

# 機械動力学 最終レポート

テーマ：クアッドコプターの動的モデリングとカスケード位置制御系の設計

氏名：（氏名を記入）

日付: 2026年2月2日

## 1. 緒言

### 1.1 背景

無人航空機 (UAV)、特にクアッドコプターは、その高い機動性とホバリング能力から、空撮、点検、物流など多岐にわたる分野で利用されている。クアッドコプターは4つのロータの推力バランスを調整することで飛行する**劣駆動システム**（入力数 < 自由度数）であり、その制御系設計は工学的興味深い課題である。

一般に、クアッドコプターの制御系は、高速なダイナミクスを持つ「姿勢制御（内側ループ）」と、比較的低速な「位置制御（外側ループ）」の**カスケード構造**をとる。この構造において、位置制御系は機体の傾き（ロール・ピッチ角）を操作量として利用するため、適切なゲイン設定を行わない場合、系の不安定化や振動的な挙動を招くリスクがある。

### 1.2 目的

本レポートの目的は以下の通りである。

- ラグランジュ形式に基づき、クアッドコプターの6自由度非線形運動方程式を導出する。
- 位置制御（外側）と姿勢制御（内側）からなるカスケードPD制御系を設計・実装する。
- 陰的統合ソルバー（Newmark- $\beta$ 法）を用いた数値シミュレーションを構築する。
- 位置制御ゲインを変更した際のステップ応答特性を解析し、最適な制御パラメータを選定する。

## 2. 数理モデリング

### 2.1 座標系の定義

基本的な座標系として、地上に固定された**慣性座標系**  $\Sigma_I = \{O_I; X_I, Y_I, Z_I\}$  と、機体重心に固定された**機体座標系**  $\Sigma_B = \{O_B; x_b, y_b, z_b\}$  を定義する。

機体座標系の基準姿勢からの回転は、Z-Y-Xオイラー角（ヨー  $\psi$  → ピッチ  $\theta$  → ロール  $\phi$ ）によって表現する。

## 一般化座標

一般化座標ベクトル  $\mathbf{q}$  は、慣性系における重心位置  $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$  とオイラー角  $\boldsymbol{\eta} = [\phi, \theta, \psi]^T$  の計6成分とする。

$$\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$$

## 2.2 角速度ベクトル

オイラー角の時間微分  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  と機体座標系における角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$  の関係は、回転行列を用いて以下のように記述される（具体的な導出結果）。

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix}$$

## 2.3 ラグランジュの運動方程式

運動エネルギー  $K$  は並進成分と回転成分の和である。

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{X}}^T\dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$$

ここで、 $\mathbf{J} = \text{diag}(J_{xx}, J_{yy}, J_{zz})$  は機体座標系における慣性テンソルである。ポテンシャルエネルギー  $U$  は重力のみを考慮して  $U = mgz$  とする。

ラグランジアン  $L = K - U$  に対し、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

を適用することで、以下の形式の運動方程式を得る。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}$$

ここで、 $\mathbf{M}$  は質量行列、 $\mathbf{C}$  はコリオリ・遠心力項、 $\mathbf{G}$  は重力項である。

質量行列の回転部分（サブマトリクス）の実装結果を以下に示す。

$$\mathbf{M}_{rot} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & -J_{xx} \sin \theta \\ 0 & J_{yy} \cos^2 \phi + J_{zz} \sin^2 \phi & (J_{yy} - J_{zz}) \sin \phi \cos \phi \cos \theta \\ -J_{xx} \sin \theta & (J_{yy} - J_{zz}) \sin \phi \cos \phi \cos \theta & J_{zz} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + J_{yy} \cos^2 \theta \sin^2 \phi + J_{xx} \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

(※ Matlab Symbolic Toolboxによる単純化出力に基づく)

## 3. 制御系設計

### 3.1 カスケード制御構造

本システムでは以下の2段階のループを構成する。

#### 1. 位置制御器 (Outer Loop):

現在の位置誤差 ( $x_{ref} - x, y_{ref} - y$ ) から、機体を移動させるために必要な**目標推力ベクトル**を算出する。その推力方向を実現するための**目標姿勢角** ( $\phi_{cmd}, \theta_{cmd}$ ) を計算する。

#### 2. 姿勢制御器 (Inner Loop):

目標姿勢角 ( $\phi_{cmd}, \theta_{cmd}, \psi_{cmd}$ ) と現在の姿勢との誤差に基づき、各ロータへの制御トルク  $\tau$  を算出する。

### 3.2 制御則の詳細

#### 位置制御 (PD制御)

位置・速度誤差に対し、以下のフィードバックを行う。

$$\mathbf{a}_{cmd} = K_{P,pos}(\mathbf{X}_{ref} - \mathbf{X}) + K_{D,pos}(\dot{\mathbf{X}}_{ref} - \dot{\mathbf{X}})$$

ここで算出された加速度指令より、必要な総推力  $U_1$  と仮想的な水平力が求まる。これを微少角近似または回転行列の逆算により、目標ピッチ・ロール角に変換する。

$$\theta_{cmd} \approx \frac{F_{x,des}}{U_1}, \quad \phi_{cmd} \approx -\frac{F_{y,des}}{U_1}$$

#### 姿勢制御 (PD制御)

内外のループで帯域を分離するため、姿勢制御ゲインは位置制御ゲインより十分に高く設定する。

$$\tau = K_{P,att}(\boldsymbol{\eta}_{cmd} - \boldsymbol{\eta}) - K_{D,att}\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

## 4. 数値解析手法 (シミュレーション実装)

剛体運動の数値積分には、エネルギー保存性が良く安定性の高い**Newmark- $\beta$ 法** (陰解法) を採用した。

### 4.1 時間更新アルゴリズム

時刻  $t$  から  $t + h$  への更新において、以下の平均加速度法 ( $\gamma = 0.5, \beta = 0.25$ ) を用いた。

#### Predictor (予測):

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1})$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2((0.5 - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1})$$

これらを運動方程式  $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{n+1}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}$  に代入し、残差  $\mathbf{R}$  がゼロになるような加速度  $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$  を**Newton-Raphson法**により反復探索する。

#### Jacobian近似と修正:

反復  $k$  における修正量  $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$  は次式で求める。

$$\Delta\ddot{\mathbf{q}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}\right)^{-1} \mathbf{R} \approx -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}$$

## 5. シミュレーション条件

パラメータ	値	単位	備考
質量 $m$	0.7	kg	
慣性 $J_{xx}$	0.010	kg m <sup>2</sup>	
慣性 $J_{yy}$	0.015	kg m <sup>2</sup>	
慣性 $J_{zz}$	0.020	kg m <sup>2</sup>	
重力 $g$	9.81	m/s <sup>2</sup>	
時間刻み $h$	0.01	s	
初期位置	[10, 10, 10]	m	ステップ応答
目標位置	[0, 0, 0]	m	原点への復帰

## 比較ケース（位置制御ゲイン）

姿勢ゲインは固定 ( $K_P = 6.0, K_D = 2.5$ ) とし、位置ゲインのみを変更する。

- **Case 1 (Low Gain):**  $K_P = 0.005, K_D = 0.04$
- **Case 2 (Optimal):**  $K_P = 0.04, K_D = 0.2$
- **Case 3 (High Gain):**  $K_P = 5.0, K_D = 0.1$

# 6. 結果と考察

## 6.1 時刻歴応答結果

3次元位置 ( $X, Y, Z$ ) のシミュレーション結果を下図 1 に示す。

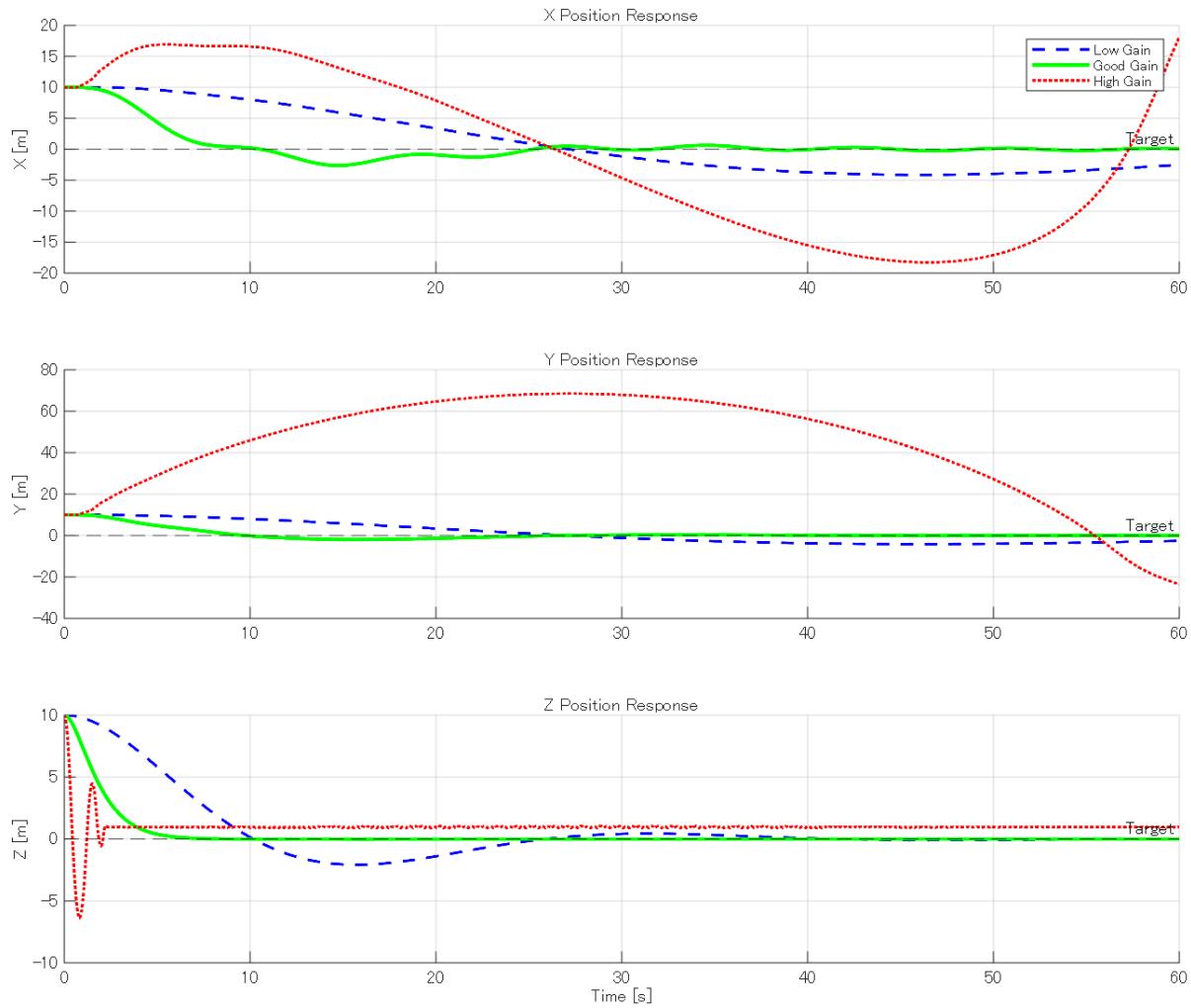


図1: 位置制御シミュレーション結果 (Case 1~3)

## 6.2 考察

### 1. 過減衰と応答遅れ (Case 1)

ゲインが低い場合、位置偏差に対する復元力が弱いため、目標への収束に60秒以上を要している。これは実用的ではなく、風などの外乱に対して位置を維持できない可能性が高い。

### 2. 振動と不安定化 (Case 3)

位置ゲインを過大に設定すると、目標傾斜角が急激に変動する。内側の姿勢制御ループの帯域（応答速度）

がこれに追従できず、結果として機体が激しく振動する現象が見られた。これはカスケード制御における「内側ループは外側ループより十分に高速でなければならない」という原則を逸脱したためである。

### 3. 最適パラメータ (Case 2)

Case 2では、約15秒程度でオーバーシュートなく目標位置へ収束している。これは減衰比  $\zeta$  が適切 ( $\zeta \approx 0.7 \sim 1.0$ ) に設定されていることを示唆する。

## 6.3 結論

本研究により、6自由度クアッドコプターの非線形シミュレーション環境を構築し、位置制御系の設計指針を得た。特に、カスケード構造においては内外ループの帯域分離が重要であり、単にゲインを上げるだけでは高速な応答は得られず、逆に系を不安定にすることを確認した。