

# 自己組織化論理

進藤 啓介

SHINDO Keisuke

kshindo999@gmail.com

## 概要

自己組織化論理は、確率によって順序回路を自律修正、自動生成することを目指した論理回路動作シミュレータの理論体系である。このアプローチは双方向ベイジアンネットワークを用いて論理回路を形成する。通常の写像はこの双方向論理演算の逆伝搬を用いて記述され、これにより階層的な順序回路を記述することが可能になる。さらに、ネットワークの確率の伝搬を二項組の伝搬確率で表現する。逆方向伝搬確率はベイズの定理に基づいて定義する。この確率計算によってネットワークに対して厳密な確率論に基づいたフィードバックが可能になり、正確な論理演算の挿入を可能にする。さらに、このネットワークに対して仮定ベクトルと呼ぶ活性値を伝搬させる。この仮定ベクトルの要素比較でネットワークのノードを選択することにより、観測対象の規模に関係なく、最小限の新規の連想リンクを生成する。これらの要素を用いれば、実世界のデータ処理や予測モデルの構築において、迅速かつ効率的に論理回路を生成できると期待される。

Self-organizing logic is a theoretical system of a logical circuit operation simulator aimed at correcting and generating the order circuit by probability. This approach forms a logical circuit using a bidirectional Beigian network. The normal mapping is described using the reverse transport of this two-way logical operation, which allows a hierarchical sequential circuit to be described. Furthermore, the propagation of the network probability is expressed by the propagation probability of the bib. The opposite direction of propagation is defined based on the theorem of Bayes. This probability calculation enables feedback based on strict probability theory to the network, enabling accurate logical operation insertion. Furthermore, the activity value called the assumption vector is proposed to this network. By selecting a network node by comparing the element of this assumed vector, a minimal new associative link is generated regardless of the scale to be observed. It is expected that these elements can be generated quickly and efficiently in real world data processing and predictive model construction.

# Keywords

machine learning,bidirectional baysian network,sequential circuit

# Contents

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 1. 自己組織化論理の構成要素 .....      | 4  |
| 1.1 双方向論理演算                |    |
| 1.2 双方向二項確率ベイジアンネットワーク     |    |
| 1.3 仮定ベクトルと伝搬集合            |    |
| 1.4 確率変動分配階層フィードバックアルゴリズム  |    |
| 1.5 同時観測からの連想形成            |    |
| 1.6 確率的自律論理生成アルゴリズム        |    |
| 1.7 順序回路の自律生成の例            |    |
| 2. 双方向論理演算 .....           | 22 |
| 2.1 現実の時空間と写像に対する仮定        |    |
| 2.2 ノードとリンク                |    |
| 2.3 リンク伝搬と論理演算             |    |
| 2.4 リンクの縦分割と論理演算挿入         |    |
| 3. 写像 .....                | 27 |
| 3.1 写像の定義                  |    |
| 3.2 写像と双方向伝搬による階層的なマッチング   |    |
| 3.3 序列と時空間                 |    |
| 4. 活性値の双方向伝搬 .....         | 31 |
| 4.1 活性値の伝搬の流れ              |    |
| 4.2 仮定ベクトル                 |    |
| 4.3 活性値の確率伝播               |    |
| 4.4 確率の逆伝搬                 |    |
| 4.5 活性値の衝突                 |    |
| 5. 確率変動分配階層フィードバック .....   | 35 |
| 5.1 リンク上の二項組確率伝播           |    |
| 5.2 双方向伝搬と論理演算の確率計算        |    |
| 5.3 フィードバックの適用対象           |    |
| 5.4 作用係数 $E_n$ の算出         |    |
| 5.5 重み値 $w_n$ の式の導出        |    |
| 5.6 確率補正值 $\Delta P_n$ の算出 |    |
| 6. 連想 .....                | 43 |
| 6.1 連想対象選択                 |    |

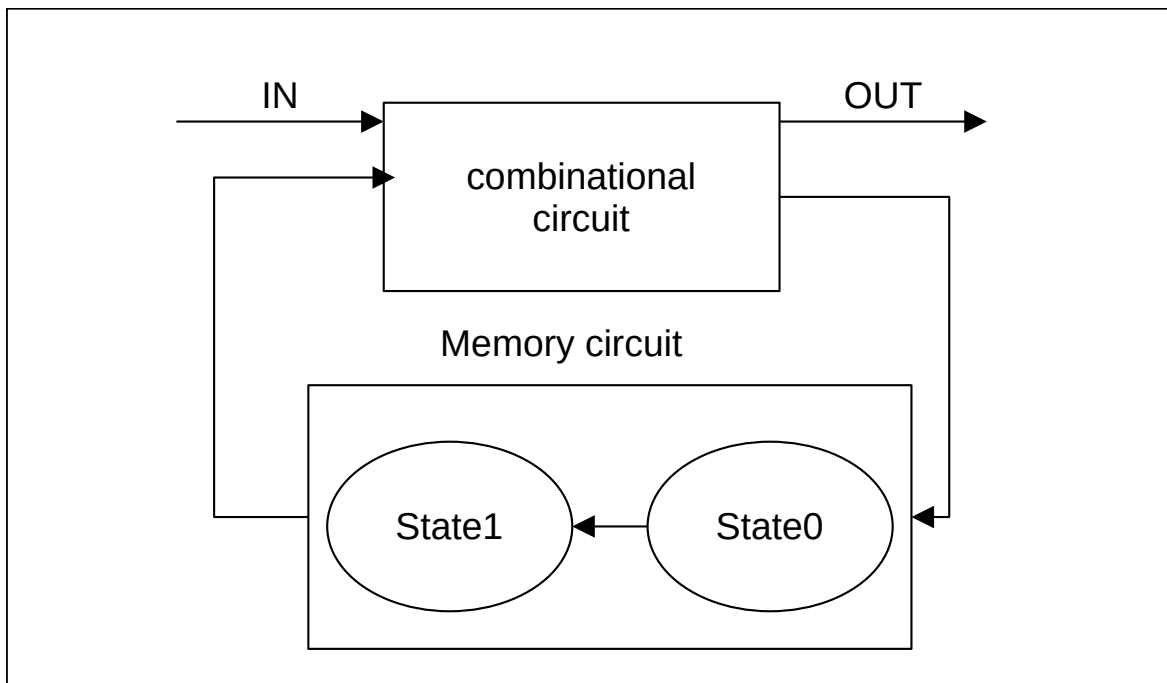
|     |                                      |    |
|-----|--------------------------------------|----|
| 6.2 | 連想形成と条件の付加                           |    |
| 6.3 | 伝搬確率、経験数の算出                          |    |
| 7.  | 確率的自律論理生成アルゴリズム                      | 47 |
| 7.1 | 「条件」リンク分割と論理演算ノード形成                  |    |
| 7.2 | 「因果」フィードバックからのリンクノード活性化と、連想対象化       |    |
| 7.3 | 「代入」伝搬集合的に包含関係にあるノード間の結合             |    |
| 7.4 | 「インスタンス化」伝搬部分集合によるネットワークの一部のインスタンス複製 |    |
| 7.5 | 「一般化」伝搬部分集合によるネットワークの一部の一般化複製        |    |
| 7.6 | 「選択」多数のリンク伝搬の選択制御                    |    |
| 7.7 | 「収斂」リンクの最適化                          |    |
| 7.8 | 「統合」同一論理の論理式ノードの統合                   |    |
| 8.  | 順序回路生成                               | 54 |
| 8.1 | 観測関数                                 |    |
| 8.2 | 時系列ステート生成                            |    |
| 8.3 | 一般化ノードから関数生成                         |    |
| 8.4 | 関数適用                                 |    |
| 8.5 | 関数のグループ化                             |    |
| 8.6 | 組み込み関数とその利用                          |    |
| 9.  | 結論                                   | 59 |

# 1.自己組織化論理の構成要素

## 1.1 双方向論理演算

### 1.1.1 古典的な順序回路

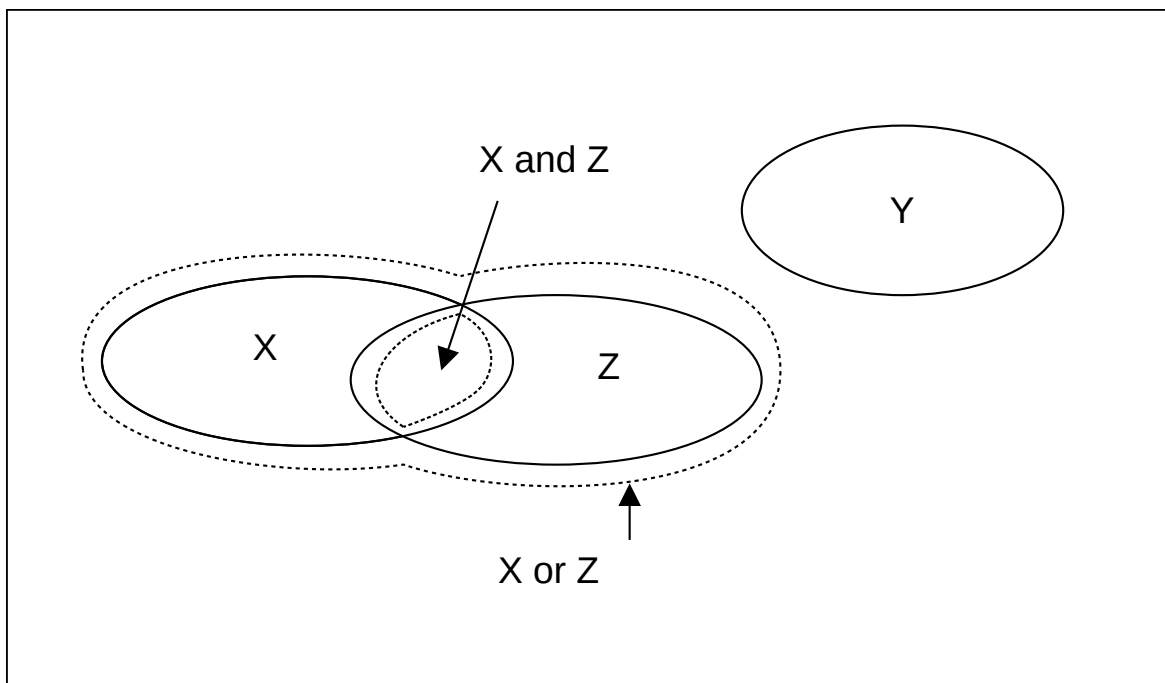
通常の論理代数では、AND、OR、NOTの論理演算の要素をノードとして持ち、それらをリンクで結合して、基本的な論理動作を行う。順序回路では、これにフリップフロップFF、あるいはメモリなどの記憶機能が追加される。CPU、GPUなどはすべてこの順序回路に該当する。この順序回路は任意の入力列に対して理論上あらゆる出力列を得ることができる。



順序回路

### 1.1.2 論理回路の逆伝搬による写像

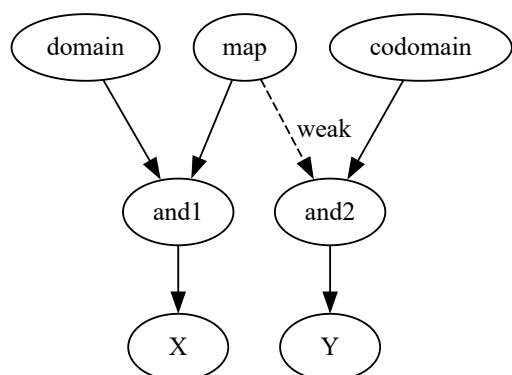
論理演算は、ベン図などで表現されるように集合を互いに切り貼りする作用があるが、下の図のXとYのように重複のない排他的な部分集合間では論理演算が出来ない。それに対して、写像は、入力された集合に対して排他的な別の集合に到達することを可能にする。そのためには、写像の前後の集合を、それらを包含するさらに大きな集合であるMapノードの部分集合とみなす。入力ノードXと出力ノードYとは、Mapノードに対してそれぞれdomain,codomainノードとANDを取る結果と等しくなる。

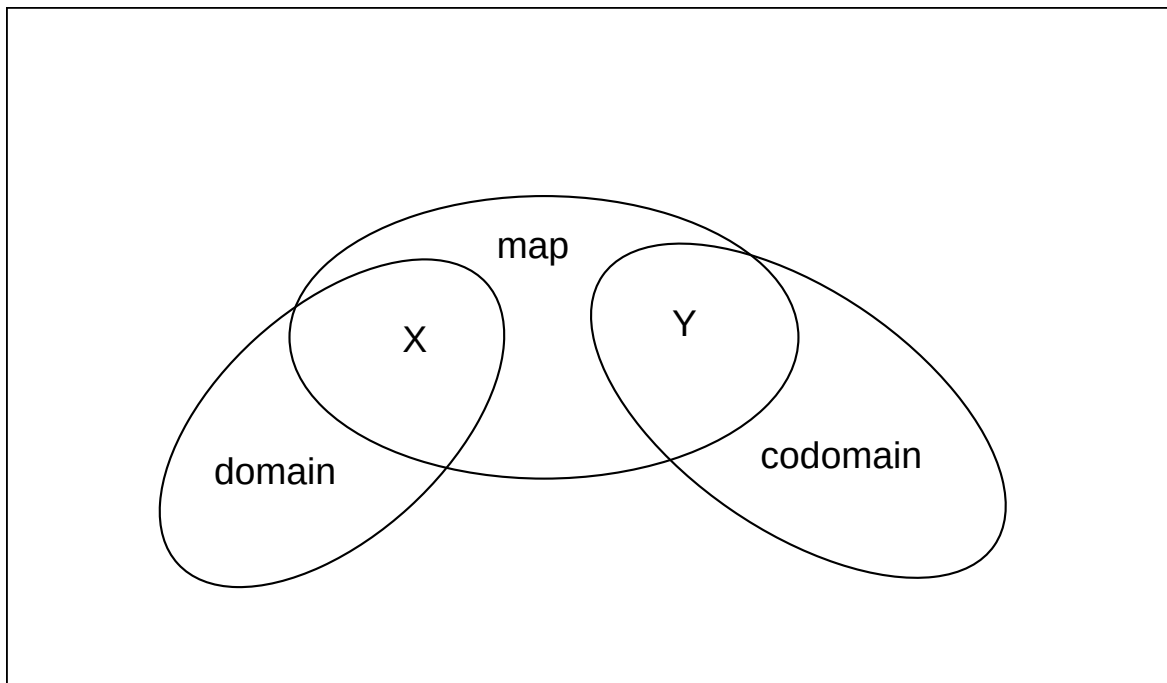


基本的なベン図

写像元Xから写像先Yへの伝搬は、Mapノードへの逆伝搬で実現する。排他的なノードの間の確率伝搬を定義するために、AND1からMapへの逆伝搬では、domainの補集合の部分を補うことで集合を拡大する。Mapノードで拡大された集合はcodomainと集合的に排他的ではなくなるため、codomainとのAND論理演算が可能になる。こうして集合的に重複のないXからYへの伝搬を可能にする。XORではなくてANDである理由は、入力ノードXの内部の全領域がMap内部に包含されるためである。

この写像ノードと逆伝搬を用いた連想リンクによって、状態遷移の記述を可能にする。さらに、この作用がフリップフロップやメモリなどの記憶素子と同じ挙動を、より一般化して実現する。例えば、メモリの読み出しは、時空間が異なる集合からの写像と見なすことができる。

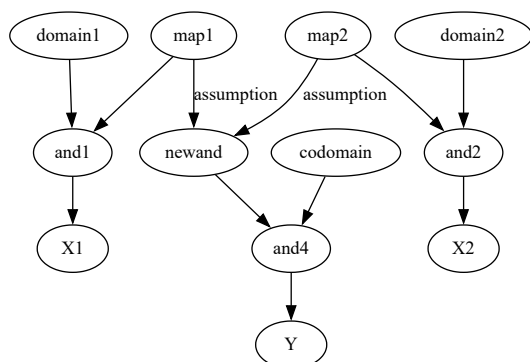
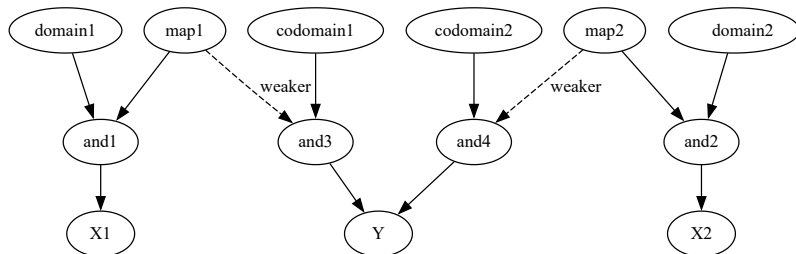




逆伝搬による写像の実現

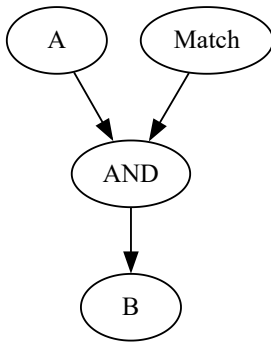
### 1.1.3 写像の不確定リンクへの論理演算の挿入

写像map1の写像先Yへのリンクは、観測条件によっては伝搬確率が確定していないことがある。この不確定なweakリンクが確定して確実にYに伝搬される条件を見出すために、別の写像map2との論理演算newandを暫定的に形成する。newandは論理演算のANDだけではなくて他にもOR,XORなど様々な種類の論理演算が考えられるが、weakリンクの伝搬確率と伝搬集合によって確定的に論理演算の種類が選択できる。



フィードバックと論理演算ノードの生成

## 1.1.4 フィードバックと不確定入力への逆伝搬



逆伝搬による因果関係の表現

論理演算はORへの1伝搬のようにすべての入力が入力が確定である必要はない。だが、上の例のANDへの1入力は、別の入力がないと確定値にならない。AND入力の1つが不確定なままで伝搬した結果、別の値との衝突によってフィードバックが発生し、入力が1に確定すれば整合性が取れるという結果が出ることもある。その際にANDからMatchへの値の逆伝搬が発生する。

## 1.2 双方向二項確率ベイジアンネットワーク

### 1.2.1 確率伝搬

論理ノード間の接続リンクに、それぞれ伝搬確率を与える。伝搬する論理値は1,0の二値であり、伝搬確率を0から1までの値で示す。

リンクは2つの伝搬確率  $P^{f11}, P^{f00}$  のペアで構成され、さらに逆方向の伝播確率のペア  $P^{r11}, P^{r00}$  も規定する。

AからBへの伝搬リンクにおいて、A、Bそれぞれの確率値 $P(A), P(B)$ は、2つの伝搬確率  $P^{f11}, P^{f00}$  によって関連付けられる。

$$P(B) = P(A)P^{f11} + (1 - P(A))(1 - P^{f00})$$

値の反転であるNOT演算は、 $P^{f11}, P^{f00}$  がそれぞれ0になる。NOTでない伝搬は、 $P^{f11}, P^{f00}$  がそれぞれ1になる。論理演算も確率計算として定義され、複数の論理演算の入力確率  $P_1^{f11}, P_2^{f11}, P_3^{f11}$  を統合する。以下はANDの例である。

$$P' = P_1^{f11} P_2^{f11} P_3^{f11} \dots$$

これらの自明な確率計算を組み合わせることにより、任意の2つのノード間の論理演算の経路において、経路全体の伝搬確率が求まる。厳密な確率そのものを伝搬することで、しきい値関数などを一切使用しないという点が、ニューラルネットワークと異なる。



## 1.2.2 逆方向伝搬

リンクの逆方向伝搬の確率について説明する。たとえば、以下のようなANDノードCが生成されたとする。

$$C = A \cap B$$

逆に、ノードCが確率 1 に活性化された場合は、ノードA,Bの伝搬確率 1 での活性化が可能になる。これが逆方向伝搬である。

$$C \rightarrow B$$

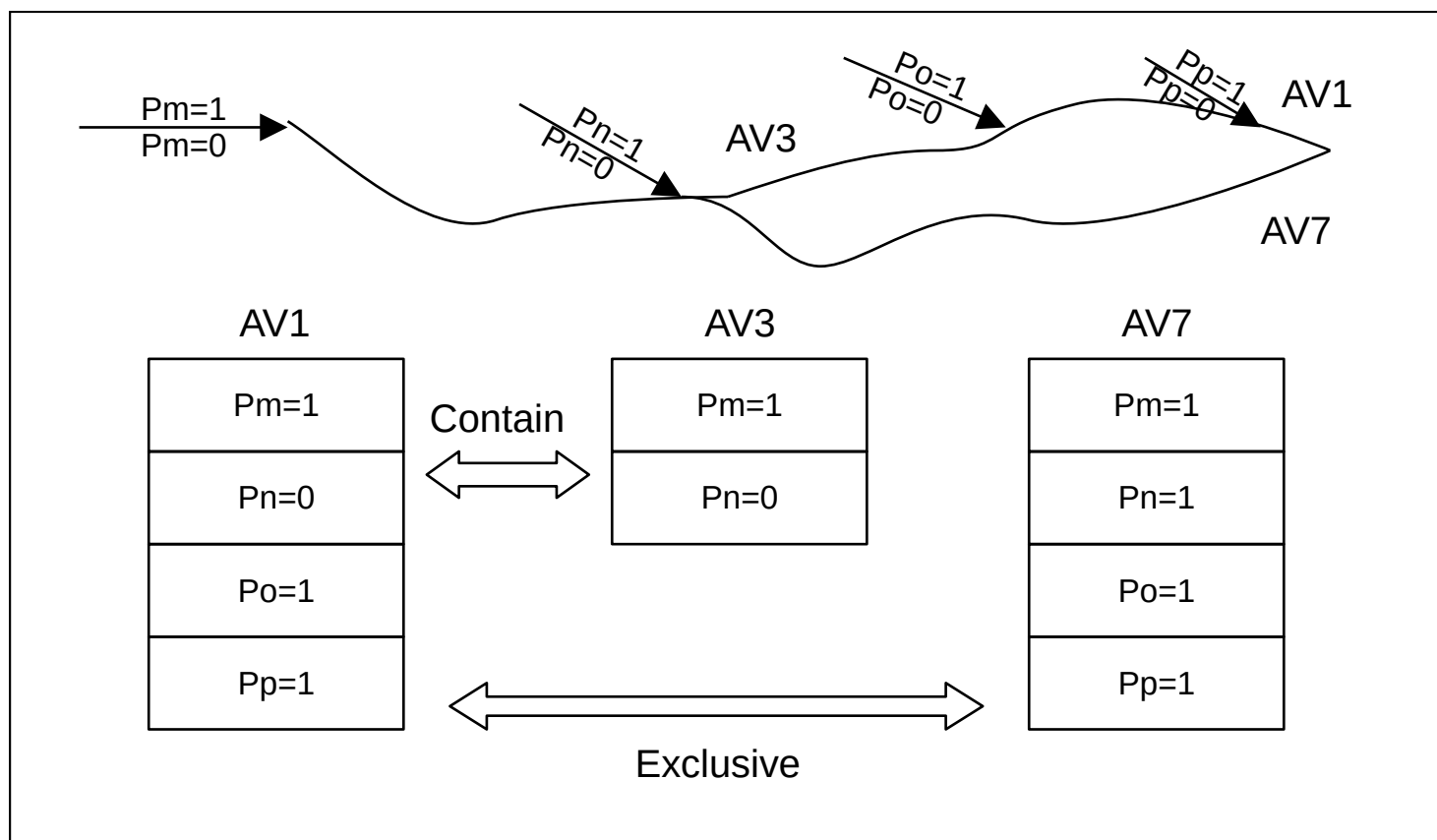
逆方向伝搬により、2つの任意のノード間の伝搬が確実に可能になる。逆方向伝搬の確率  $P_r^{11}$ ,  $P_r^{00}$  は、ベイズの定理を用いて算出される。P(A)をリンク元A、P(B)をリンク先Bの観測確率として、以下の式で求められる。

$$P_r^{11} = \frac{P(A)P^{11}}{P(B)}$$
$$P_r^{00} = \frac{(1 - P(A))P^{00}}{1 - P(B)}$$

つまり、双方向確率伝搬は、ベイズの定理が自然な形で組み込まれている。論理演算に対する逆方向伝搬は、ANDノードへの値 1 の逆伝搬のように値がすべて確定する場合はすべての入力リンクに対して伝搬する。ANDノードへの値 0 の逆伝搬は入力リンクの伝搬確率が確定しないが、伝搬する入力リンクを 1 つだけ選択すれば、選択したリンクだけは確率が確定する。

## 1.3 仮定ベクトルと伝搬集合

SOLは、ネットワーク上に活性値を伝搬するが、活性値は伝搬するリンクの断面のすべてを集合として占めるわけではなく、起点となる複数のノードの値によって集合が分断されると考える。この伝搬集合はネットワーク上で通過する集合とは無関係であり、起点ノードの値の組み合わせによって決定される。そのため、複数の起点ノードの値の仮定の組み合わせを「仮定ベクトル」と呼ぶことにする。以下、仮定ベクトル(Assumption Vector)は必要に応じて略して「AV」と表記する。



仮定ベクトル

### 1.3.1 仮定ベクトルの合成

複数の仮定ベクトルは、論理演算によって合成された結果、双方の仮定ベクトル要素が合成された仮定ベクトルとなる。

- 仮定ベクトル間で異なる仮定ベクトル要素はそのまま合成される。
- 仮定ベクトル間で同一の仮定ベクトル要素は1つに集約される。
- 集合的に包含関係の仮定ベクトル要素との合成は伝搬集合的に小さい要素に取って代わる。
- 集合的に排他的な仮定ベクトル要素との合成は伝搬集合自体が空集合になる。

### 1.3.2 仮定ベクトルによる伝搬集合比較

この仮定ベクトルを用いて、複数の活性値の伝搬集合としての大きさを比較することが可能になる。この比較は、写像を通過した伝搬集合としての比較であり、実際の集合とは無関係である。

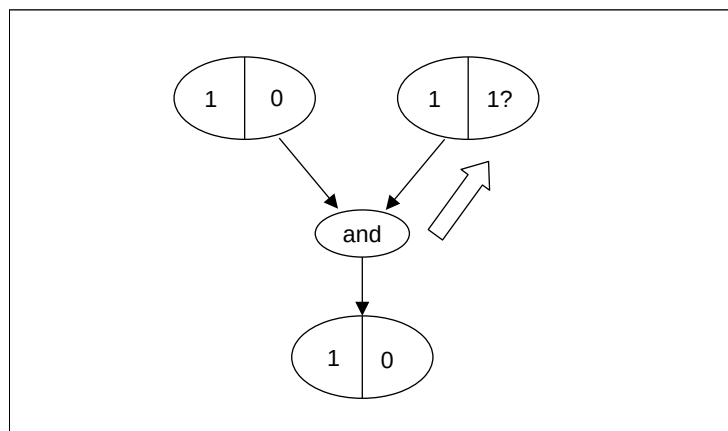
- 仮定ベクトルの仮定集合要素がすべて同一であれば、実際の集合にかかわらず双方の伝搬集合は同一である。
- 仮定ベクトルの仮定集合要素の非同一部分が片方のみであれば、双方の伝搬集合は包含関係になる。

- 仮定ベクトルの仮定集合要素の非同一部分が双方にあれば、双方の伝搬集合は無関係になるので連想の対象にならない。
- 仮定ベクトルの仮定集合要素の間に一切重複がなければ、伝搬集合が消滅するので伝搬そのものを停止する。

仮定ベクトルを利用した厳密な伝搬集合の管理により、2つのノード間の正確な連想リンクを形成できる。SOLのリンク形成は、すべてこの仮定ベクトルに従って選択実行される。

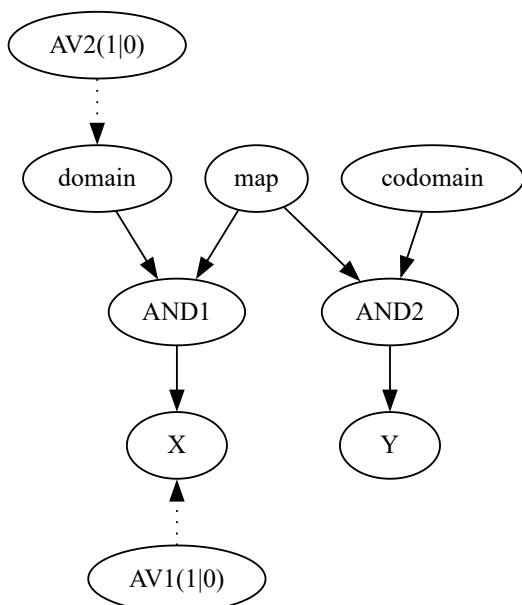
### 1.3.3 写像逆伝搬と伝搬集合拡大

Bool値などを示すノードX,Yについて、ノードXからノードMapへと逆伝搬する際に、集合を拡大する作用によって排他的なノードYへと伝搬する方法について述べる。



逆伝搬

上の図のように、ANDに対して出力から入力へと逆伝搬することは、他の入力すべてが確定していたとしても、逆伝搬の結果の確率は確定しない。右の入力は0も1のどちらでも矛盾はない。



## 仮定ベクトルを用いた写像リンク伝搬

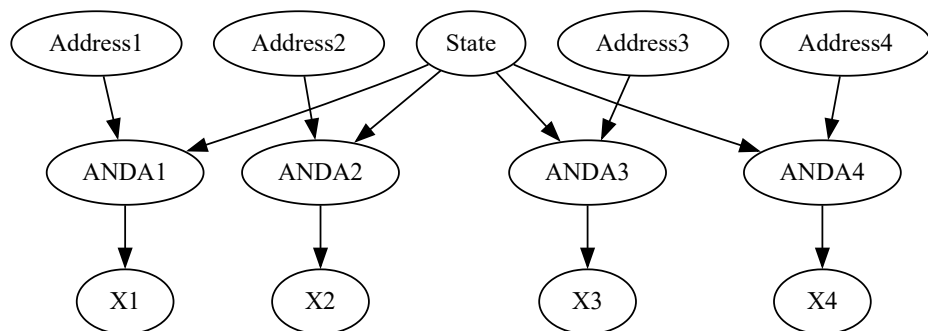
XからMapへの逆伝搬を行う。AND1からMapへの逆伝搬の際に、集合domainの入力が別にある場合は、domainの補集合の拡大を行うことができる。Xから伝搬されるAV1も、domainから伝搬されるAV2も、値が相補的な2つの伝搬集合のペアであるとする。この場合、Xの伝搬集合がdomainの伝搬集合に一致するか完全に含まれる場合に、Xからの集合を拡大してMapに伝搬する。伝搬集合が拡大するとは、domainの相補的な仮定ベクトルAVの要素を合成して伝搬集合を拡大することであり、仮定ベクトルAVの要素が1つ減るということでもある。

仮定ベクトルの合成結果は伝搬集合が拡大されるので、確率は均一に1であるという可能性が高い。その理由は、Mapで合成された伝搬集合は、AV1に仮定要素を追加する前の伝搬集合と同一である可能性が高いため、その確率もまた仮定要素を追加する前の伝搬集合と同じく均一の値であると推定されるためである。

こうして、伝搬集合が拡大された状態でMapからAND2に伝搬され、codomainとANDを取る。この結果Yへと拡大された伝搬集合が伝搬される。ここで、mapノードからAND2ノードへのリンクは弱く確定していない状態であるが、それは上の集合の拡大の推定がまだ確定していないということでもある。逆に、弱いリンクがポジティブフィードバックによって強化されるということは、集合の拡大の確率も同時に確定に近づくということでもある。

### 1.3.4 一般的な状態の表現

写像を用いれば、巨大な状態を以下のように表現することができる。部分状態X1,X2などはさらなる状態を階層的に接続できる。それぞれの状態をAddress等で分割して示すだけではなく、連続的な時系列や座標を使用することも可能で、さらに抽象的なノードを別の写像で連結することも可能になる。



写像リンクによる多変数ステート

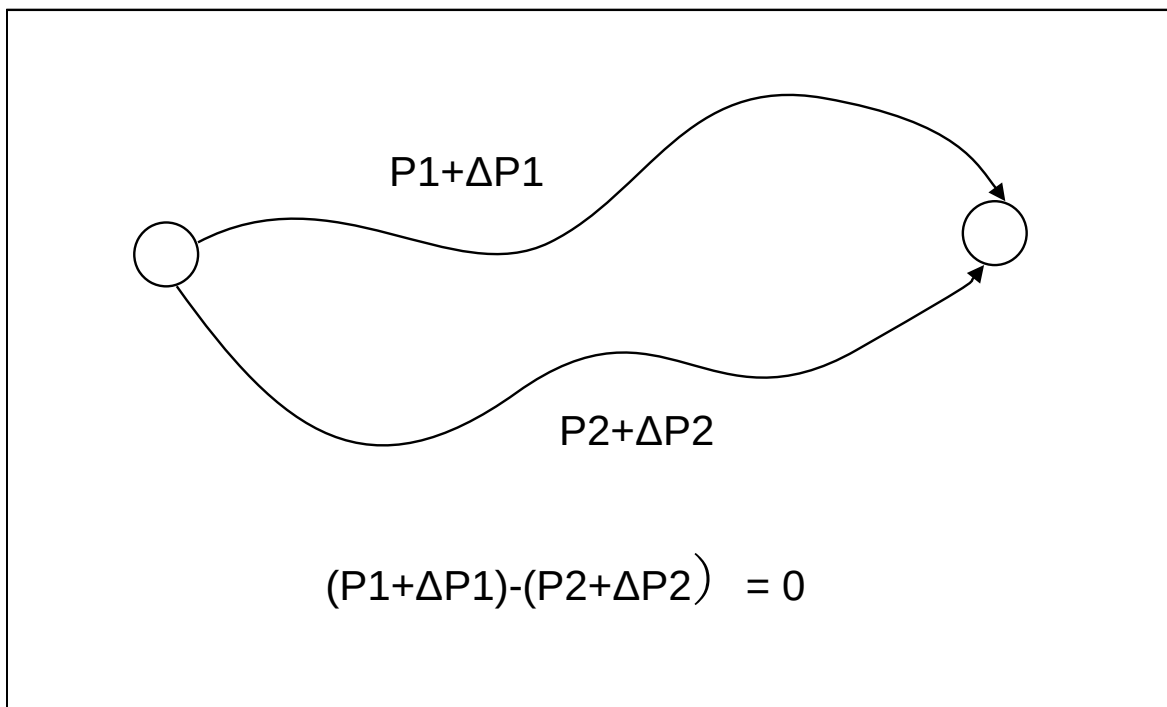
## 1.4 確率変動分配階層フィードバックアルゴリズム

SOLのネットワークを通過する伝搬確率と、外部観測関数で観測されたパスの伝搬確率との違いを解消して、観測された確率を再現すること。これがSOLにおける一般化された学習と考える。現存する通常のニューラルネットワークの学習と目的はほぼ同一だが、活性化関数のようなヒューリスティクスを用いずに、より厳密な方法で実現する。

### 1.4.1 確率伝搬と衝突とフィードバック

任意の共通の起点ノードから、ネットワークの複数のパスを通過して、もう一度別の同一のノードに到達することがある。例えば、過去に観測された結果のノードと、現在観測されている結果のノードとの衝突が典型例となる。

2つの経路それぞれの起点となる仮定ベクトルの集合に重複があれば衝突とみなす。衝突した双方の経路の伝搬確率が異なればフィードバックを行う。フィードバックの量を正確に計算するために、この確率変動分配階層フィードバックで確率計算を行い、フィードバックすべきリンクとその量を特定する。リンクからのフィードバックからの作用は後述する。



2つのパスの間の伝搬確率の差分

### 1.4.2 フィードバック値の算出

2つのパス全体の伝搬確率が観測されたときに、2つのパスの伝搬確率の違いが発生する。この違いを解消するために、それぞれのパスにフィードバックを行う。ここで問題になるのは、階

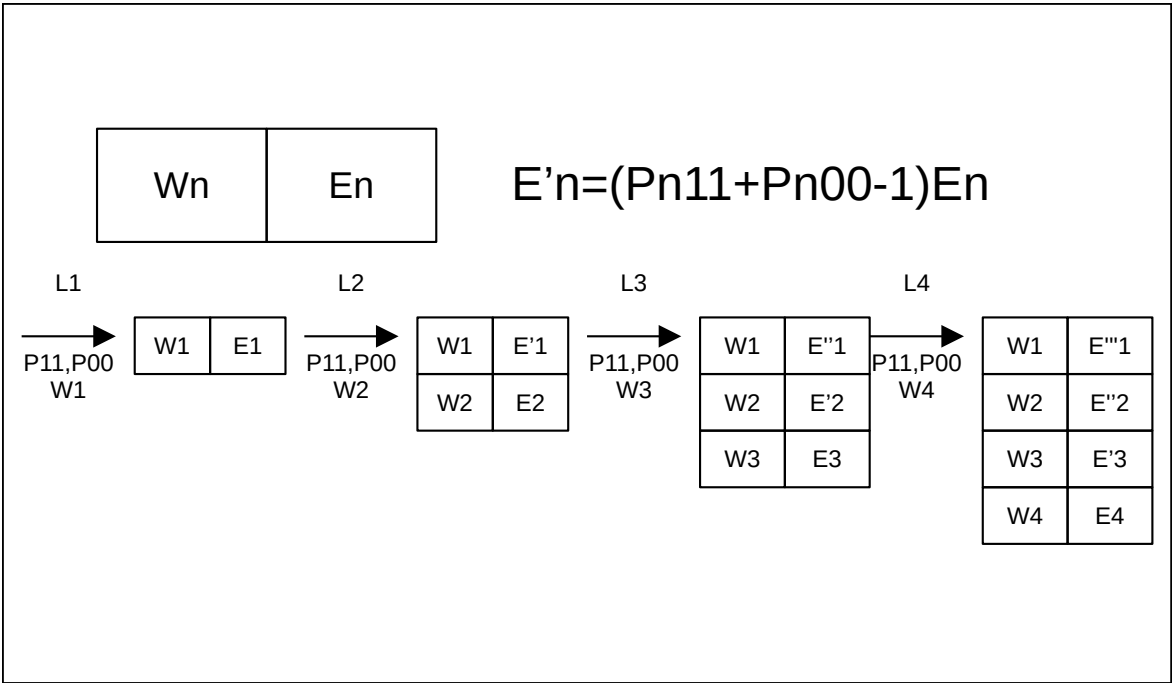
層的なリンクでは、どのリンクにどの程度のフィードバックを作用させるかの判定が難しいという点である。この問題を、「確率変動分配階層フィードバック」アルゴリズムでは、より正確な手法で解決した。この手法は、理論上無制限の階層のリンクそれぞれに対して、確率論的に最適に近いフィードバックを、少ない計算オーダーで適切に与えることが可能になる。

基本的なコンセプトは、確率の変動の発生確率が、リンクの伝搬確率 $P_n$ と観測回数 $N_n$ に依存するところからスタートする。このリンクを複数通過した結果、全体伝搬確率 $P_{total}$ が観測されたとする。その全体伝搬確率の結果との相違が発生したら、その相違は、以下のようにそれぞれのリンクに対して、リンクごとのウェイト $w_n$ に応じて分配されてフィードバックされる。リンクごとのウェイト $w_n$ は以下の式で算出する（かなり厳密な導出に基づくがここでは省略する）。 $P_n$ はこれまで観測されたリンクの伝搬確率であり、 $N_n$ はこれまでフィードバックが適用された回数を示す。 $E_n$ は、各リンクの確率の変動が全体伝搬確率に作用するための作用係数であり、全体の伝搬によって算出される。

$$w_n = \frac{P_n(1 - P_n)}{N_n}$$

$$P'_n = P_n + w_n \frac{\Delta P_{total}}{\sum_n E_n w_n}$$

上記の $W_n$ と $E_n$ とを用いて伝搬全体の確率を計算する。 $E_n$ に対してはリンクの伝搬に従って個別のリンクの確率を適用して伝搬する。



重み値の伝搬

伝搬が終了したら、それぞれのリンクの伝搬確率を可能な限り0か1に近づけるように、かつ変動値の符号の整合性が取れるように、全体の観測確率の変動を $W_n$ ,  $E_n$ に従って分配する。

フィードバックで補正された伝搬確率は、そのままではリンクの次の伝搬確率にはならない。リンクのそれまでのフィードバック観測回数 $N_n$ が大きければ、それだけリンク伝搬確率のフィードバックの量が小さくなる。 $N_n$ はリンクの作用係数 $E_n$ を用いて加算されて $N'_n$ となる。

$$N'_n = N_n + E_n$$

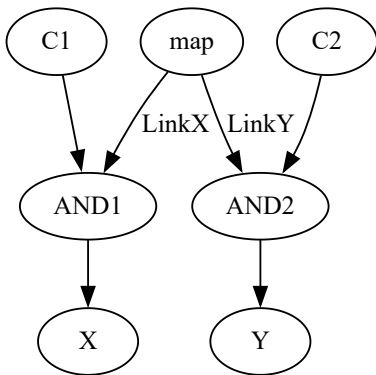
$$P'_n = \frac{N_n P_n + E_n P'_n}{N'_n}$$

この確率変動分配階層フィードバックは、ニューラルネットワークのバックプロパゲーションと比較しても、深い階層のネットワークに対して、フィードバックをより正確に作用させることが可能になる。理由は、厳密な確率論の適用を行っているためである。

## 1.5 同時観測からの連想形成

同時観測は、集合的に重複のないノード間の連想を定義するための基本的な方法となる。あるノードの部分集合が、別のノードの部分集合と同時に値が確定したときに、それらを写像で連想するのが基本になる。同時というのは仮定ベクトルが一致あるいは包含関係になっているという意味である。だがそれだけでは、無関係な事象が偶然一致したという可能性がある。そのために、フィードバックを用いて連想の成立確率を上げていく。

そのため、2つの値の発生確率 $P$ がある程度低く、かつ2つの値が同時に確定したという観測事実から写像連想を形成する。典型的にはノード $X$ とノード $Y$ との同時変動から連想を形成する。



同時観測から連想形成

連想の不確定性は、MapからAND1、あるいはMapからAND2へのリンクの確率 $P^{11}$ と $P^{00}$ とで示される。リンクの $N^{11}$ ,  $N^{00}$ はそのリンクへのフィードバックの回数を示す。

$X$ 、 $Y$ のそれぞれの過去の観測確率を $P_X$ ,  $P_Y$ とする。 $X = 1$ のとき常に $Y = 1$ である場合は、LinkYのパラメータの具体的な初期値は以下の式で決定される。特に $P_Y$ が十分に小さい場合は強度が増す。

$$P_y^{11} = 1$$

$$P_y^{00} = 0.5$$

$$N_y^{11} = -\log_2 P_Y$$

$$N_y^{00} = 0$$

$X = 0$ のとき常に $Y = 0$ である場合は、以下の式でパラメータが決定される。

$$P_y^{11} = 0.5$$

$$P_y^{00} = 1$$

$$N_y^{11} = 0$$

$$N_y^{00} = -\log_2(1 - P_Y)$$

LinkXも同様に定義される。それ以外のリンクは確定値を持つとみなす。確定値のリンクはフィードバックの対象とならない。

$$P^{11} = 1$$

$$P^{00} = 1$$

$$N^{11} = \infty$$

$$N^{00} = \infty$$

連想形成後は、 $X = 1$ から $Y = 1$ への伝搬と、 $X = 0$ から $Y = 0$ への伝搬の、双方の伝搬確率をそれぞれ観測することでフィードバックを行う。この結果、連想リンクの $N_y^{11}$ と $N_y^{00}$ がさらに加算されていき、 $P_y^{11}$ 側と $P_y^{00}$ 側の双方の確率が確定していく。

連想を形成する対象X、Yは、観測結果のノードだけではなく、フィードバックの結果である条件ノードや因果関係を示すリンクノードなども対象にできる。こうして、あらゆる部分集合の間で確率に基づいて連想を形成することができる。

## 1.6 確率的自律論理生成アルゴリズム

SOLは、「確率的自律論理生成アルゴリズム」を利用する。このアルゴリズムは、ノードとリンクとを自律的に生成、修正する。



ノードとリンクの考えられるあらゆる構成に対して、それを自律的に生成するためには、基本的には以下の機能で可能と考えられる。

### 1.6.1 「条件」ネガティブフィードバックからのリンク分割とAND、OR論理演算ノード形成

フィードバックの結果、リンクの確率が1から0.5、あるいは0から0.5に近づいた場合は、リンクがネガティブフィードバックされたと考える。つまり、現在の前提ベクトルを条件として、リンクの不確定な確率部分を論理演算を用いて分離する。

リンクの伝搬確率を $P^{11}, P^{00}$ の二項組で管理することで、ネガティブフィードバックが発生した伝搬確率の方向から、挿入すべきANDノード、ORノードを確定的に選択できる。 $P^{11}$ が1から0.5に近づいた場合はANDノード、 $P^{00}$ が1から0.5に近づいた場合はORノードである。XORノードは $P^{11}, P^{00}$ 双方が0.5に近づいた時に選択されるが、 $P^{11}, P^{00}$ 双方に対して同一の条件でフィードバックされた場合に限定される。挿入された論理演算に追加される条件リンクは、前提テンソルが等しいノードから選択される。

これが、SOLにおける論理演算の自律生成の基本であり、正確な論理演算の形成が可能になる。

### 1.6.2 「因果」フィードバックからの因果関係を示すリンクノードの入力を逆活性化

あるランダムリンクを通過した2つの活性化パスの確率が一致する場合は、ランダムなリンクがポジティブフィードバックされる。その結果、そのランダムリンクに相当する「リンクノード」がポジティブフィードバックによって活性化されると見なす。

リンクノードの具体的な実体は、ランダムリンクに仮想的に追加挿入された論理演算ノードに入力される、未知の入力ノードである。例を挙げると以下ようになる。 $\cap$ は論理演算のANDと等価である。

$$B=A \cap L$$

リンクノードへの逆伝搬は、リンク両端の伝搬確率 $P_A, P_B$ の一致結果を伝搬する。具体的には伝搬確率 $P_L$ は以下の式となる。

$$P_L = \frac{P_B}{P_A}$$

リンク前後で、確率1と0との双方の値が一致する場合は、特別に以下のリンクノードが生成される。

$$B = A \text{ xor } \neg L$$

XORの場合のリンクノードへの逆伝搬は以下の式となる。

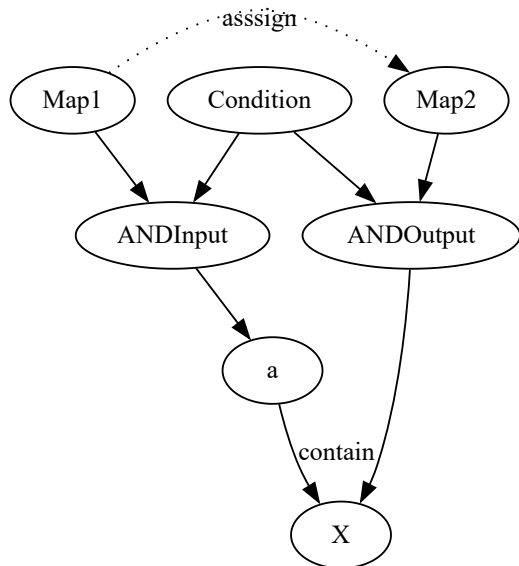
$$P_L = \frac{P_A + P_B - 1}{2P_A - 1}$$

これは、異なる2つの集合間の因果関係の結果そのものを、確率計算の対象とするための基本的な方法になる。 $P_A, P_B$ の確率が中間値であっても、0.5以外で一致すれば確定確率1になる。

因果関係は、たとえば数値等の一致判定からの条件判断制御に応用できる。

### 1.6.3 「代入」 複数の写像を通過する際の集合的に等価なノード間の結合

順方向の論理演算によって伝搬を行うことで、ANDORなどの条件が追加されることで集合的には小さくなっていく。論理演算の逆方向に伝搬することで、条件が除去されて条件適用前の集合をそのまま伝搬することが可能になる。この結果、条件の追加と除去を通過した写像ノードの間に包含関係が成立することがある。この整合性のとれた写像ノード間の伝搬を代入と呼ぶ。以下の例では値aは変数Xに含まれるので ( $a \subset X$ )、値aを含むMap1は変数Xを含むMap2の部分集合となり、Map1がMap2に代入される。



写像間の代入

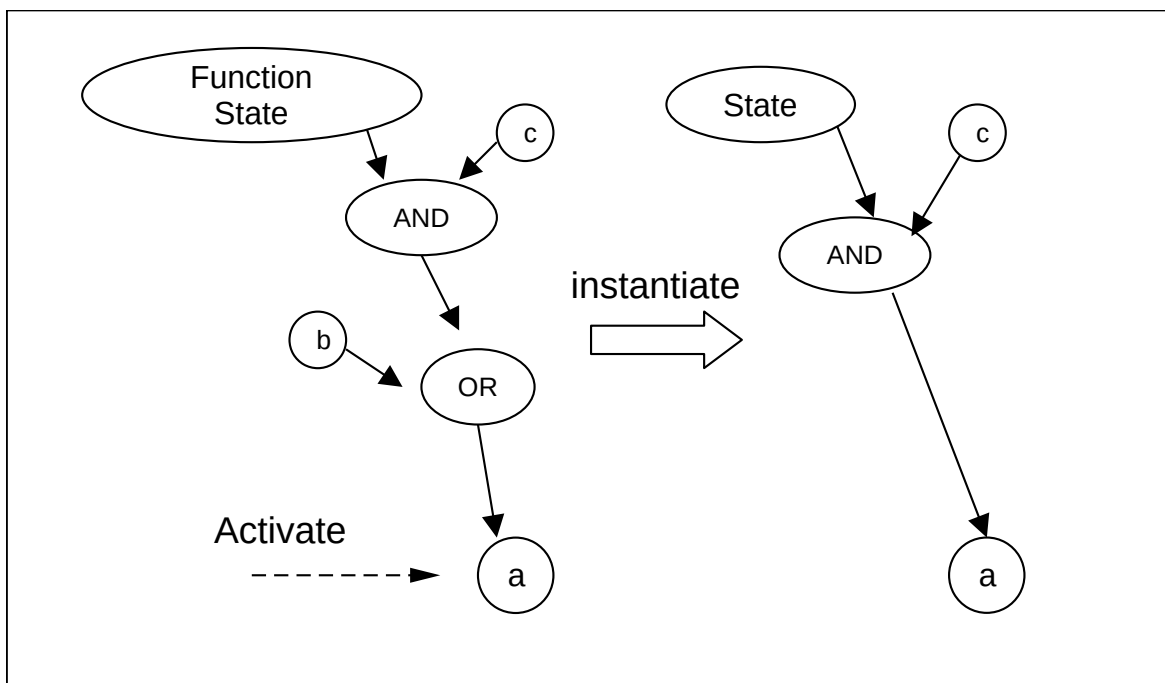
### 1.6.4 「インスタンス化」 ネットワークのインスタンス部分複製

2つの経路を通過した結果、ノードの集合の拡大が可能になることがある。この場合、リンクの経路に複数の出力リンクや論理演算入力リンクなどの分岐が存在する場合、経路のネットワー

クを部分的に複製して一種のインスタンスとする。インスタンスは不要なリンクの分岐が省略される。

下の図で例を示す。FunctionStateは右側のStateを部分集合として事前に代入している。代入されたStateから関数を通して、値aを示す活性値に関数実行結果として伝搬が行われる。この伝搬集合はStateとの重複はないがStateの伝搬集合を矛盾なく拡大することが可能になる。このため、Stateは関数の結果として結果へのネットワークの複製として追加する。

この「インスタンス化」には、ネットワークの構造の中からさらに確率が確定した部分を抽出することができると同時に、伝搬の分岐を減らすことで伝搬の探索分岐を減らす作用がある。この「インスタンス化」は、関数の結果生成にも用いられる。



ネットワークのインスタンス部分複製

## 1.6.5 「制御」リンク選択ノードによるリンク伝搬選択制御

あるノードに対して、結合される出力リンクは大量に存在しうる。リンクの探索を効率化するため、条件に対して、大量のリンクからのリンク選択を行う必要がある。この選択作用をSOL自身で決定、効率化することが必須となる。

リンク選択を制御するということは、選択したリンクに対応するリンク選択ノードを生成して、連想、活性値伝搬対象にする。その結果、選択先の活性値から得られた効用等と、リンク選択ノードとの連想を行うことができる。逆に、効用からリンク選択ノードが活性化され、効用に対応したリンクが選択されることになる。

リンク選択ノードの選択制御は、リンクに条件論理演算を追加して制御する方法とは異なり、リンクの伝搬確率を維持することができる。選択されていない状態でもリンクの伝搬自体はとく

に阻害されないので伝搬自体は可能ではあるが、伝搬対象として選択される可能性は低い。

## 1.6.6 確率的自律論理生成

以上が確率的自律論理生成アルゴリズムの基本構成要素となる。AND、OR、XOR、NOT、写像リンク、リンク制御は、以上の手段を用いて自動生成できる。確率変動や集合に対して、伝搬確率が100%か0%に近い確定確率リンクを可能な限り選択する。

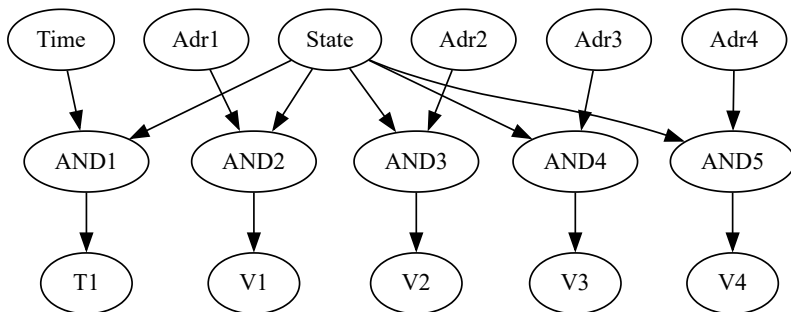
観測数が多く、かつ不確定な伝搬確率のリンクは、別の条件を順次追加して可能な限り確定確率リンクに置き換えていく。

つまり、この確率的自律論理生成アルゴリズムは、アナログ値の重みを用いるニューラルネットワーク等と異なり、観測対象を可能な限りデジタル化して再現を試みるアルゴリズムである。確定的なデジタル論理が生成されるので、論理式の形で学習結果の出力が可能になる。

## 1.7 順序回路の自律生成の例

### 1.7.1 変動連想からステートへ

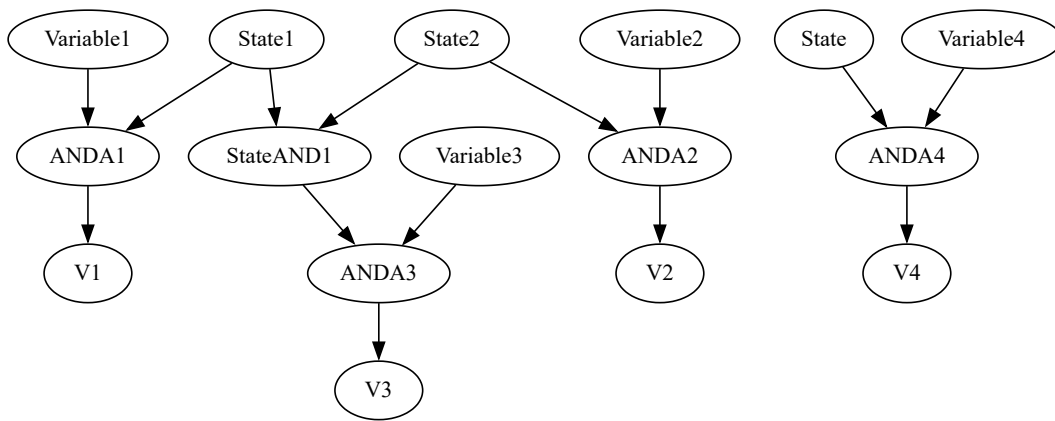
一般化された観測とは、ある時間ノードと、その時間に観測された複数の観測ノードとを連想で連結する作用と考える。つまり、複数ビットの値と時間ノードとのグループが生成される。



同時に観測されたステートの間の連想形成

### 1.7.2 ステート間の論理演算の自律生成

X1,X2,X3,X4はある時間での観測結果でありBool値である。時間によってそれぞれの観測結果は異なる。



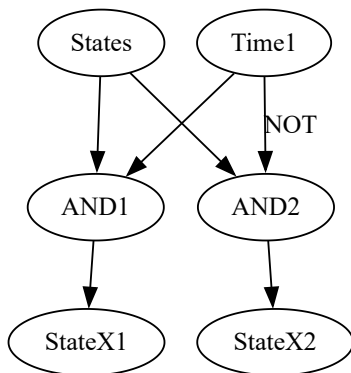
### 時間に対するステート変動への連想

事前に形成された順序回路のネットワークに対して、 $V_1$ から $V_4$ までの観測から再度伝搬が行われる。

Stateと $V_1$ との確率の衝突からフィードバックが発生してStateAND1が生成され、StateがState1とState2とに分割されてStateAND1の入力条件となる。この結果、以下の論理式が自律的に形成される。

$$V_3 = V_1 \text{ and } V_2$$

## 1.7.3 時系列で連想形成



### 時系列に対するステート間の連想

Time1ノードの前後で、変動連想によってStateX1とStateX2が排他的かつ連続の時系列で結合される。この結果、隣接時間のStateX1とStateX2との間の関連が導き出される。さらにStatesからAND2へのリンクが弱く条件が必要になることにより、State間の論理式が形成されて順序回路が形成されていく。

SOLのノードは、この例ではBool値であるが、さらなる抽象的な数値、座標、文字トークンなどのあらゆる対象の連結が可能である。抽象的なノード同士の演算などの相互作用は組み込み関数などで実現され、SOLは組み込み関数同士の連結を確率で選択することになる。

## 2 双方向論理演算

### 2.1 現実の時空間と写像に対する仮定

1. 時空間を分割する集合が複数存在して、集合間の包含関係は未知である。

集合はそれぞれの時空間の物質等に該当し、時空間方向にある程度の広がりを持つ。複数の集合は排他的な関係もありうるし、包含関係になることもあり、部分重複していることもある。これらすべての関係に対して、写像によって関連を導き出す。

2. 複数の集合の間で、確率の一致が観測されるもの同士は「写像」として連結できる。

実集合のある部分空間に属していれば、別の部分空間がかならず確率的に一致する場合がある。この場合、実集合そのものの重複関係とは無関係に「写像」として双方の部分集合を含む包含集合を形成できる。この包含集合を「写像集合」とみなす。この「写像集合」が、一般的に因果関係と呼ばれるものを表現すると予想できる。写像元は写像集合に完全に含まれるが、写像先は写像集合に対して部分集合だけを含むことがある。これは「含意」の定義による。

3. 写像間の論理演算は、写像の成立条件となる。

複数の写像先の集合的論理演算を行うことにより、論理演算の結果の集合が最終的な写像先の部分集合となる。これが写像で一般化された論理演算である。

現実の時空間は、このような構造になっていると仮定する。その上で、現実の集合と写像の構造がいかなるものであっても、観測からSOLで再現することを目指す。

### 2.2 ノードとリンク

SOLは、ノードとリンクとで構成される双方向ネットワークである。以下の全ての種類のノードはリンクで結合される。

1. 観測値の実体である値ノード
2. リンクを等価結合する接続ノード
3. リンク同士の論理演算を示すLogicノード
4. リンク間の排他性を示すExclusiveノード
5. リンクと結合して外部と入出力するためのFunctionノード

値ノードは空間に存在する抽象的な部分集合であるが、スカラ、ベクトル値、文字などの実際の値をノードと一対一に対応させることも可能である。

論理演算ノードは、入力リンクに対するBool代数演算を行う。AND、OR、XORなどの種類がある。

AND、OR、XORなどの論理演算は、複数の入力に対して論理演算と、集合演算の双方を適用する。出力リンクは論理演算の結果を伝搬するだけでなく、出力リンク同士の値と集合とが等価であることを示す。

接続ノードは、出力のみを持つノードであり、複数のリンクの値と集合とが等価であることを示す。複数のリンクが等価であるということは、複数のリンクからの到達でフィードバックを発生させるということでもある。

Exclusiveノードは、入力リンク間の排他性を示すノードである。入力ノードすべての間のNOTリンクとほぼ等価であるが効率のために使用する。

Functionノードは、値ノードで示された実際の値を用いて、実際の演算や外部入出力を行う。結果に相当する数値などの値ノードをその都度生成する。

リンクは、リンクを通過する際に適用する二項組の確率  $P^{f11}, P^{f00}$  と経験数  $N^{f11}, N^{f00}$  とで構成される。

リンクの属性は以下の通りとなる。

| 内容          | 記号                 |
|-------------|--------------------|
| リンクの順方向伝搬確率 | $P^{f11}, P^{f00}$ |
| リンクの順方向経験数  | $N^{f11}, N^{f00}$ |
| リンクの逆方向伝搬確率 | $P^{r11}, P^{r00}$ |
| リンクの逆方向経験数  | $N^{r11}, N^{r00}$ |

Activation（活性値）は、複数のリンクと論理演算を通過して、起点からの伝搬確率を計算する。

## 2.3 リンク伝搬と論理演算

### 伝搬

リンク伝搬は、伝搬確率  $P_{11}, P_{00}$  を使用して演算する。

$$P' = P_{11}P + (1 - P_{00})(1 - P)$$

## NOT伝搬

リンクの伝搬確率を以下のように設定すると、リンク自体が論理値のNOTの挙動を示す。

$$P_{11} = 0$$

$$P_{00} = 0$$

## AND演算

リンク伝搬の結果をAND論理演算で合成する。 $P_1, P_2, \dots$ を入力して、 $P'$ を出力する。

$$P' = P_1 P_2 P_3 \dots P_n$$

## OR演算

リンク伝搬の結果をOR論理演算で合成する。 $P_1, P_2, \dots$ を入力して、 $P'$ を出力する。

$$P' = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) \dots (1 - P_n)$$

## XOR演算

リンク伝搬の結果をXOR論理演算で合成する。 $P_1, P_2, \dots$ を入力して、 $P'$ を出力する。

$$P' = P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2$$

3変数以上のXORは再帰的に演算を適用する。

## Exclusive演算

リンク伝搬の結果をExclusive演算に入力する。この場合は演算を適用せずに伝搬を行う。

$$P' = P_n$$

## 逆方向伝搬

リンクにはそれぞれ逆方向伝搬確率 $P_r^{11}, P_r^{00}$ が定義される。

通常のリリンクの場合は、順方向伝搬確率から即座に求められる。順方向の伝搬確率を $P^f{}^{11}$ 、 $P^f{}^{00}$ 、逆方向の伝搬確率を $P^r{}^{11}$ 、 $P^r{}^{00}$ とする。この場合、逆方向の伝搬確率 $P^r{}^{11}$ 、 $P^r{}^{00}$ は以下の式を用いて算出される。

$$P^f{}^{11}P^r{}^{11} + (1 - P^f{}^{11})(1 - P^r{}^{11}) = 1$$



$$P^{r11} = \frac{P^{f00}}{P^{f11} + P^{f00} - 1}$$

$$P^{r00} = \frac{P^{f11}}{P^{f11} + P^{f00} - 1}$$

OR,ANDなどの論理演算からの逆伝搬の場合は、ベイズの定理に従って算出される。通常のリンクの情報に加え、リンクの伝搬元確率を  $P$ 、伝搬先確率を  $P'$  とする。伝搬元確率と伝搬先確率の双方が得られなければ、逆方向伝搬確率は算出できない。

$$P^{r11} = \frac{P P^{f11}}{P'}$$

$$P^{r00} = \frac{(1 - P) P^{f00}}{1 - P'}$$

## エントロピーとリンクの確定化

確率に対するエントロピーは、二値のエントロピーの公式から算出できる。

$$S = \sum_n P_n \log P_n$$

これを二値化すると

$$S = P \log P + (1 - P) \log(1 - P)$$

この結果、確率  $P$  が1か0に近いものはエントロピー  $S$  が最小で、確率  $P$  が0.5に近いものはエントロピー  $S$  が最大になる。SOLの目的は、リンクの確率を可能な限り1か0に近づけることである。つまり、エントロピーを最小化することが、SOLの自己組織化の目的の1つと言える。そのために、エントロピーの高いリンクは、適切な論理演算の挿入で分割してそれぞれのエントロピーを低下させる。

## リンクへのフィードバック

リンクへのフィードバックによって、リンクを通過する集合ごとに複数のリンクに縦方向に分離する。全体確率が1か0に近づくポジティブフィードバックは、分離の必要がない。全体確率が0.5に近づくネガティブフィードバックは、リンクを通過する集合の中に伝搬確率1と0の部分集合が混在していると考ええる。

例えば、これまでは確率1で通過していたが、今回は確率0で通過した場合は、通過した確率0の伝搬集合は、リンクを縦方向に分離する部分集合と考える。この縦に分割する手段が以下の論理

演算の挿入になる。

## 2.4 リンクの縦分割と論理演算挿入

ノードからノードへと伝搬するリンクは、起点ノードと終点ノードをそれぞれ部分集合に分割して、リンクを縦分割することができる。

リンクを分割するのは、リンクを通過する集合の中で、伝搬確率が異なる集合があると観測された場合である。伝搬された観測確率が0.5に近づく場合に、観測確率1の要素と観測確率0の要素とに分離する。

分離された要素は、要素の集合を示す起点ノードの情報を利用して、そのノードと論理演算を形成する。

- $P^{11}$ 側が不確定で、 $P^{00}$ 側が1確定であればANDを挿入する
- $P^{00}$ 側が不確定で、 $P^{11}$ 側が1確定であればORを挿入する
- $P^{11}$ 側が不確定で、 $P^{00}$ 側が0確定であればNOT(AND)を挿入する
- $P^{00}$ 側が不確定で、 $P^{11}$ 側が0確定であればNOT(OR)を挿入する
- $P^{11}$ 側と $P^{00}$ 側の双方が不確定であれば、XORの挿入の可能性がある

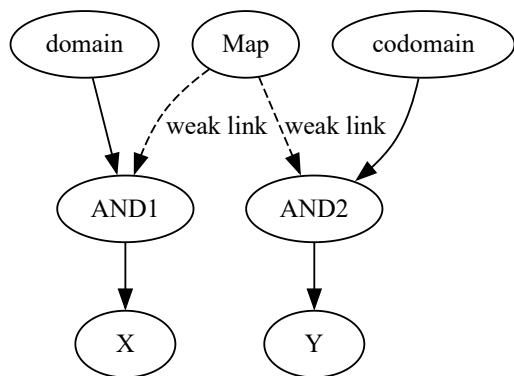
# 3 写像

## 3.1 写像の定義

論理演算は、起点を集合ととらえて、集合代数として記述できる。だが、より汎用的な論理を記述するためには、フリップフロップやメモリというような、様々な時間の状態を切り替えて使用するための記憶素子が不可欠である。そうでなければ、時間や空間の変動に対して汎用的な論理演算を作りだすことができない。

SOLは、論理演算に、写像概念を加えた。写像は、時間や空間の異なる状態を結びつけ、新たな起点として利用する。この写像の作用こそが記憶素子の一般化でもある。さらに、複数の状態の一致を状態として管理することを可能にする。これにより状態間の順序などの関係そのものを状態として利用することも可能にする。

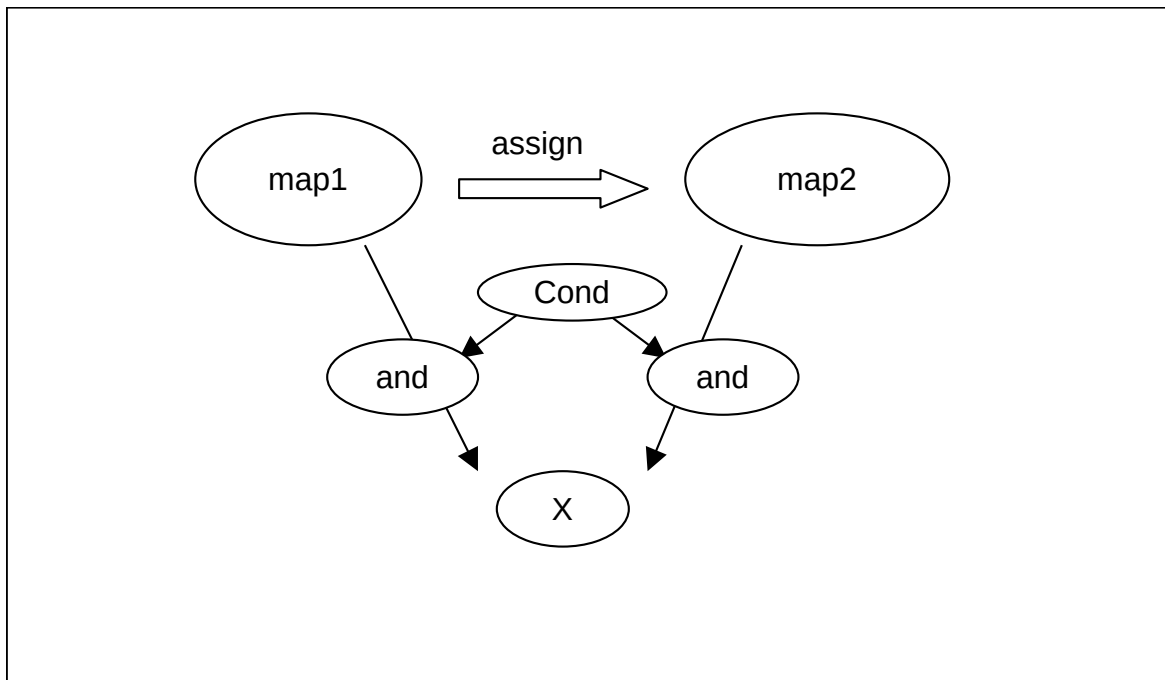
写像を論理演算だけで表現する方法を示す。以下の例では写像元の部分集合Xから、写像先集合の部分集合Yに写像する。Mapノードは接続ノードの一種となる。



弱いリンクによる写像

weak linkは $N_{11}$ か $N_{00}$ の観測数が少ないリンクであり、次の観測によるネガティブフィードバックによって不確定になる。このリンクの確定確率の部分を分離するために論理演算が追加されていくことになる。2つのweak linkのうちのどちらにも論理演算が追加できることになるが、整合性のある方の論理演算だけが確定することになる。

## 3.2 写像を通過する逆伝搬と代入



写像間の代入

この図は複数の写像の間で写像元と写像先を共有する方法である。Map1ノードから見るとXは写像の値域であり、Map2ノードから見るとXは写像の定義域である。重要なのは、Map1ノードの値域の条件となるCondノードは、Map2ノードの定義域の条件となるCondノードが同一である点である。

ここで、map1ノードからmap2ノードへと活性値を伝搬する。map1ノードでの活性値の値は1である。map1ノードからXへの伝搬は通常の伝搬であるが、XからMap2ノードへの伝搬は逆伝搬となる。ただし、Map2ノードで拡大された確率は均一に値が1であるという保証はない。だが、活性値の代入の考え方をを用いれば、Map2ノードに到達した伝搬集合の確率が均一に1になりうるという理由を示す。

Map1ノード上に存在する確率1の活性値は、Map1ノードからXに向けて伝搬を行う。その際にノードCondでANDをとり、伝搬集合が分断される。だが、さらにXからMap2ノードへと伝搬される際に、ANDの逆伝搬を通過する。その際に、Map1ノード側と同じCondノードで補完される。集合としてはMap1ノードの活性値と同じ大きさになる。Map2ノードの活性値は0と1の値のどちらかを完全に特定することはできない。だが、値1からのANDの逆伝搬であるので、Map2ノードの活性値は伝搬集合すべての値が1と仮定することは可能である。値が0と仮定することはできない。

ここで、Map1ノードにある活性値が、Map2ノードの活性値と同一であると仮定できる。これがSOLにおける代入であると考える。そのための条件は以下の通りである。

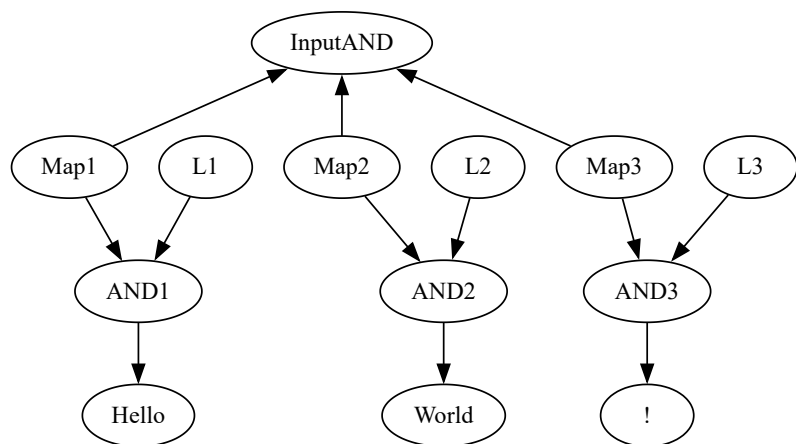
1. 伝搬元の値と、伝搬先の確定部分の値が等しいので矛盾がない。
2. 2つの伝搬集合の仮定ベクトルが同一である。

この考え方は厳密に言えばオッカムの剃刀である。だが、この代入の正当性については、今後の観測で検証され、必要に応じてフィードバックによる条件の追加が行われることになる。

### 3.3 写像と双方向伝搬による階層的なマッチング

一例として、Input入力からのテキスト解析を挙げる。以下の例では、互いに排他的な単語が3つが、互いに排他的なノードL1,L2,L3を用いて活性化される。一致判定は、単語から逆伝搬してInputANDが逆に活性化される。L1,L2,L3は互いに排他的なことが確認できればよい。そしてAND1からMap1への逆伝搬は集合的に拡大されて排他的でなくなる。Map1,2,3からのANDが結合されてInputANDが活性化される。逆に言えばすべての要素がなければInputANDは活性化されない。

このように、双方向伝搬を用いれば、集合的に重複のない単語間での集合論理演算が可能になる。

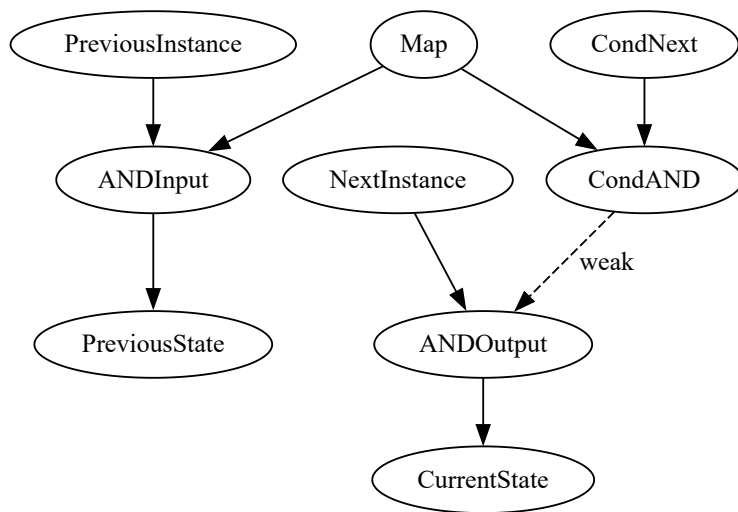


写像を用いた自然言語表現

### 3.4 序列と時空間

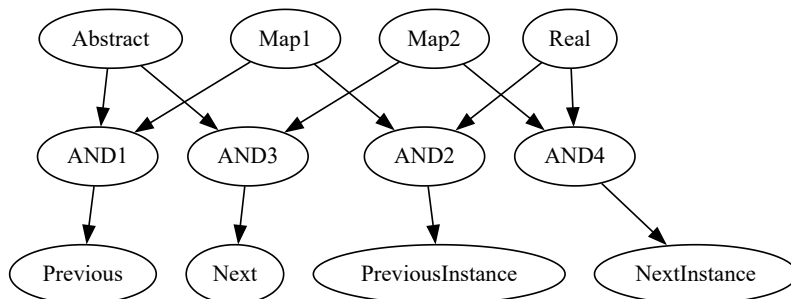
#### 順序リンクの写像ノードによる表現方法

集合と写像とを用いて順序の表現するための手法を示す。PreviousStateとCurrentStateは連続した時間の状態であり、これらは写像で連結される。PreviousStateとNextStateとの順序の関連があれば、CondNextが逆伝搬で活性化される。写像の条件であるNextInstanceノード、PreviousInstanceノードは共に写像ごとに生成されるノードである。



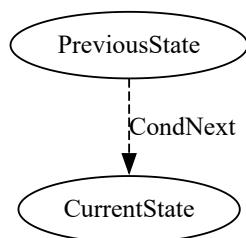
### 写像による状態間の順序の表現

PreviousInstanceノードは抽象的なPreviousノードの部分集合であるが、Previousとは写像で連結される。ある写像でのNextは、別の写像にとってはPreviousでありうるため、PreviousInstanceノードは、集合の実体としては別の写像のNextInstanceノードとも重複があり得る。そのため、抽象的な空間にのみ存在するノードであるPreviousノードと写像で連結するという形にする。NextInstanceノードも同様である。



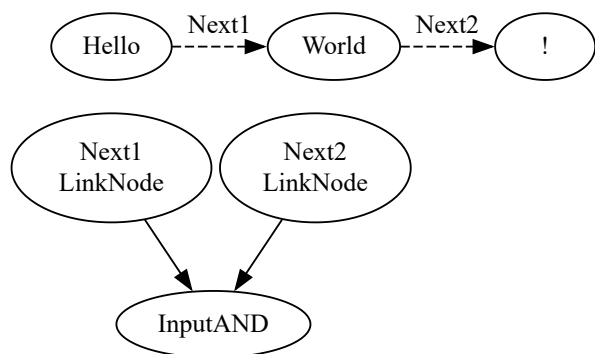
### Previous,Nextの抽象化と写像ごとのインスタンス生成

必要に応じてこれらの記述を省略して、以下のように表記する。PreviousStateとCurrentStateの間に順序があることを示すリンクノードがCondNextとなる。



# 順序を含む単語のリンクノードによる一致判定

以下の例では、互いに排他的な単語が3つが、相互に順序を持つリンクNext1,Next2を用いて活性化される。Next1,Next2は単語間の順序が成立したときに活性化されるリンクノードでもある。一致判定は、Next1,Next2のそれぞれのリンクノードからInputANDへと入力される。前の例と異なり、単語の順序が入れ替わるとNext1,Next2のリンクノードが活性化されないのでInputANDが活性化されない。



## 順序を用いた自然言語表現

このような序列の表現方法は効率が悪いように見えるかもしれないが、時空間の構造に左右されない厳密な方法である。実装次第ではベクトルや行列に代入することで効率化を行うという方法も考えられるが、ベクトルへの代入の時にこの手法で序列に従って代入する。

## 4 活性値の双方向伝搬

SOLは、ニューラルネットワークと類似する活性値の伝搬を行うが、起点からの伝搬確率を厳密に管理する。それに加えて、仮定ベクトルによって伝搬された集合の情報を管理する。これに加え、SOLでは論理演算の双方向への伝搬とそれによる写像の表現を可能にした。これによって、集合の空間上のあらゆるノードの間で、ネットワークで接続されている限りは伝搬確率を求めることが可能になる。

SOLのネットワークのリンクに対して、活性値を示す以下のActivationのオブジェクトをリンクごとに分配して伝搬し、階層的にActivationを生成する。Activationの持つ情報は基本的には以下の通りである。

### 1. PropagatedProbability

伝搬された確率値であり、値は0から1までのスカラー値である。

### 2. Assumption Vectors

このActivationの伝搬集合を示す仮定ベクトルである。

### 3. Propagating link

このActivationが通過しているリンクを示す。フィードバックはこのリンクに対して適用される。

### 4. Parent activations

伝搬元のActivationの情報を示す。論理演算ノードでは複数のActivationが合成される。接続ノードなどでは伝搬元のActivationを1つだけ継承する。

## 4.1 活性値の伝搬の流れ

### 1. 仮定からの確率伝搬

活性値は仮定を起点とする。仮定は起点となるノードの起点確率を1か0に仮定する。この起点確率に対してリンク伝搬や論理演算を適用して活性値を伝搬させていく。

### 2. 仮定ベクトル同士の論理演算と複数の仮定ベクトルの統合

異なる仮定ベクトルを持つ複数の入力を用いて論理演算を行う際に、仮定ベクトルが示す集合の重複部分だけを抽出して伝搬する。仮定ベクトルが重複しない部分は論理演算は適用されない。



### 3. 論理演算の逆伝搬と仮定ベクトルの相補的合成

論理演算の出力側の集合を、論理演算の入力側に逆に伝搬する。

値 1 をANDから逆伝搬させるときはそのまま全ての入力に対して確率 1 と仮定ベクトルを伝搬する。

値 0 をANDから逆伝搬させるときは、1 つの入力を除いてすべての 1 の入力がある場合は、入力が 0 として確定する。

値 0 をANDから逆伝搬させるとき、さらに入力の中にすでに 0 がある場合は、逆伝搬する入力は確率が不確定となる。だがここで、不確定な確率を確定させる手段が別に存在する。これが逆伝搬を写像に用いることができる理由である。

### 4. 活性値衝突と、仮定ベクトルの要素比較

複数の活性値が別の経路を通過して同一のノードに到達した場合、双方の仮定ベクトルの間に共通部分があれば双方の確率を比較する。確率が異なっていれば確率を等しくするようにフィードバックを行う。

### 5. 活性値が組み込み関数に到達することで、外部からの観測や外部動作などを行う。観測とは入力集合に対応した出力の活性化である。

## 4.2 仮定ベクトル

### 仮定ベクトル要素

仮定ベクトルの要素はそれぞれ、特定のノードからノードへのリンクの伝搬確率 $P^{11}$ か $P^{00}$ のどちらかが1か0であるという仮定を意味する。ノードの値が1か0かを仮定することによって、その先の伝搬集合が2つに分断される。

#### 1. 起点ノード

仮定ベクトルの要素は、起点となるノードの確率を示すBoolean値が基本である。これは、暗黙に存在するノードから起点ノードへの暗黙のリンクを仮定する作用とみなすことができる。この要素は主に写像の条件に用いられる。

#### 2. 逆伝搬選択

ORノードへの値1の活性化から入力リンクを逆伝搬して、その入力ノードを1つ選択する。この作用はORノードから入力ノードへのリンクの仮定と見なすことができる。ANDノードへの値0の活性化からの逆伝搬も同様である。これは変数への値の代入にも用いられる。

#### 3. ネットワーク中途の共通起点

複数の伝搬が衝突した際に、経路のすべての仮定ベクトルを考慮するのは無駄が多い。そのため、複数の伝搬の共通の起点に対して仮定を設定して、それ以前の共通のパスは仮定の比較を行

わない。

## 論理演算の相互作用

伝搬集合同士でAND、ORなどの論理演算を行うと仮定ベクトルが合成される。この際の合成は以下のルールに従う。

- 仮定ベクトル間で異なる仮定ベクトル要素はそのまま合成される。
- 仮定ベクトル間で同一の仮定ベクトル要素は1つに集約される。
- 集合的に包含関係の仮定ベクトル要素との合成は伝搬集合的に小さい要素に取って代わる。
- 集合的に排他的な仮定ベクトル要素との合成は伝搬集合自体が空集合になる。

## 活性値の衝突と仮定ベクトル

複数の活性値が同一の接続ノードや論理演算ノードに到達した場合は、それらの活性値は等価なものとして衝突対象となる。論理演算に関して言えば、入力の合成結果と出力とが衝突対象となる。

仮定ベクトルが示す伝搬集合に重複があれば、伝搬された結果の確率値が一致していなくてはならない。一致していない場合はフィードバックが実行される。

## 4.3 活性値の確率伝播

活性値(Activation)をリンクに沿って伝搬して、リンクの伝搬確率やノードの確率合成に従って確率を伝搬させ、リンクの先の組み込み関数を実行するのがSOLの基本となる。

$P^{f11}$  はPの確率 1 からP'の確率 1 への伝搬確率であり、 $P^{f00}$  は、Pの確率 0 からP'の確率 0 への伝搬確率になる。確率論の自明な適用である。

$$P' = PP^{f11} + (1 - P)(1 - P^{f00})$$

AND演算では複数のActivationの確率を統合して、出力リンクに伝搬する。確率計算は、入力された伝搬確率  $P_1, P_2, P_3...$  を複数利用して、以下のように計算する。

$$P' = P_1 P_2 P_3 ...$$

OR演算の確率計算は以下のようなになる。

$$P' = 1 - \{(1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3)...\}$$

出力リンクの数が膨大となる場合は、いくつかのリンクに限定してActivationを伝搬することになる。リンクの限定の方法は別に提供する。

## 4.4 確率の逆伝搬

Activationは、リンクの方向と逆にたどる逆伝搬(backward activation)も可能である。ニューラルネットワークの技法のback propagationとは意味が異なる。

逆伝搬は、リンクごとの逆伝搬確率  $P^{r11}, P^{r00}$  を利用して、順方向伝搬の確率計算と同じ方法で行う。ノードの論理演算は適用されない。

$$P' = PP^{r11} + (1 - P)(1 - P^{r00})$$

結果、全体の伝搬確率は、以下のような複数のリンクに対する多項式として一般化される。

$$P = f(P_1^{f11}, P_1^{f00}, P_2^{r11}, P_2^{r00}, P_3^{f11}, \dots)$$

## 4.5 活性値の衝突

活性値の衝突とは、同一ノードを起点として同一ノードへと到達した複数の伝搬経路で、伝搬された仮定ベクトルが重複しているにもかかわらず伝搬確率が異なることを言う。

原則として、 $P = 0.5$ 、つまり確率不確定な伝搬集合との部分重複は、伝搬集合としては無関係とみなせるので衝突ではない。逆に、確率が双方ともに確定であれば、伝搬集合に重複があれば確率の衝突と見なすことができる。確率0.5を確率1（あるいは0）側が伝搬集合的に完全に包含する場合は、確率1側の確定性に矛盾が発生するので、衝突とみなされる。

以上の手段で伝搬集合の大きさの比較が行われ、伝搬集合が完全に重複している部分に対して確率の衝突、フィードバックが適用される。

# 5 確率変動分配階層フィードバック

このフィードバックの手法は、ベイジアンネットワークの無制限の階層に対して、どのリンクが観測確率の誤差の原因になっているかを的確に発見できる、新たに開発した手法である。

従来のニューラルネットワークでは、バックプロパゲーションを用いて深いリンク層に対して影響を及ぼすことができるが、より深いリンク階層に対する誤差原因の特定はやはり難しくなる。ディープラーニングと呼ばれるものも、相対的に階層が深いと言っているに過ぎない。

このフィードバックの前提は以下の通りである。

1. SOLのリンクには伝搬確率があり、論理演算もまた確率計算となる。複数のリンクと論理演算とを通過した結果の全体伝搬確率が求められる。観測された新たな伝搬確率 $P'$ に対して、ネットワーク伝搬確率を近づけるようにリンクごとの $\Delta P_n$ に対してフィードバックされる。

$$P' = P_1 P_2 \dots (P_n + \Delta P_n) \dots P_{x-1} P_x = E_n(P_n + \Delta P_n)$$

2. それぞれの確率 $P$ のリンクが確率 $P'$ になる変動発生確率は、過去の観測確率 $P$ と観測数 $N$ とに依存し、純粋な確率論で算出できる。
3. リンク全体の変動発生確率は、すべてのリンクの変動発生確率の積となる。この全体変動発生確率を最大にする。
4. 個々のリンクにはフィードバックごとに観測数 $N$ が加算される。フィードバックされた伝搬確率を用いて、観測数に応じて既存の伝搬確率を補正する。観測数が多いリンクはフィードバックによる補正もわずかとなる。

以上の条件を満足するように、計算方法が決定された。この計算方法を確率変動分配階層フィードバックと呼んでいる。

## 5.1 リンク上の二項組確率伝播

伝搬する活性値は、1つの伝搬確率 $P$ を持つ。この確率 $P$ は、現在運搬している仮定ベクトルの集合の中に存在する確率となる。補集合に存在する確率は $(1-P)$ になる。

活性値が確率的に確定したリンクを通過するときは、以下の伝搬確率に従って確率が伝達される。

$$P^{11} = 1$$

$$P^{00} = 1$$

確率的に確定したNOTリンクは、正集合と補集合の2つの集合の確率を入れ替えることになる。具体的には、リンクの伝搬確率が以下の通りになる。通過する仮定ベクトルの集合を反転させるものではないことに注意する。

$$P^{11} = 0$$

$$P^{00} = 0$$

リンクは、 $P^{11}, P^{00}$  とは別に、リンクの強度を示す  $N^{11}, N^{00}$  というパラメータを持つ。この強度は、フィードバックごとに加算され、リンクの確率を確定させる。

## 5.2 双方向伝搬と論理演算の確率計算

SOLでの活性値伝搬における、確率計算の手法を示す。一般論として、伝播確率の計算方法は以下ようになる。

$$P' = PP^{11} + (1 - P)(1 - P^{00})$$

AND演算

$$P'_1 = P_1^1 P_1^2 P_1^3 \dots$$

$$P'_0 = 1 - P'_1$$

OR演算

$$P'_0 = P_0^1 P_0^2 P_0^3 \dots$$

$$P'_1 = 1 - P'_0$$

リンクの逆伝搬確率は、リンクの順方向確率からベイズの定理を適用して算出する。 $P_1, P_0$  はノードAの確率。 $P^{f11}, P^{f00}$  はノードAからBへの順方向伝搬確率。 $P^{r11}, P^{r00}$  が求めるノードBからノードAの逆方向伝搬確率とする。

$$\{P^{f11} + (1 - P)(1 - P^{f00})\}P^{r11} = P_1 P^{f11}$$

$$P^{r11} = \frac{P^{f11}}{P^{f11} + P_0(1 - P^{f00})}$$

$$\{P^{f11}(1 - P^{f11}) + (1 - P)P^{f00}\}P^{r00} = (1 - P)P^{f00}$$

$$P^{r00} = \frac{1 - P^{f00}}{P^{f11}(1 - P^{f11}) + (1 - P)P^{f00}}$$

AND演算、OR演算などの論理演算から入力への逆方向伝搬もまたベイズの定理を用いて算出する。ただし、リンク入力の観測確率 $P(A)$ と論理演算出力の観測確率 $P(B)$ を用いる必要がある。

$$P^{r11} = \frac{P(A)P^{f11}}{P(B)}$$

$$P^{r00} = \frac{(1 - P(A))P^{f00}}{1 - P(B)}$$

以上のように、SOLのノードごとの伝搬確率合成は、確率論に忠実で自明なものである。シグモイド関数などの非線形要素は利用しない。

## 5.3 フィードバックの適用対象

現在利用しているネットワーク全体の伝播確率で算出された  $P_{total}$  を、同じ状況で確率が異なる衝突相手の伝搬確率  $P'_{total}$  に合わせるのがフィードバックとなる。

SOLのフィードバックは、衝突した2つのパスが通過するリンクの、 $P^{11}$ 、 $P^{00}$  それぞれに対して適用される。その強度は、リンクの確率、リンクの経験数に応じて変わってくる。

フィードバックされる結果となる  $P^{11'}$ 、 $P^{00'}$  を、補正值  $\Delta P_n^{11}$ 、 $\Delta P_n^{00}$  を使って補正する。2つのパスの全体確率を、それぞれ補正值を追加した多項式として伝搬させて計算する。大規模な方程式になる。

$$P_n^{11'} = P_n^{11} + \Delta P_n^{11}$$

$$P_n^{00'} = P_n^{00} + \Delta P_n^{00}$$

$$P_{total} = (P_1^{11'})(P_2^{11'})(1 - P_3^{11'})...$$

2つのパスA,Bそれぞれの全体確率は、大量の  $\Delta P_n^{11}$  や  $\Delta P_n^{00}$  に対する伝搬多項式になる。さらに、この2つのパスの式が等しくなることより、

$$P_{totalA} - P_{totalB} = \Delta P_{total} = 0$$

この式を満たし、かつ変動確率が最小となる  $\Delta P_n$  をN個求めればよい。だが、まともな方法では、 $\Delta P_n$  をそれぞれ変動させて解を求めるという、組み合わせ爆発問題となる。

そのため、それぞれの確率観測確率の変動量  $\Delta P_n$  を近似的に求める手段を提供する。

## 5.4 作用係数 $E_n$ の算出

以下は、リンクの伝搬確率の変動 $\Delta P_n$ が最終的な確率 $P_n$ に対してどの程度を作用するかを示す式である。確率変動 $\Delta P_n$ に作用する確率は $E_n$ であり、 $R_n$ は定数項である。

$$P_n = R_n + E_n \Delta P_n$$

この作用確率は、さらなるリンクや論理演算が適用されて変化する。そのために、 $E_n, R_n$ を入力して、 $E'_n, R'_n$ を出力する式を示す。リンク伝搬確率はそれぞれ $P^{11}, P^{00}$ をとする。

あるリンクの $P^{11}$ 側を起点とする場合は以下の式となる。リンクまでの伝搬確率を $P_{n-1}$ とする。

$$R_n + E_n \Delta P^{11} = (1 - P^{00})(1 - P) + P_{n-1} \Delta P^{11}$$

$$R_n = (1 - P^{00})(1 - P)$$

$$E_n = P_{n-1}$$

リンクの $P^{00}$ 側を起点とする場合は以下の式になる。

$$R_n + E_n \Delta P^{00} = P^{11} P_{n-1} + 1 - P_{n-1} + (P_{n-1} - 1) \Delta P^{00}$$

$$R_n = P^{11} P_{n-1} + 1 - P_{n-1}$$

$$E_n = P_{n-1} - 1$$

起点ではないリンクによる伝搬は以下の式となる。

$$R'_n + E'_n \Delta P_n = 1 - P^{00} + (P^{11} + P^{00} - 1) R_n + (P^{11} + P^{00} - 1) (E_n \Delta P_n)$$

$$R'_n = 1 - P^{00} + (P^{11} + P^{00} - 1) R_n$$

$$E'_n = (P^{11} + P^{00} - 1) E_n$$

以下、論理演算に対する伝搬確率を求める。以下、 $P^{11}$ 、および $P^{00}$ はそれぞれm番目、n番目のリンクと見なし、 $P_m$ 、 $P_n$ のように表記する。 $\Delta P_n$ 以外の入力の合成確率を $P$ とする。AND演算における $E'_n$ は

$$R'_n + E'_n \Delta P_n = P R_n + P E_n \Delta P_n$$

$$R'_n = P R_n$$

$$E'_n = PE_n$$

OR演算における $E'_n$ は

$$R'_n + E'_n \Delta P_n = P + R_n - PR_n + (1 - P)E_n \Delta P_n$$

$$R'_n = P + R_n - PR_n$$

$$E'_n = (1 - P)E_n$$

XOR演算における $E'_n$ は

$$R'_n + E'_n \Delta P_n = P + R_n - 2PR_n + (1 - 2P)E_n \Delta P_n$$

$$R'_n = P + R_n - 2PR_n$$

$$E'_n = (1 - 2P)E_n$$

論理演算からの逆伝搬であれば演算に関わらず $P^{r11}$ 、および $P^{r00}$ を用いる。以下の式になる。

$$R'_n = 1 - P^{r00} + (P^{r11} + P^{r00} - 1)R_n$$

$$E'_n = (P^{r11} + P^{r00} - 1)E_n$$

AND演算の逆伝搬で、他の入力の確率が $P_f$ に確定している場合は以下の式になる。導出は複雑なので省略する。やはり $\Delta P_n$ の二次以降の項は省略している。

$$P' = P_f P_r = (R + E \Delta P_n)(R' + E' \Delta P_n)$$

$$R' + E' \Delta P_n = \frac{P'}{R} - \frac{P'E}{R^2} \Delta P_n - \frac{P'E^2}{R^3} (\Delta P_n)^2 \dots$$

$$R' = \frac{P'}{R}$$

$$E' = \frac{P'E}{R^2}$$

OR演算の逆伝搬は

$$R' = \frac{1 - P'}{1 - R}$$

$$E' = \frac{(1 - P')E}{(1 - R)^2}$$



XOR演算の逆伝搬は

$$R' = \frac{P' - R}{1 - 2R}$$

$$E' = \frac{(2P' - 1)E}{(1 - 2R)^2}$$

以上の式をネットワークの経路に対して連続適用することで、経路全体の伝搬確率が求められる。この伝搬確率が観測結果 $P'_{total}$ と等しいと考える。複数のリンクの変動はすべて和をとれば良い。確率は1以下なので確率の積は確実に収束するため、2つ以上の $\Delta P_n$ の積の項は近似的に省略する。

$$P'_{total} = R_{total} + \sum_n E_{ntotal} \Delta P_n$$

この結果、伝搬によって求められた最終的な作用確率 $E_{ntotal}$ こそが、それぞれのリンク  $\Delta P_n$  に対する作用の係数となる。

$$\sum_n E_{ntotal} \Delta P_n \approx P'_{total} - P_{total}$$

## 5.5 重み値 $w_n$ の式の導出

伝搬で通過したリンクにそれぞれフィードバックされる確率補正值  $\Delta P_n$  は、伝搬リンクの確率をすべて以下の形で書き換えて計算することで、それぞれ求められる。

$$P'_n = P_n + \Delta P_n$$

リンク $n$ の伝搬確率  $P_n$  に対して、観測結果としての伝搬確率  $P'_n$  が観測される変動発生確率  $t_n$  は、一種の二項分布に従い、以下の式で得られるとする。

$$t_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \binom{m}{mP'_n} P_n^{mP'_n} (1 - P_n)^{m(1-P'_n)} \right\}^{-m}$$

この式は具体的に言えば、確率 $P_n$ のコイントスを $m$ 回利用して、結果の合計が $mP'_n$ となる確率を求め、 $m$ に対する極限をとっている。以下のコンビネーションの式を利用している。

$$\binom{m}{mP'_n} = \frac{m!}{mP'_n! m(1 - P'_n)!}$$

さらに、リンクの過去の観測回数 $N_n$ を乗数することで、結果が $mN_nP'_n$ となる確率を求める。これが、確率 $P_n$ が複数回観測されたリンクでの変動発生確率になる。

$$T_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \binom{mN_n}{mN_nP'_n} P^{mN_nP'_n} (1 - P_n)^{mN_n(1-P'_n)} \right\}^{-m}$$

まずは、コンビネーションの値の計算には、以下の「スターリングの近似式」を使う。

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left\{1 - \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right\}$$

最後の1以外の定数は近似として省略して、以下の式を用いる。

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

これを用いてコンビネーションの式に代入すると、

$$\begin{aligned} \binom{mN_n}{mN_nP'_n} &= \frac{mN_n!}{(mN_nP'_n)! \{mN_n(1 - P'_n)\}!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi mN_n}}{\sqrt{2\pi mN_n} \sqrt{2\pi mN_nP'_n(1 - P'_n)}} \left(\frac{N_n}{e}\right)^{mN_n} \left(\frac{N_nP'_n}{e}\right)^{-mN_nP'_n} \left(\frac{N_n(1 - P'_n)}{e}\right)^{-mN_n(1-P'_n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi mN_nP'_n(1 - P'_n)}} \frac{1}{P_n^{mN_nP'_n} (1 - P'_n)^{mN_n(1-P'_n)}} \end{aligned}$$

このコンビネーションの値を使って、 $T_n$ に代入する

$$\begin{aligned} T_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ P_n^{mN_nP'_n} (1 - P_n)^{mN_n(1-P'_n)} P_n'^{-mN_nP'_n} (1 - P'_n)^{-mN_n(1-P'_n)} \right. \\ &\quad \left. \{2\pi mN_nP'_n(1 - P'_n)\}^{-1/2} \right\}^{-m} \\ &= P_n^{N_nP'_n} (1 - P_n)^{N_n(1-P'_n)} P_n'^{-N_nP'_n} (1 - P'_n)^{-N_n(1-P'_n)} \lim_{m \rightarrow \infty} \{2\pi mN_nP'_n(1 - P'_n)\}^{-m/2} \end{aligned}$$

この $T_n$ こそがリンクで $P'_n$ が観測される確率であり、この確率変動をすべてのリンクで平均化するように $P_n$ の変動を求めれば良い。両辺logを取って、左辺を $\tau_n$ で置き換える。最後の項はmの極限で収束するので省略する。

$$\begin{aligned} \tau_n = \log T_n &= N_nP'_n \log P_n + N_n(1 - P'_n) \log(1 - P_n) \\ &\quad - N_nP'_n \log P'_n - N_n(1 - P'_n) \log(1 - P'_n) \end{aligned}$$

$$= N_n \{ P'_n \log P_n + (1 - P'_n) \log(1 - P_n) - P'_n \log P'_n - (1 - P'_n) \log(1 - P'_n) \}$$

この $\tau_n$ の式に対して $P_n$ で微分を行う。

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dP_n} &= N_n \left\{ \frac{P'_n}{P_n} - \frac{1 - P'_n}{1 - P_n} \right\} \\ &= N_n \left\{ \frac{P'_n(1 - P_n) - (1 - P'_n)P_n}{P_n(1 - P_n)} \right\} \\ &= N_n \frac{P'_n - P_n}{P_n(1 - P_n)} \\ P'_n &= P_n + \frac{P_n(1 - P_n)}{N_n} \frac{d\tau_n}{dP_n} \end{aligned}$$

これにより、 $\tau$ をパラメータとした $P_n$ の変動の重み $w_n$ が計算できる。

$$\begin{aligned} P_n + \Delta P_n \\ \Delta P_n &= w_n \Delta \tau_n \\ w_n &= \frac{P_n(1 - P_n)}{N_n} \end{aligned}$$

こうして、それぞれのリンクのウェイト $w_n$ はリンクの既知の確率 $P_n$ と観測回数 $N_n$ とで決定された。

## 5.6 確率補正值 $\Delta P_n$ の算出

ここからは複数のリンクへのフィードバック分配方法について述べる。観測された全体確率を、 $P'_{total}$ とする。この確率に合致するように、それぞれのリンクの変動 $\Delta P_n$ を求める。 $E_n$ は、前述したとおりリンク $n$ に対する伝搬確率で決定される作用係数である。

$$P'_{total} = P_{total} + \Delta P_{total} = P_{total} + \sum_n E_n \Delta P_n$$

さらにもう一つの制約条件は、全体変動発生確率 $T$ を最大値にすることである。

$$t_{all} = \prod_n t_n$$

この式は $\tau_n$ を用いると以下のようになる。

$$T = \log t_{all} = \sum_n \log t_n = \sum_n \tau_n$$

この全体変動発生確率のlogを取った $T$ （ラージタウ）を最大にして、かつリンクごとの $\tau_n$ の値を均一に分配するように、リンクごとの $P_n$ の変動値を定めるのがフィードバックの目的である。

$$\Delta P_{total} = \sum_n E_n w_n \frac{d\tau_n}{dP_n}$$

そのために、それぞれのリンク $n$ の変動発生確率 $\tau_n$ を共通パラメータ $\tau$ で置き換える。つまり、重みに応じて均等分配を行うことになる。

$$\Delta\tau = \Delta\tau_n$$

それぞれの $\Delta P_n$ に対して、変動全体 $\Delta P_{total}$ を $E_n w_n$ の比率を用いて分配する。

$$\Delta P_{total} = \sum_n E_n w_n \Delta\tau$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta P_{total}}{\sum_n E_n w_n}$$

こうして求められた $\Delta\tau$ を用いて、全体のフィードバック $\Delta P_{total}$ を、それぞれのリンクの $\Delta P_n$ に対して分配することができる。

$$P'_n = P_n + \Delta P_n = P_n + w_n \Delta\tau$$

$P'_n$ が1以上や0以下になることもありうるので、そういう場合は $P'_n$ を1か0に飽和させて $P_{total}$ をその都度再計算する。そののちに飽和したリンクを除去して再び $\Delta\tau$ を計算する。

## 5.7 フィードバック観測数 $N$ を用いたリンクの伝搬確率補正

このフィードバック補正された確率は、そのままではリンク自体が更新する確率にはならない。リンクのそれまでの観測数 $N_n$ が大きければ、それだけリンク確率補正量が小さくなる。フィードバックの加算値は1ではなく、実際の伝搬に使用された作用係数 $E_n$ とフィードバックされる相手の観測数 $N_f$ によって決定される。

$$N'_n = N_n + N_f E_n$$

結果、最終的に更新される確率 $P''_n$ は以下の通りになる。

$$P_n^{N'_n} = P_n^{N_n} P_n^{N_f E_n}$$

乗算平均と加算平均はそれほど差がないため以下の式で近似を行うこともできる。

$$P_n'' = \frac{N_n P_n + N_f E_n P_n'}{N'_n}$$

$P_n$ はリンクの $P^{11}$ ,  $P^{00}$ が混在しており、フィードバックはリンクの $P^{11}$ ,  $P^{00}$ それぞれに対して適用される。

算出された確率  $P_n^{11}$  へのフィードバック結果に基づき、 $P_n^{11}$  がエントロピー減少方向、つまり確率が1か0のいずれかに近づいたリンクは、ポジティブフィードバックされたとみなす。逆に、 $P_n^{11}$  のエントロピーが上昇する方向、つまり確率0.5に近づいたリンクをネガティブフィードバックされたとみなす。ネガティブフィードバックは、そのリンクになんらかの見えない条件があるために発生したと考え、その条件を検索する。 $P_n^{00}$  についても同様にフィードバックを算出する。

リンクの利用頻度が0の場合は、確率  $P_n = 0.5$  とみなされる。ポジティブフィードバックだけでは、確率1か0に近づくことはできるが、確率1か0そのものにはなれない。

この条件リンク形成については、後述する自律生成写像論理回路アルゴリズムの一部として実装される。

# 6 連想

## 6.1 連想対象選択

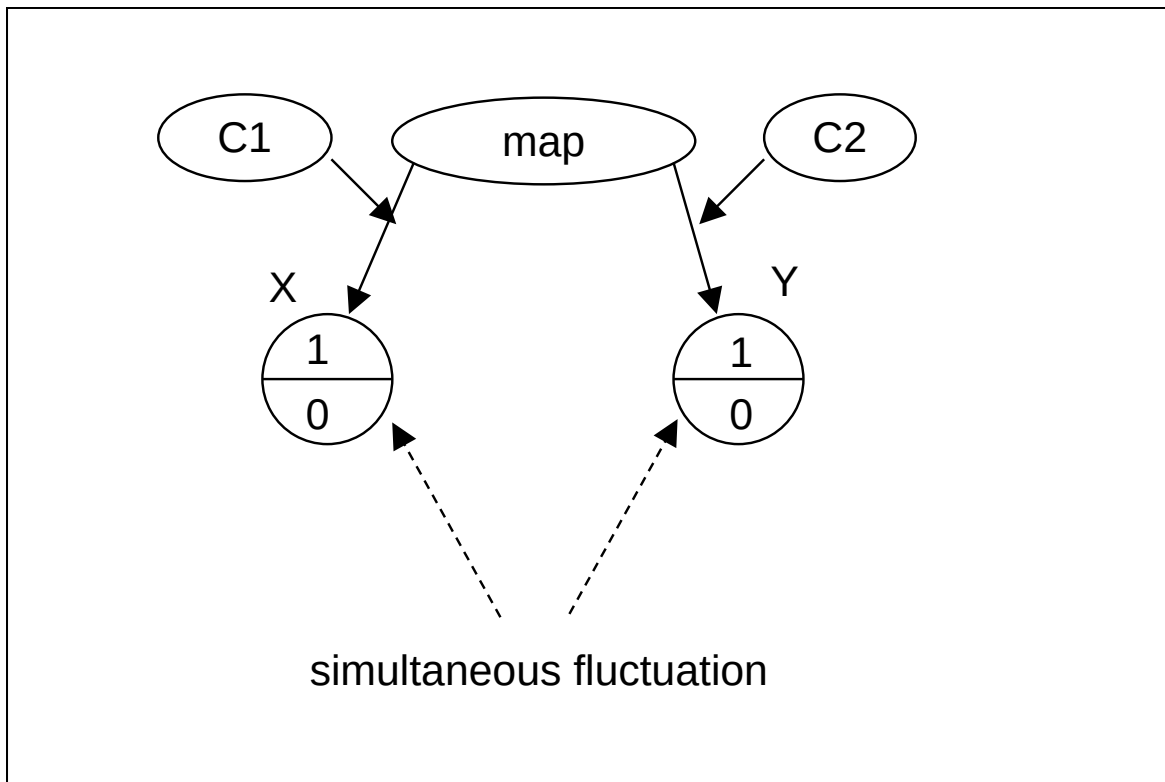
連想とは、集合的に独立した2つのノード間を写像で連結して因果関係を予測する作用である。あらゆる事象の間で、因果関係がありうる関連を導き出すには、同時に変動したものだけを選択するのが最も効率が良いためである。ただしこの場合の変動は、時間軸、座標などあらゆる変動を対象とする。

2つのノードで、値の変動が同時に観測されることにより、連想の候補とする。すべての変動が同時に観測されていれば確実に連想が可能になるが、たとえすべての値の変動を観測していなくても、部分的な観測だけでも連想の可能性がある。具体的には、それぞれのノードの変動発生の確率によって同時変動の確率、つまりは連想の価値を定量的に定めることができる。

そのための条件は以下の通りである。

1. 同時に観測された確率エントロピーがほぼ等しい（多くの場合は、確率1か0のどちらかの確定確率）。
2. 同一起点からの仮定ベクトルが同一か、あるいは包含関係がある。同時変動はそれ自体が仮定ベクトルが完全に一致しているか包含関係がある場合とみなされる。

ここで、関連がない事象同士が偶然同時活性化されて連想対象になることがありうるが、偶然の連想は複数回の観測でフィードバックされて不確定なリンクとなる。



連想形成

## フィードバックからの連想候補

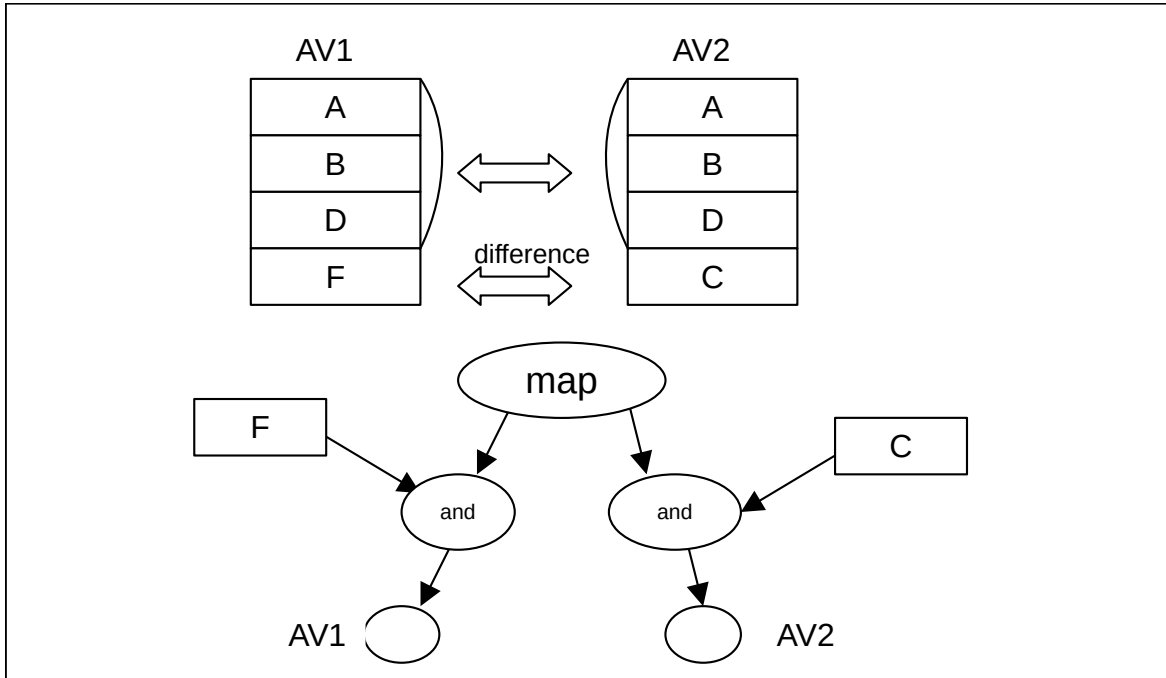
連想の候補となるノードは、ネガティブフィードバックが適用されたリンクの終点となる。ネガティブフィードバックが適用されたことにより、そのリンクには何らかの条件が追加されていると見なすことができる。

このネガティブフィードバックが同時に適用されたリンク同士が、連想の可能性があると思なされる。ただし、単純にネガティブフィードバックされた候補となるノードは大量に存在する。それらの関連をすべて連想を行うのは非常に効率が悪いと考えられる。では意味のある連想だけを的確に選択するにはどうするのか？そのための方法として、ノードの変化の確率が低く、かつ同時に変動が観測されたものを最優先で選択する。

## 典型的な例としての観測結果による連想候補

観測とは、観測された状態を示すノードの部分集合が活性化されることである。この活性化は、典型的には現在の時空間をノードと観測値を示すノードとの写像連結を行う作用であり、基本的に観測ごとに生成される。

## 6.2 連想形成と条件の付加



仮定ベクトル間の差分

連想はmapからのandを行うための条件である2つのノードを選択、あるいは生成する必要がある。これらの条件ノードは、仮定ベクトルの差分から生成される。上の図ではAV1とAV2との差分であるノードF,ノードCがそれぞれ条件となる。

## 6.3 伝搬確率、経験数の算出

連想リンクは確定なリンクではなく、観測された同時活性化の確率からその連想の経験数 $N$ を決定することができる。

$$N^{11} = \log_2(P_Y)$$

この算出方法は以下の通りである。未計測で不確定なリンク、つまり想定伝搬確率 $P = 0.5$ の連想リンクにおいて、現実には $P = 1$ が $N^{11}$ 回観測された結果、連想対象のYへのリンクの過去の伝搬確率 $P_Y$ が計測されたと考える。

$$0.5^{N^{11}} = P_Y$$

つまりは、 $P = 0.5$ が $N$ 回観測されたリンクとみなすことができる。

$X=1, Y=1$ が観測された時の連想確率は $P' = 1$ となる。その結果、初期値となる $P^{11}, N^{11}$ は以下の式になる。 $X=1, Y=0$ の時は $P = 0$ となる。



$$N^{11} = \log_2(P_Y)$$

$$P^{11} = \frac{0.5 + P'N^{11}}{1 + N^{11}}$$

X=0,Y=0が観測された時は、 $P^{00}$ 側にのみ作用する。この場合も連想確率は $P' = 1$ となる。その結果、初期状態となる $P^{00}, N^{001}$ は以下の式で表される。X=0,Y=1の時は $P' = 0$ となる。

$$N^{00} = \log_2(1 - P_Y)$$

$$P^{00} = \frac{0.5 + P'N^{00}}{1 + N^{00}}$$

この経験数の算出は、めったに発生しない事象間の変動連想は関連の確実性も高いということを意味する。

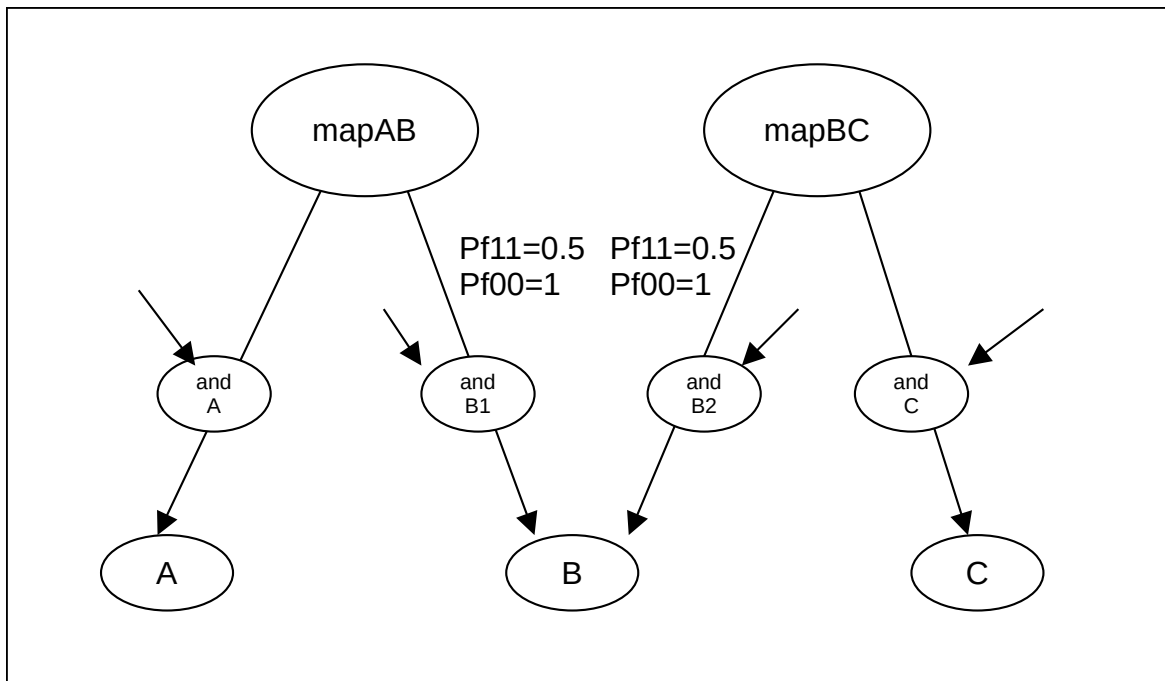
# 7 確率的自律論理生成アルゴリズム

このアルゴリズムは、ノードとリンクを自律的に生成、修正するための一般的な手法である。

## 7.1 「条件」リンク分割と論理演算ノード挿入

### 連想リンクへのフィードバック

連想リンクは形成された時点では不確定であり、フィードバックによって伝搬確率が補正されていく。その結果伝搬確率が0でも1ではない不確定な値となったリンクを、条件を追加して0あるいは1の確定確率にする。そのための条件選択の方法について解説する。



連想リンクへのフィードバック

AとCからそれぞれBへと連想が形成されている。連想はそれぞれMap1ノードとMap2ノードによって結合されている。

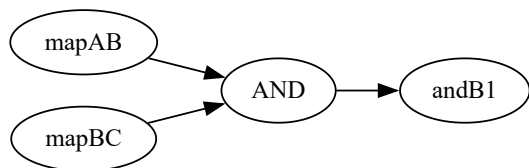
そして、Bへの2つの連想リンクの伝搬確率 $P_{f11}$ が、同一の仮定ベクトルに対するフィードバックによって補正されて不確定確率となっている。この伝搬確率を1か0の確定値に補正するために、Bのリンクに対して条件を形成する。2つの不確定リンクのうちの片方に論理演算が挿入され、もう片方が条件となる論理演算の入力となる。同一の仮定ベクトルに対するフィードバックでなければ論理演算は形成されない。

## ANDノード

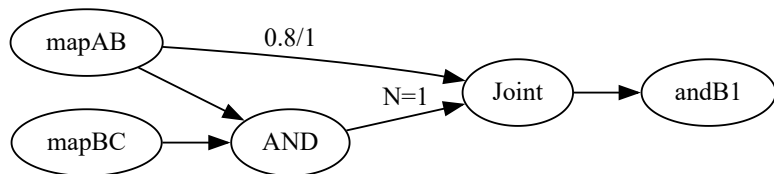
リンクへのフィードバックに対して、リンクを補正するための条件付けを行う。フィードバックが行われたリンクはノードAからノードBへのリンクであるとする。以下の例では、 $P^{11}$  の伝搬確率がフィードバックによって0.8に減少したとみなす。

$$A \rightarrow B \quad \begin{cases} P^{11} = 1 \rightarrow 0.8 \\ P^{00} = 1 \end{cases}$$

このフィードバックに対応する条件Cを使用して、条件を付加する。



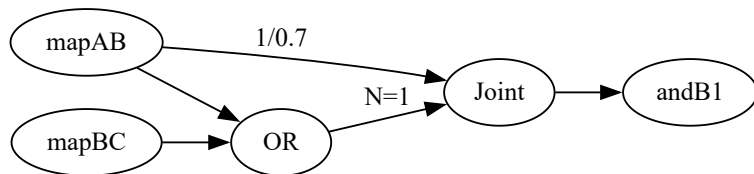
正確には、条件Cは一つの観測の基づくものであって、既存のリンクの全てを代替できない。そのために既存の不確定リンクを維持してJointで結合することになる。



## ORノード

$P_{00}$  に対してフィードバックが行われたら、その場合は条件ノードCをORで結合する。

$$A \rightarrow B \quad \begin{cases} P^{11} = 1 \\ P^{00} = 1 \rightarrow 0.7 \end{cases}$$

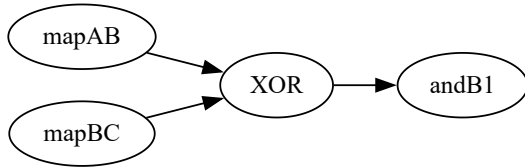


## XORノード

$P_{11}, P_{00}$  双方に対してフィードバックが行われた場合は、リンクはランダムとなり、基本的には無効となる。ただし、2つのリンクで  $P_{11}, P_{00}$  のフィードバックが同時に行われた場合は、XORノードでの結合の候補となる。

$$A \rightarrow B \quad \begin{cases} P^{11} = 1 \rightarrow 0.5 \\ P^{00} = 1 \rightarrow 0.5 \end{cases}$$

$$C \rightarrow B \quad \begin{cases} P^{11} = 1 \rightarrow 0.5 \\ P^{00} = 1 \rightarrow 0.5 \end{cases}$$



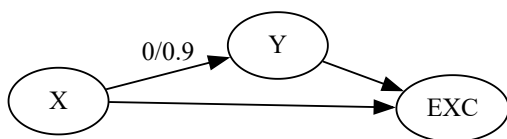
## NOTリンク

$P_{11}, P_{00}$ の双方の伝搬確率が0付近となる場合は、NOTリンクとなる。

$$\neg X \rightarrow Y \quad \begin{cases} P^{11} = 0.1 \\ P^{00} = 0 \end{cases}$$

## Exclusiveノード

Exclusiveノードは2変数においてはXORと同じ挙動を示すが、多変数ではすべての要素が完全に排他的であるという点異なる。このExclusiveノードの目的は自然界に頻発する排他的な事象を効率的に表現するためである。 $P_{11}=0$ が条件だが、 $P_{00}$ は0以上（典型的には1近く）である必要がある。



## 7.2 「因果」 ポジティブフィードバックからのリンクノード活性化と、連想対象化

以下のリンクへのフィードバックが発生した場合、リンクの前後のノードA,Bから、リンクノードが生成される。

$$A \rightarrow B$$

# リンクノードと等価な論理演算

AからBへのリンクにフィードバックされた結果、活性化されるのはリンクノードLとなる。AからBへのリンクをLを用いた論理演算に書き換える。すなわち、リンクノードLの正体は、リンクに挿入されるAND演算に対する新規の入力ノードである。 $P_A = 1$ に対して $P_B = 1$ が $P_B = 0$ に変化した場合は以下の論理演算を挿入する。

$$B = A \text{ AND } L$$

となる。 $P_A = 0$ に対して $P_B = 0$ が $P_B = 1$ に変化した場合は、以下の論理演算を挿入する。

$$B = A \text{ OR } L$$

さらに、 $P = 1$ と $P = 0$ 双方に対する変動がフィードバックが観測された場合は、XORノードによるリンクノードを実装できる。リンクノードとXORの入力とは便宜上NOTリンクで結合される。

$$B = A \text{ xor } \neg L$$

活性値の衝突によるフィードバックが発生したら、リンクノードへと逆に伝播される。

## リンクの伝搬確率の確定から、リンクノードの生成へ

ANDを用いたリンクノードへの逆伝搬の確率は以下の式になる。 $P_A$ 、 $P_B$ をリンク前後の確率とし、 $P_L$ をリンクノードの確率とする。

$$P_B = P_L P_A$$

リンクノードに伝搬確率は以下の式になる。ただし $P_A = 0$ 以外で定義されることに注意する。

$$P_L = \frac{P_B}{P_A}$$

リンクノードへの確率伝搬は、順方向の伝搬と異なり変動をそのまま伝搬することができない点に注意する必要がある。

仮定ベクトルによる伝搬集合は、写像の逆伝搬と類似した考え方で代入で伝搬する。Aに対して伝搬された $P = 1$ と $P = 0$ の2つの伝搬集合を合成して、リンクノードへと伝搬する。写像の逆伝搬と同じように、 $P = 0$ のときのリンクノードへの伝搬確率は不定であるが、リンクノードに伝搬された仮定ベクトルが等しい伝搬確率を持つリンクに対して代入を行う。

さらに、XORの逆方向伝搬からリンクノードへの伝搬確率を求める。まずは、XORの論理演算の式を用いる。

$$P_B = P_L P_A + (1 - P_L)(1 - P_A)$$

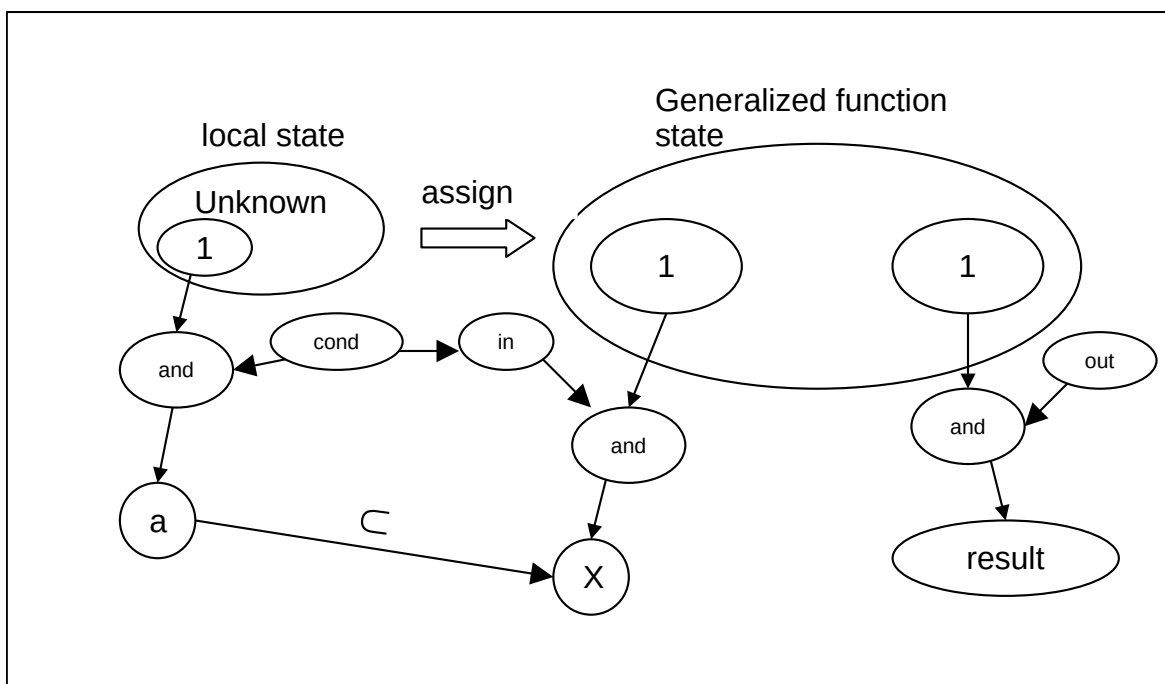
$$P_L = \frac{P_A + P_B - 1}{2P_A - 1}$$

この式は、 $P_A, P_B$ の確率が同じならば1に、相補的ならば0になる( $P_A \neq 0.5$ であることが条件)。

XORのリンクノードのもう一つの特徴は、仮定ベクトル要素の相殺が厳密に可能であるという点である。 $P = 1$ と $P = 0$ の相補的な伝搬集合が同一の仮定ベクトルを起点にしている、仮定ベクトル要素の値が相補的である場合は、仮定ベクトル要素の統合が可能になる。

## 7.3 「代入」 伝搬集合的に包含関係にあるノード間の結合

代入とは、複数のノードに到達したそれぞれの活性値に対して、それぞれの仮定ベクトルが包含関係であることが確認できたら、ノードの間で活性値全体の伝搬を行うことである。



仮定ベクトルによる状態間の代入

図では複数のStateの間で代入が行われている。この代入の成立条件を説明する。

localstateノードは値に対する部分状態を包含しているが、それ以外の部分が不確定である。ここで、localstateノードの値aに対して、functionstateノードには値aを包含する集合Xを持つため、functionstateノードはlocalstateノードを包含すると見なしても矛盾がない。この結果、functionstateノードはResultノードを部分状態として包含する。

function stateノードにもう1つ部分状態として包含するResultノードは、localstateノードには無い

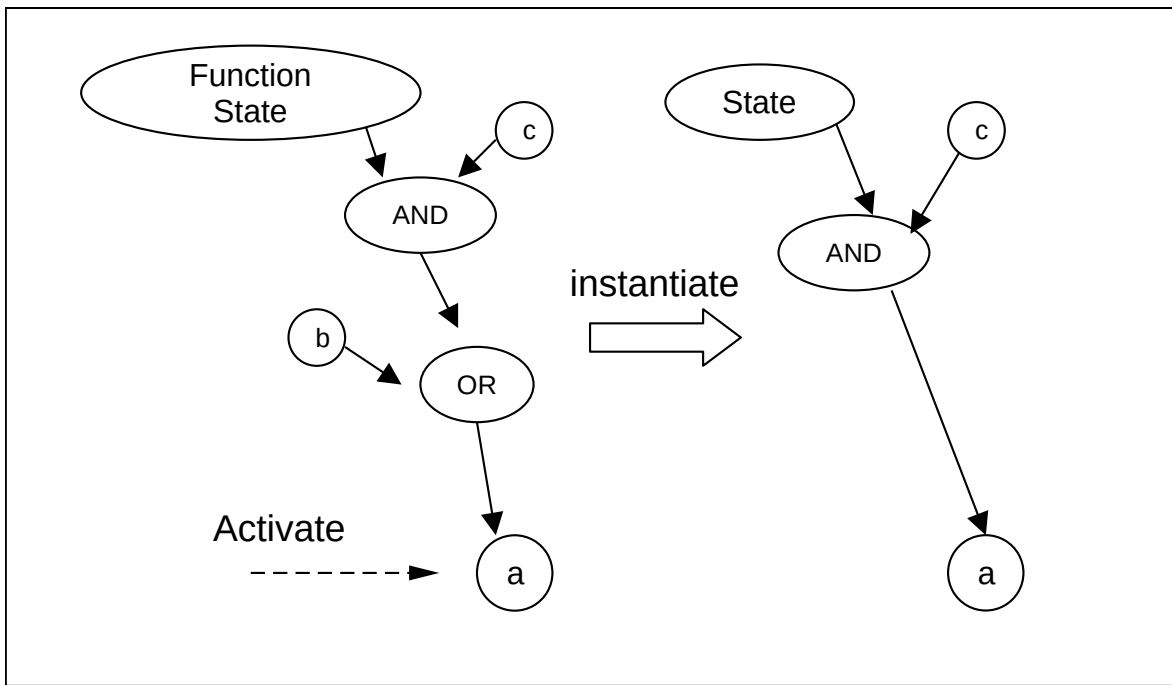
ものであるが、localstateノードの未定義部分にも存在すると推定しても矛盾がないと考えられる。このResultは、次の「インスタンス化」でlocalstateノードに対して追加が可能になる。

## 7.4 「インスタンス化」 伝搬部分集合によるネットワークの一部のインスタンス複製

ネットワークの一部を縦に分割して部分集合をとり、簡略化されたネットワークをインスタンスとして生成する。インスタンス化で生成されたリンクは、既存のリンクと構造的には変わらないが、多数のリンクの出力の選択が省略できる。

このインスタンス化を行うのは、起点の部分集合と終点の部分集合の間で、同じ伝搬集合に対する伝搬確率が定まったときであり、その経路のネットワークの伝搬集合がORなどで大きくなっているものである。起点と終点の間の経路全体を伝搬集合で分離する。

入力されたStateに対して、関数の結果の値をStateに加えるような目的に用いることができる。



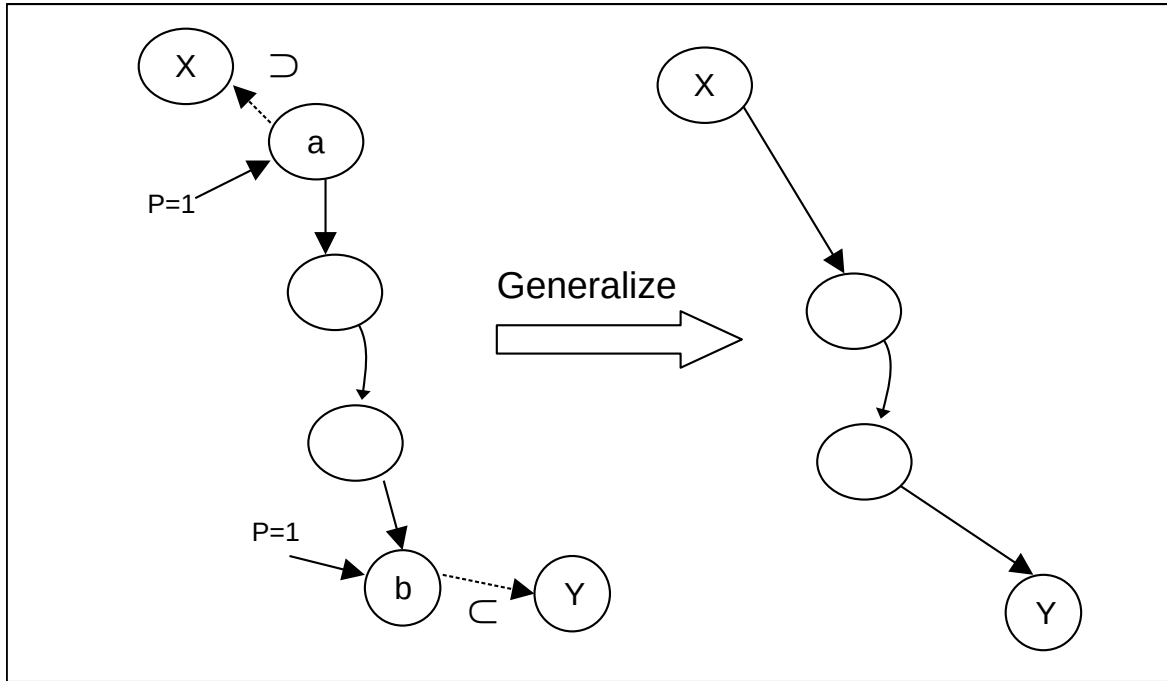
ネットワークの部分インスタンス化

## 7.5 「一般化」 伝搬部分集合によるネットワークの一部の一般化複製

成立したネットワークの一部に対して、起点の包含集合と終点の包含集合同士で、より集合的に一般化されたネットワークとして複製する。これが一般化である。インスタンス化と類似して

いるが、ネットワークの伝搬集合が完全に観測されていない時点でも実行される。つまり、これは暫定的なネットワークであり、後にフィードバックによって修正される。

この一般化を行うのは、起点の部分集合と終点の部分集合の間で、伝搬が確定したときである。このとき、起点と終点の間の経路全体を、集合としてある程度拡大して分離する。特にXの部分集合であるaは、aよりも集合が大きい変数Xに置き換える。bも同様に変数Yに置き換える。



ネットワークの部分一般化

## 7.6 「選択」 多数のリンク伝搬の選択制御

あるノードに対して、リンクは大量に接続されうる。とくに、関数間の接続などでは、その数は万単位以上になりうる。探索時間の最小化の為に、リンク伝搬の選択制御を行い、必要なリンクだけに対して伝搬する必要がある。ここで問題となるのは、それらの大量のリンクは本来は伝搬確率が確定的であり、論理演算によるリンク制御を行うと伝搬確率が変動する。この問題を解決するために、論理演算による制御とは別にリンク選択ノードを生成する。

リンクの選択は、リンク選択ノードを活性化する。この活性化されたリンク選択ノードとそれ以外のネットワークの状態とを変動連想で連結していく。典型的には、関数の動作と関数の入力とを変動連想で連結して、関数の入力リンクをリンク選択ノードで選択を行う。

リンク選択ノードは、SOLのネットワークそのものの部分集合を連想対象とすると考えることもできる。



## 7.7 「収斂」 リンクの最適化

2つの経路と確率とが一致するポジティブフィードバックが発生すると、伝搬集合的に小さくかつ観測数が大きい経路のリンクは削除される。SOLのリンクの最適化に用いられる。「インスタンス化」の逆の作用であるが、利用されないネットワークに対して行われる。

$$(A \& (B|C) \& D) | (A \& (B|C)) = (A \& (B|C))$$

## 7.8 「統合」 同一論理の論理式ノードの統合

直列に結び付けられたリンク前後のノードがAND同士などの同一種類のノードであった場合、かつノード間のリンクの確率が1である場合、ノードを結合する。異なるAND要素があれば、異なる要素だけを抽出して分離する。論理ネットワークの最適化に用いられる。

$$A \& (B \& C) = A \& B \& C$$

$$A | (B|C) = A | B | C$$

単一ノードからリンクで直接接続された複数の同種のノード同士は、他の入力があれば統合を試みる。

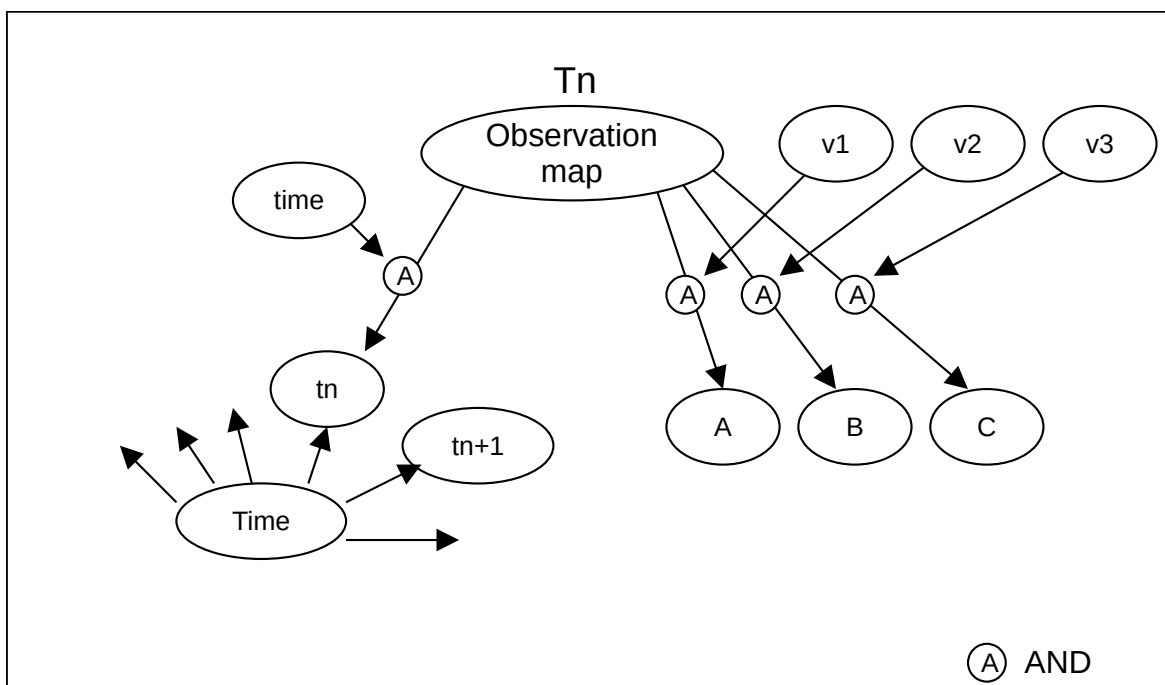
$$(A \& B \& C), (A \& B \& C \& D) = (A \& B \& C) \& D$$

## 8 順序回路生成

写像による状態の概念を階層的に用いることにより、一般化された状態間の回路を自律生成する。さらに状態を変数などで一般化することにより、汎用的に利用できる関数を生成する。

### 8.1 観測関数

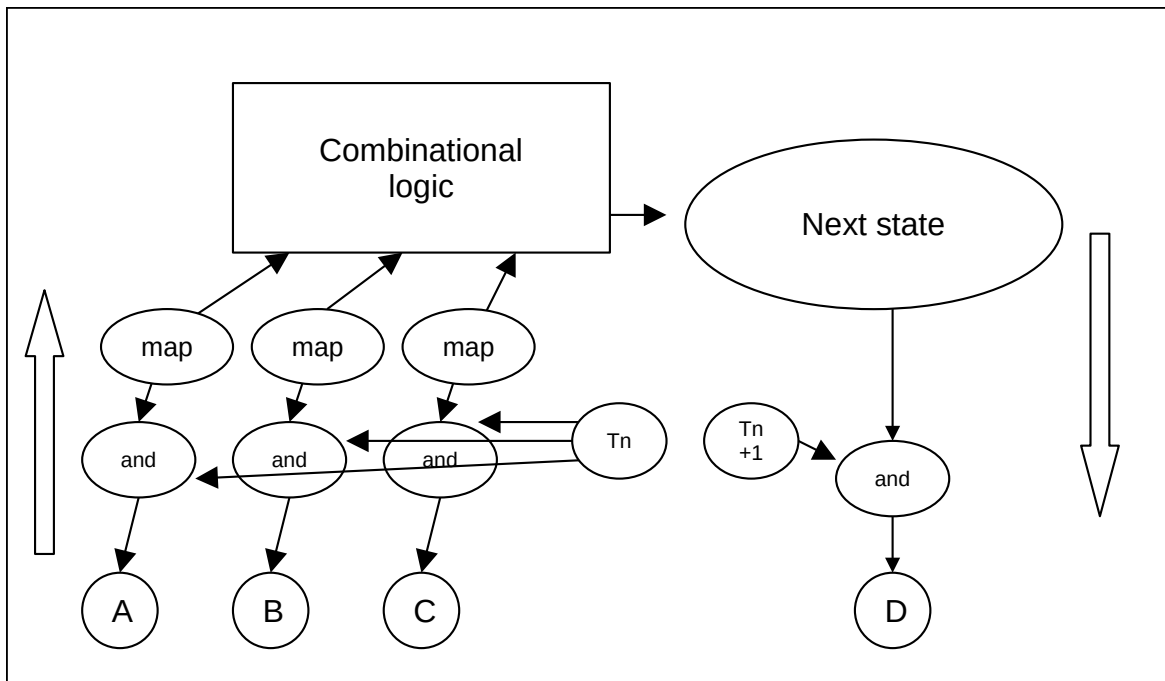
状態観測関数は、観測した現在時間 $T_n$ と、同時に観測された結果A,B,C,Dとの連想を形成する。現在の時間に同時に観測された結果同士がさらに因果関係として写像で連結され、それらの間の論理的な関連が観測される。



観測

### 8.2 状態遷移生成

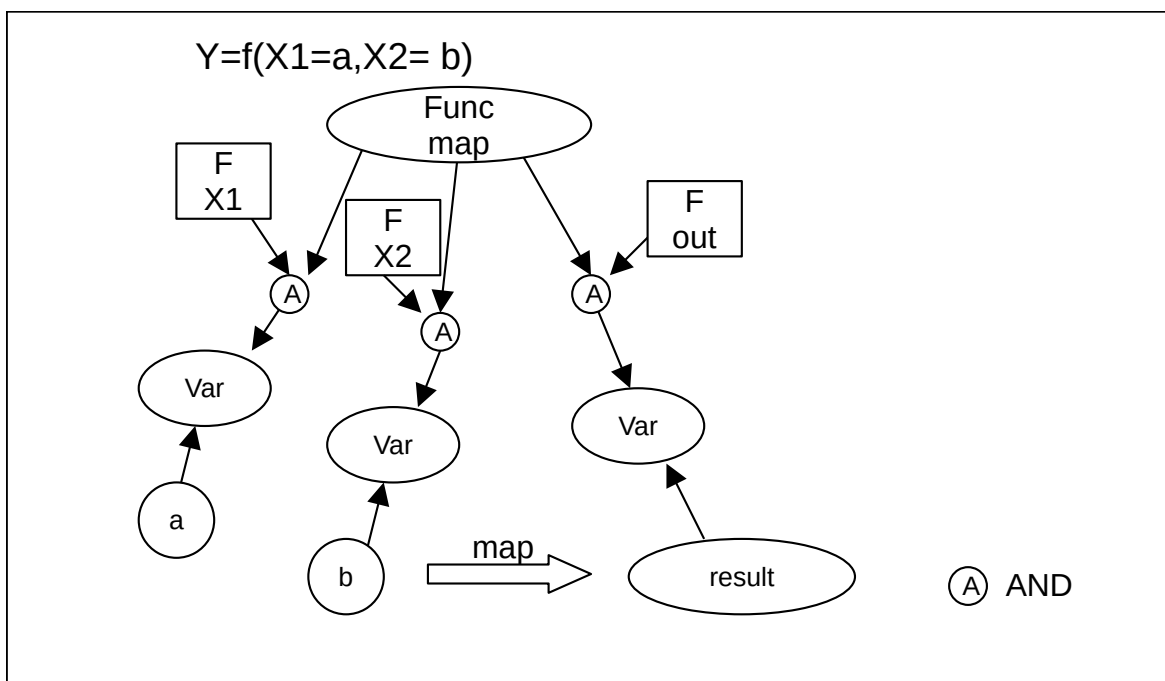
時系列の状態遷移は、時間を差分としたときの写像から形成される。時刻 $T_n$ に対するA,B,Cと、時刻 $T_{n+1}$ との写像がフィードバックされて、A,B,Cの間の論理回路が形成される。



写像による順序回路

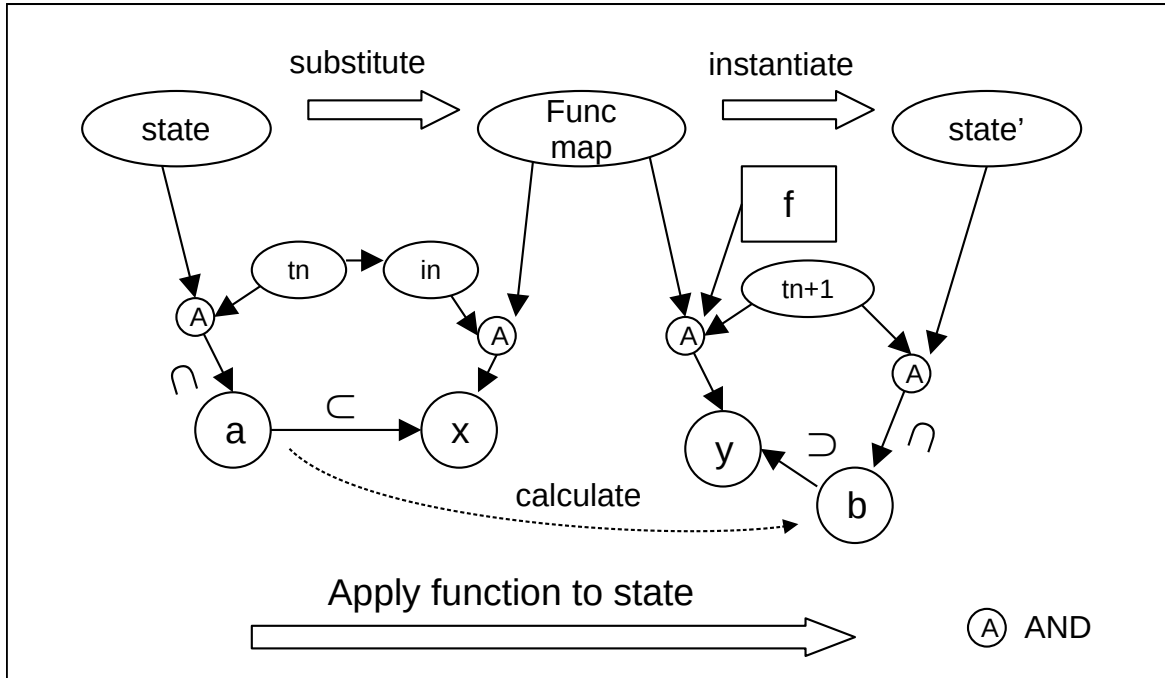
## 8.3 一般化ノードから関数生成

a,b,resultなどの観測されたノードの間で形成された写像は、リンクへの $P^{00}$ へのフィードバックにより拡大されて抽象的なノードに変化する。たとえば値aが「一般化」されて変数X1となる。同様に値bが一般化されて変数X2となる。こうして一般化されたX1,X2,outの間の連想こそが関数と予想される。なお、個別のa,b,result同士の関連は別の写像で表現し、この別の写像を関数で選択する。



## 8.4 関数適用

一般化で形成された関数は、入力値を持つステートを代入する。関数は代入されたステートよりも伝搬集合的に大きいとみなされるため、関数の結果の値も入力ステートに含まれるとみなす。これがステートへの関数の適用である。そして適用された結果は、インスタンス化で部分的に複製されて元のステートに追加される。

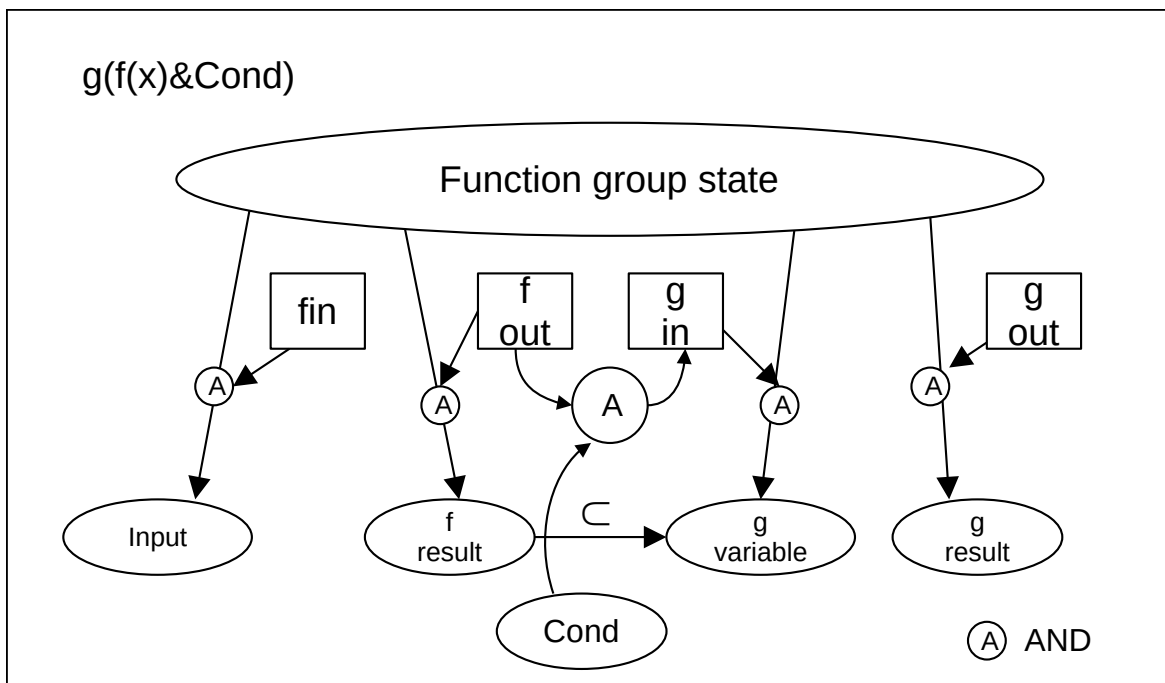


関数の適用

関数の結果は、一致を示すリンクノードも用いることができる。すなわち一致判断をBooleanに変換する条件判断も実装が可能になる。

## 8.5 関数のグループ化

生成された関数を連続適用する方法を示す。関数fと関数gとを連続適用するために、f出力とgの入力とを接続するネットワークを追加する。

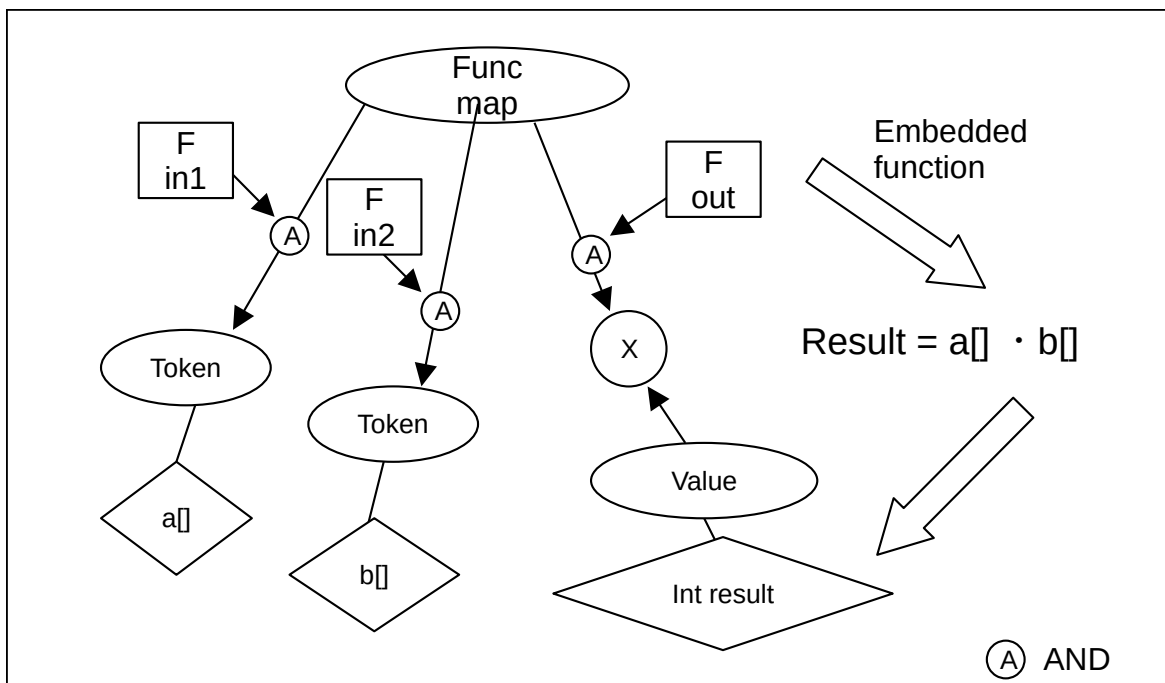


関数のグループ化

関数を条件次第で連結するように、関数fの出力に条件とANDノードを挿入して、関数gの入力に接続する。この条件を別の関数の結果とすることにより、再帰を含むあらゆる関数の組み合わせを実現できると考えられる。

## 8.6 組み込み関数とその利用

組み込み関数とは、入力ノードに対して出力ノードだけを活性化する外部関数と定義する。入力に対する作用は組み込み関数の中で定義する。SOLの外部との入出力にも利用できる。組み込み関数で用いられるノードは、Boolean値であるが、組み込み関数はノードに対応する実際のオブジェクトを取得することができる。具体的にはIntegerなどのスカラ値、ベクトル値、オブジェクトなどを対応させて、組み込み関数が演算に利用する。結果は結果の値に相当するノードをその都度生成して、組み込み関数に対応する実体を結合させる。以下の例では文字Tokenの持つ実数ベクトル値を用いて、内積を組み込み関数で計算してResultの値を生成し、相当するノードを生成している。[2]



外部で定義される組み込み関数

## 9 結論

以上の内容を統合して要約すると、この自己組織化論理は以下の特徴を持つ。

1. 双方向論理は、集合間の論理演算に逆伝搬を適用することで写像の概念を実現する。写像を用いれば、時空間の重複がない任意の集合同士の関連を表現できる。これにより、順序回路が論理回路だけで記述できる。
2. 論理ノード間の接続リンクに $P^{11}$ 、 $P^{00}$ の二項組の伝搬確率を設定し、リンクの双方向伝搬を可能にすることで、双方向二項確率ベイジアンネットワークとなる。逆伝搬はベイズの定理そのものとなる。写像を通過した双方向伝搬は、任意の2つの集合間の厳密な伝搬確率計算を可能にする。
3. 仮定ベクトルによる集合確率伝搬は、リンクや写像を通過する伝搬部分集合を仮定ベクトルで厳密に管理し、仮定ベクトルの部分一致や差分を用いることで、関連のある任意の2つのノード間の集合包含関係を算出できる。複数の確率伝搬が同一ノードで衝突した際に、双方の仮定ベクトルが一致した場合、確率の一致、不一致に応じて双方のパスにフィードバックを行う。特に不確定リンクを確定値へとフィードバックする場合は一致を示すリンクノードを活性化させる。
4. 双方向二項確率ベイジアンネットワークは、リンクの過去の伝搬確率と観測回数とに基づき、確率変動分配階層フィードバックアルゴリズムを使用することで、自動的にすべてのリンク伝搬確率を正確にフィードバック補正する。
5. 連想は、同時に変動が観測された集合的に排他的なノード同士を確率的に結合して写像にする。連想の対象は観測された値だけではなく、フィードバックで発生した論理演算の条件ノードも同様に連想対象となる。この作用により、どのような部分集合の間でも連想を形成することができる。
6. 確率的自律論理生成アルゴリズムは、連想で結合されたリンク確率へのフィードバック結果に応じて、論理演算と写像とを追加することによって、確率100%あるいは0%の確定的デジタル論理を自動的に追加生成する。 $P^{11}$ 、 $P^{00}$ のペアの伝搬確率を用いることで、論理演算の正確な挿入が可能になる。 $P^{00}$ の変動に対するORノードの挿入は、定数を変数へと一般化する作用でもある。
7. 時間に対する値の変動に対して連想を形成し、連想へのフィードバックに対してさらに論理演算を追加していくことにより、メモリなどの入力と出力の間で一般化された論理回路を生成することが可能になり、一般的な順序回路が自律形成されていく。一般化された順序回路は何度も利用されて関数となる。
8. 写像を階層的に用いれば、一般的なソフトウェアの階層的なデータ構造と関数とを表現できる。これらの写像の間で伝搬集合の包含関係を管理することにより、データ構造に対する

パラメータの一致を判定して、関数の結果をデータ構造に反映することができる。そのためにSOLで定義した写像間の「代入」と「インスタンス化」を用いる。

このSOLは確率、集合、写像などの数学的な基本原理のみに基づいて構築されている。生物のニューロンの模倣は行っていない。さらに、ニューラルネットワークの非線形活性化関数のような厳密ではないヒューリスティックスはほとんど使用していない。そのため、一般的な機械学習よりも厳密な数学理論に近いものであり、自律生成ソフトウェアがこのSOLの延長線上にあることはほぼ確信できる。ニューラルネットワークなどの既存の機械学習も、このSOLの一部の近似的な実装であるとすら考えられる。そのため、正確で安全な機械学習を目指すならば何らかの形でこのSOLの原理を導入するしかない。

実装による動作の実証、実装の効率化、簡略化、並列化などが今後の課題となる。また、SOLが論理回路やソフトウェアを網羅的に自律生成ができるかどうか、今後の研究課題になるだろう。

数理論理学や圏論等との関連も明白なので理論の一般化の余地がある。確率の伝搬の考え方は量子力学の経路積分などとの関連も強く、物理学との何らかな形での統合を行うことで相互の正当性の証明になると考えている。[3]



# Glossary 用語集

## SOL(Self-organizing Logic)

論理回路に相当するノードと二項確率を持つリンクとで構成される双方向ネットワークを自動生成するシステム

## 値ノード (value node)

論理演算の起点となる値に相当する。仮定によって活性化され、仮定ベクトルの起点となる。リンクで接続された論理演算からの逆伝搬も仮定の一種となる。

## 論理演算ノード(logic node)

複数の入力リンクの確率に対して論理演算を行い、出力リンクに結果となる確率を出力する。論理演算を行うと同時に、仮定ベクトルも合成する。

## 接続ノード (joint node)

複数のリンクの入力をそれぞれそのまま出力する。入力間では確率演算は行わない。

## 関数ノード (function node)

リンクの入力に対して外部関数を実行して、結果ノードを活性化する。

## リンク (link)

ノードの間を二項組の伝搬確率で結合する。確率を入力して確率を返す。逆方向の確率も別に定義する。

## リンクノード (linknode)

リンクの伝搬確率がフィードバックによって変動した際に、リンクに相当するノードを生成してリンク前後の値の比較結果を伝搬する。具体的には2入力のANDノードやXORノードの入力逆伝搬に相当する。リンクの伝搬前後の確率が等しい場合はリンクノードに1が伝搬される。リンクの伝搬前後の確率が一致しない場合はリンクノードに不確定値 (0と1との間の値)が伝搬される。

## リンク選択ノード (link selection node)

特定のリンクの伝搬を選択するためのノード。個々のリンクに対してそれぞれ選択ノードが存在する。このノードを活性化することにより、該当するリンクを優先的に選択する。

## SOLネットワーク (SOL network)

ノードとリンクから構成され、確率を伝搬するベイジアンネットワークの一種である。リンクには伝搬確率の重みがあるため、定義上グラフではなくネットワークとなる。論理演算ノードの存在と、論理演算の伝搬方向が双方向であるという点が特徴的である。

## 写像 (map)

写像を示すノードから、複数の部分集合ノードがリンクと条件ANDノードとを経由して連結される。この部分集合ノード同士の関係を一般的な写像とみなす。

## 仮定ベクトル (assumption vector)

特定のリンクの確率値を0と1のどちらかで仮定する。実値ノードへの暗黙の入力リンクを仮定することで伝搬起点となる。この仮定が複数集まって二値のベクトルとなる。論理演算で複数の仮定ベクトルが統合される。結合ノードで複数の仮定ベクトルが比較され、仮定ベクトルに重複があればフィードバックが実行される。

## 伝搬 (propagation)

リンクを通過して確率値を伝搬する。伝搬するのは常に起点からの確率値であり0から1の間の値となる。同時に仮定ベクトルも伝搬する。

## 逆伝搬 (reverse propagation)

論理演算の入力リンクを逆にたどる作用。論理演算によっては仮定ベクトルの統合が行われる。

## 伝搬集合 (propagating set)

ネットワークのノード、リンクを通過する断面に対する部分集合であり、仮定ベクトルだけで決定される。ノードの論理演算で作られる集合とは無関係となる。

## フィードバック (feedback)

ネットワークの双方向確率伝搬で、同一起点から同一終点へと2つの別の経路で到達したとき、2つのパスの伝搬確率と仮定ベクトルとを比較する。仮定ベクトルが重複していて、さらに伝搬確率が同一でない場合は、フィードバックによって2つのパスの伝搬確率が同一になるように補正する。その際に、観測数の少ない不確定なリンクを優先的にフィードバック補正する。

## 作用係数 (effect coefficient)

リンクの変動が、リンクが伝搬された結果に対してどのように作用するかを示す。具体的には、リンクからフィードバックの衝突点までの伝搬確率が1であれば1であり、NOTリンクなどで伝搬確率が0になる場合は0になる。

## ウェイト (weight)

個別のリンクの変動が、リンクが伝搬された結果に対してどの程度作用するかを示す値である。リンクの伝搬確率( $P^{11}$ あるいは $P^{00}$ の値)が0か1に近ければウェイトは0に近く、伝搬確率が0.5に近ければウェイトは最大になる。リンクのフィードバック回数が多ければウェイトは減少する。

## 変動連想 (association between fluctuations)

観測値が同時に変動したノード同士を写像で連結する。同時の変動とは、具体的には仮定ベクトルの同じ要素の変動前後の確率値がそれぞれ観測されたことを意味する。

## 代入 (substitution)

同じ仮定ベクトルが到達した複数のノード同士を仮想的に包含関係とみなす作用。たとえばパラメータなどの部分的な一致が確認されただけでも、矛盾がなければノードの集合全体が関連があるとみなす。

## インスタンス化 (instantiation)

ネットワークの一部をインスタンスとして複製する。伝搬集合が確定した部分だけを抽出するので中途の論理演算の一部が省略される。

## 一般化 (generalization)

ネットワークの一部を一般化して複製する。観測されたノードよりも集合の大きなノードを用いたネットワークを生成する。伝搬集合の大きなノードはまだ一部だけしか観測されていない

め、この時点では確率的に不確定である。

## **組み込み関数 (embedded function)**

SOLの外部との入出力を行うために用意される。入力への確率伝搬で動作を開始して、入力に相当する実値ノードを使用して、結果に相当する実値ノードに確率を伝搬する。数値計算などもこの組み込み関数で実行される。

# 参考文献

[1] Artificial Intelligence A Modern Approach

Stuart Russel, Peter Norvig

[2] Attention Is All You Need

Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Lukasz Kaiser, Illia Polosukhin

[3] Pictureing Quantum Processes A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning

Bob Coecke, Aleks Kissinger