k v_k^{(\mu)} + v_k^{(\mu-1)}. \end{cases}$$

于是, 块 A_k 还可以约化为

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

这里特征值 λ_k 和方块的阶数 ρ_k 是唯一确定的.

对应于同一 λ_k 的所有向量 $v_k^{(\mu)}$ 生成一个模 $\mathfrak{b}_k$, 这个模被 $x-\lambda_k$ 的一个幂所零化 (根子空间). 整个 $\mathfrak{M}$ 是这些子空间的直和. 被 $x-\lambda_k$ 本身所零化, 即

$$Ah = \lambda_k h$$

的向量 h 称为属于 λ_k 的特征向量.

Q&A Session