

# 深層学習的手法を用いた 米国債利回りの予測とイールドカーブ推定

慶應義塾大学経済学部

中妻照雄研究会

高橋慶伍

2020 年 11 月 16 日

## 概要

国債の利回り及びその期間構造の形状は、債券取引や経済動向に関する重要な情報を私たちに提示している。国債の利回りは社債等の他の債券の利回りについてのリスクプレミアムを考える際の指標となる。またその期間構造は市場の将来の景気動向を表し、また、流通している国債の理論価格を考える際の指標となる。本論文は米国債の利回りとその期間構造を推定することを目的としている。予測手法には近年注目されている深層学習のモデル Long short-term memory(LSTM) を採用し、その際説明変数に経済指標を組み入れての予測を本論文では試みた。金利の期間構造モデルとして有名な Nelson-Siegel モデルと比較したところ LSTM を用いることの有意性は確認できたが、LSTM をベースとした場合での、経済指標を組み入れることの有意性ははっきりと確認できない結果となった。

Keywords: 米国債券・利回り・イールドカーブ・状態空間モデル・深層学習

## 1 はじめに

債券は国や企業が資金調達する際の手段の1つとして重要である。図1の2019年の全世界の債券と株式の発行額[1]を比較すると債券の発行額は約21.0兆ドルに対し、株式の発行額は5,405億ドルであり1度に取り引される額が大きいのが債券取引の特徴でもあるが、債券市場の規模の大きさと資金調達手段としての債券の重要性がわかる。債券の中でとりわけ取引されるのが国債である。国債は発行体が国であり債務不履行の心配がないため安全資産として運用できるためである。そしてその国債の中で一際注目されているのが、米国債である。利回りが他国の国債と比べて高いことや、基軸通貨がドルとなっていることもあり、米国内だけでなく世界各地の国・企業・個人投資家たちが流通市場の取引に参加している。2019年度の米国財務省発行のトレジャリーの新規発行額[2]は約3兆ドルであり、2019年度の日本国債の新規発行額[3]約32.5兆円と比較すると、米国債の取引規模の大きさがわかる。

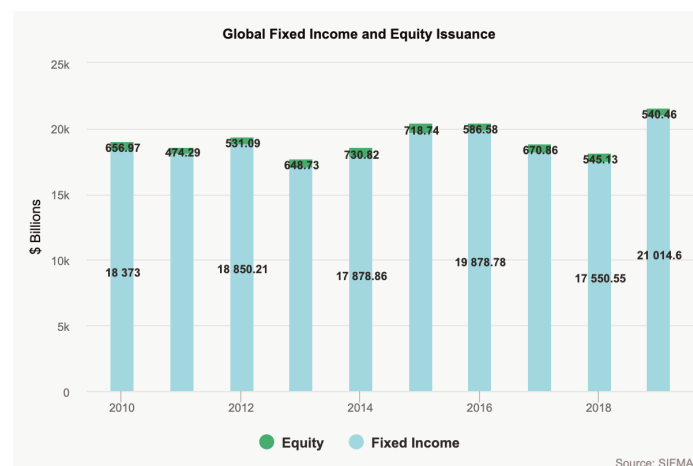


図1 全世界における債券発行額 (水) と株式発行額 (緑)

本論文は米国債の利回りとそのイールドカーブを月次単位で予測することを目的とする。具体的に検討した事柄は以下の通りである。

- ・ 深層学習のモデルの1つである Long short-term memory(LSTM) を採用し、イールドカーブを表現するモデルとして有名な Nelson-Siegel モデルと比較する。
- ・ 説明変数に米国の消費者物価指数や景気指数等の米国の経済動向を表す指標を採用し、過去の利回りのみで予測したモデルと比較する。

データは1980年1月から2020年3月までの月次データを対象とし、本論文では2年物・5年物・10年物・20年物国債の利回りを予測した。評価指標としてはテストデータにおける各月の2年物・5年物・10年物・20年物国債の利回りの実測値と予測値の二乗平均平方根誤差 (Root-Mean-Square-Error, RMSE) の合計とした。評価指標の値はNelson-Siegelモデルでは48.647、過去の利回りのみを説明変数としたLSTMでは7.034、過去の利回りと米国の経済統計の値を説明変数としたLSTMでは5.593であった。利回りの予測に深層学習的手法を用いることの有意性は確認できたが、経済統計の値を説明変数に組み入れることの有意性ははっきりと確認できない結果となった。

本論文の構成は以下に示す。第2章では利回り等の背景知識について述べる。第3章では先行研究と本研究の関係性について述べる。第4章では本研究で扱うデータについて述べる。第5章では本研究に用いるモデルについて説明し、第6章ではモデルの予測結果とその考察を行う。

## 2 導入

### 2.1 利回りと利回りの変動要因

利回りとは収益の年率を示すものである。債券の購入価格を  $P$ , 額面金額を  $F$ , 利付債であれば支払われる利子を  $C$  とすると、残存期間  $M$  年の国債の最終利回り  $y$  は、以下の  $y$  についての  $M$  次方程式を満たす値として求められる。

$$P - \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C+F}{(1+y)^M} = 0 \quad (1)$$

以上の式は  $y$  の  $M$  次方程式であり計算が複雑であるため、簡易的には以下のように求めることができる。

$$y = \frac{\frac{C}{F} + \frac{F-P}{M}}{P} \quad (2)$$

以上の式から利回り  $y$  と価格  $P$  は反比例の関係にあることと既発債の利回り  $y$  の変動は価格  $P$  の変動によることが分かる。

既発債の価格  $P$  は債券の流通市場の需要と供給で変化する。そしてその需要と供給の変動を考える際に経済や市場の動向を考える必要が出てくる。例えば株式市場のインデックスが上昇傾向にあるとき、債券は売られ流通市場では供給過多になり価格は下がり、その結果利回りは上昇傾向になる。また近年米国の中央銀行では、金融市場に資金を供給す

るために国債を買い入れるという非伝統的な金融政策を実施しているため、金融政策も価格の変化を考えるには必要となる。

## 2.2 イールドカーブ

イールドカーブとは、利回りが残存期間  $M$  の関数であると仮定し発行条件が同じ債券について縦軸に利回り、横軸に残存期間  $M$  をとってプロットしたものである。国債のイールドカーブは満期の異なるスポットレートをプロットしたものである。ただし市場で流通している満期が1年以上の国債は利付債であるので、2年以上の債券のスポットレートは別途で求める必要がある。

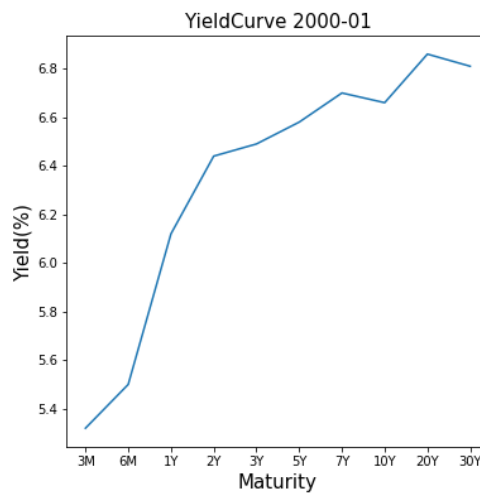


図2 2000年1月における米国債のイールドカーブ

国債のイールドカーブの形状は将来の景気予測を考える指標となる。通常は図2のように満期が長い国債程利回りが高くなる順イールドの形をしている。だが、稀に短期国債の利回りが高い逆イールドの形となることがある。この形状は政策金利の利上げの影響が背後にあるため、インフレの収束が考えられる。またイールドカーブが提示している利回りは、利子の利回りへの影響を除いたものであるため、国債価格の推定に用いることができ市場取引の際に重宝される。

### 3 関連する先行研究と本研究の特徴

イールドカーブの形状予測で有名なのは、Nelson and Siegel(1987)[4] の Nelson-Siegel モデルが挙げられる。Nelson-Siegel モデルはイールドカーブを短期・中期・長期の 3 つの項で表現できることに着目し、割引債の利回りをパラメトリックに表現することに成功した。満期まで  $T$  ヶ月のゼロ・イールド  $y(T)$  は以下のように表現される。

$$y(T) = \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp(-\lambda T)}{\lambda T} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - \exp(-\lambda T)}{\lambda T} - \exp(-\lambda T) \right) \quad (3)$$

(3) 式の  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  が時変であるとしたのが Diebold and Li(2002)[5] のダイナミックな Nelson-Siegel モデルである。満期まで  $T$  ヶ月の国債の  $t$  時点でのゼロ・イールドを  $y_t(T)$  と表現すると以下のように表現される。

$$y_t(T) = L_t + S_t \left( \frac{1 - \exp(-\lambda T)}{\lambda T} \right) + C_t \left( \frac{1 - \exp(-\lambda T)}{\lambda T} - \exp(-\lambda T) \right) \quad (4)$$

(4) 式の係数  $L_t, S_t, C_t$  それぞれイールドカーブの水準・傾き・曲率を表していると考えられている。また Litterman and Scheinkman(1991)[6] では、利回りに対して主成分分析を適用し特徴量を 3 つに変換した。第 1 主成分で 90% 程説明でき、第 3 主成分までではほぼ 100% 説明でき、第 1 主成分が水準、第 2 主成分が傾き、第 3 主成分が曲率を表していることを示した。

経済動向等のマクロ経済的要因を考慮した研究については Diebold and Rudebusch(2013)[7] や Diebold, Rudebusch and Aruoba(2006)[8] が挙げられる。彼らは利回りの変動要因として先に挙げた 3 つの要素だけでなく、製造業の稼働率や過去 12 ヶ月間の消費者物価指数の変化、物価インフレ率を組み入れた状態空間モデルを構築した。インパルス応答関数の結果から、イールドカーブの将来予測に対するマクロ経済変数の影響の大きさを示した。また国債ではないが、Mahler(2009)[9] では実質個人消費や石油価格等も説明変数に組み込んで S&P500 の変動を予測していた。

深層学習的手法を用いて予測した研究も多数存在する。Dunis and Morrison (2007)[10] では英・米・独の 10 年物国債の利回りの予測に多層パーセプトロンを用いた。ARMA モデル・状態空間モデルと予測結果を比較した結果、状態空間モデルより誤差は小さくなったが、ARMA モデルより誤差は大きくなった。次に Nunes, Gerding, McGroarty and Niranjani(2019)[11] ではこちらも多層パーセプトロンで推定したが、こちらは LASSO 回帰を行い予測に必要な特徴量選択をしている点で異なる。

以上のように利回りの予測に関しては (3) 式・(4) 式を拡張した状態空間モデルが用いられることが多く、深層学習的手法については多層パーセプトロンを用いる研究も多数存在した。そこで本論文では、予測モデルの 1 つに (4) 式のダイナミックな Nelson-Siegel モデルを予測モデルの 1 つとして採用し、状態空間モデルで表現・推定する。また、本論文で新たに試みる予測モデルは以下の通りである。

- 3 ヶ月から 30 年国債の利回りの月次データに対し主成分分析を行い特徴量を 3 次元に圧縮した後に、それらを説明変数とした時変係数の回帰モデルで利回りを予測する。
- 深層学習的手法は多層パーセプトロンではなく、より時系列予測に適した Long short-term memory(LSTM) を用いて予測する。その際説明変数として米国の経済動向や景気動向を示す経済統計を組み入れる。

## 4 データ

この章では本論文で扱うデータについて述べる。全て月次データであり、データの期間は 1980 年 1 月から 2020 年 3 月までである。

### 4.1 米国債利回り

データは米国財務省 [12] から取得した。本論文ではイールドカーブの推測も考慮して 2 年物・5 年物・10 年物・20 年物債券の利回りを予測対象とした。

	2 年国債	5 年国債	10 年国債	20 年国債
変数名	2Y	5Y	10Y	20Y
平均値	5.012	5.547	6.002	6.375
標準偏差	3.800	3.570	3.321	3.121
最小値	0.21	0.59	0.87	1.26
第 1 四分位点	1.615	2.470	3.360	4.165
中央値	4.730	5.080	5.360	5.870
第 3 四分位点	7.180	7.740	8.020	8.120
最大値	16.460	15.930	15.320	15.130

表1 利回りの基本統計量

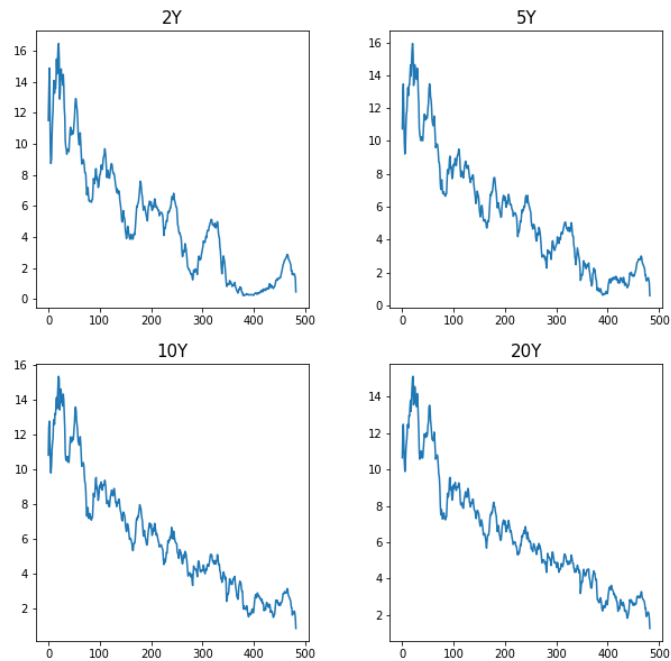


図3 利回りの推移

## 4.2 経済指標 (マクロ経済変数)

米国の経済動向・景気動向を示すものとして以下の表 3 に挙げられている経済指標を採用した。全て季節調整済みデータである。GDP は四半期毎に公表されるデータであるため、代わりに GDP の構成比の約 7 割を占める個人消費と住宅データに関するデータを取得した。また景気の動向を反映するものとして全米供給管理協会やミシガン大学が発表している景気指数と製造業の生産動向を示すデータを採用した。また金融政策との関わりも考慮した。具体的にはマネタリーベースやマネーサプライ (M2) のデータを取得し、米連邦準備理事会が金融政策の目的として完全雇用と物価の安定を掲げていることから失業率やインフレ率等のデータを取得した。また株式市場や通貨価値の動向を示すデータを採用した。

変数名	経済指標	出典
R-PCE	実質個人消費	商務省経済分析局 [13]
R-DPI	実質可処分所得	商務省経済分析局 [13]
SR	貯蓄率	商務省経済分析局 [13]
HUS	住宅着工率	商務省センサス局 [14]
IPI-M	製造業鉱工業生産指数	米連邦準備理事会 [15]
CUR-M	製造業設備稼働率	米連邦準備理事会 [15]
ISM-I	製造業 ISM 景気指数	全米供給管理協会 [19]
MIC-I	ミシガン大学消費者信頼感指数	ミシガン大学 [16]
MIC-E	ミシガン大学期待インフレ率	ミシガン大学 [16]
T-PCEIX	PCE 価格指数 (総合)	商務省経済分析局 [13]
C-CPI	消費者物価指数 (コア)	労働省労働統計局 [17]
C-INF	インフレ率 (CPI 変化率)	
NFE	非農業部門就業者数	労働省労働統計局 [17]
UR	失業率	労働省労働統計局 [17]
MB	マネタリーベース	米連邦準備理事会 [15]
M2	マネーサプライ (M2)	米連邦準備理事会 [15]
R-EFCR	実質実効為替レート	米連邦準備理事会 [15]
SP500	S&P500	investing.com [18]
SPR-TNFF	FF レートとの金利スプレッド	

表2 経済指標一覧 (季節調整済み)

## 5 モデル

この章では本論文で扱うモデルについての説明を行う。

### 5.1 状態空間モデル

状態空間モデルとは観測できない状態変数の存在を仮定し、状態変数によって観測値が決まることを仮定したモデルである。このことによって柔軟な時系列のモデリングが可能となっている。本論文では観測値を  $y_t$ 、状態変数を  $\alpha_t$  とすると以下のように表されるモデルを考察する。本論文では誤差  $\epsilon_t, v_t$  は正規分布に従うとする。

$$y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma_y^2) \quad (5)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + R_t v_t \quad v_t \sim \text{Normal}(0, \sigma_\alpha^2) \quad (6)$$



(5) 式は観測方程式、(6) 式は状態方程式と呼ばれる。(5) 式より観測値  $y_t$  は  $Normal(Z_t\alpha_t, \sigma_y^2)$ , (6) 式より状態変数  $\alpha_t$  は  $Normal(\alpha_{t-1}, \sigma_\alpha^2)$  の分布にそれぞれ従うことが分かる。これより  $t$  時点での観測値  $y_t$  の確率分布は同じ時点での状態に影響され、 $t$  時点の状態変数  $\alpha_t$  の確率分布は 1 期前の状態に影響されることが分かる。

本論文では、先行研究に倣って以上の状態空間モデルの枠組みで (4) 式の dynamic な Nelson-Siegel モデルを状態空間モデルで表現し、予測をする。以下の 2 つの予測モデルを考える。1 つは状態変数を水準, 傾き, 曲率の三次元ベクトルを設定するモデルである。もう 1 つは水準, 傾き, 曲率を主成分分析で求め外生変数とし、状態ベクトルにそれら外生変数の係数を設定した時変係数回帰モデルである。回帰モデルで状態空間モデルと比べて正確な予測ができるため今回は採用した。

## 5.2 Long short-term memory(LSTM)

Long short-term memory(LSTM) とは、リカレントニューラルネットワーク (RNN) で生じる勾配消失問題を解消するために Hochreiter and Schmidhuber(1997)[20] が提案した深層学習モデルである。LSTM の全体像は RNN と同じく隠れ層の入力は入力層だけでなく、1 期前の隠れ層の出力も受け取る構造となっているが、勾配消失問題を解消するために隠れ層を LSTM block に置き換えた点で RNN と異なっている。本節では LSTM block の構造について述べる。LSTM block は以下の図 4 のような構造となっている。

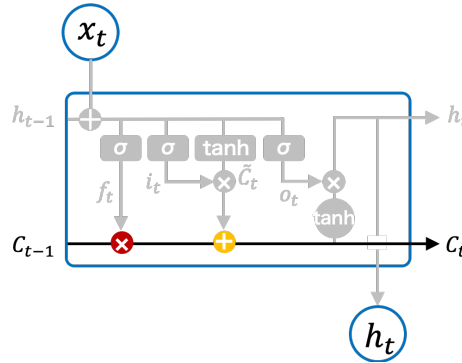


図4 LSTM block の概要

図 4 にある  $C_t$  はセル状態といいこれに過去の情報が格納されている。LSTM block は 1 つ前のセル状態  $C_{t-1}$  から現在の時間刻みのセル状態  $C_t$  に更新する働きをしている。更新する際に重要な役割を果たすのがゲートであり、LSTM block には忘却ゲート, 入力ゲート, 出力ゲートの 3 種類のゲートが存在する。それぞれのゲートでの処理内容の概要と

計算は以下の通りになる。図 4 の  $\sigma$  はシグモイド関数,  $\tanh$  は双曲線正接関数を指し, それぞれ  $\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$ ,  $\tanh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$  という形の活性化関数である。また  $W$  は重みのことで誤差逆伝播法で更新される。

忘却ゲート  $f_t = \sigma(W^{xf}x_t + W^{hf}h_{t-1} + b_f)$

1 個前の出力  $h_{t-1}$  と入力  $x_t$  からセル状態  $C_{t-1}$  のどの値を忘れさせるか決める。

具体的には  $C_{t-1} * f_t$  となる。

入力ゲート  $i_t = \sigma(W^{xi}x_t + W^{hi}h_{t-1} + b_i)$ ,  $\overline{C}_t = \tanh(W^{xC}x_t + W^{hC}h_{t-1} + b_C)$

$i_t$  では入力  $x_t$  と隠れ層  $h_{t-1}$  から  $\overline{C}_t$  のどの値を  $C_t$  に反映させるかを決める。 $\overline{C}_t$  は候補値ベクトルである。

以上の忘却ゲートと入力ゲートからセル状態は  $C_t = C_{t-1} * f_t + i_t * g_t$  という計算式で更新される。

出力ゲート  $o_t = \sigma(W^{xo}x_t + W^{ho}h_{t-1} + b_o)$

$o_t$  は忘却ゲートと出力ゲートを経て更新された  $C_t$  から出力  $h_t$  を決める関数である。最終的に  $h_t = o_t * \tanh(C_t)$  という形で計算され次の時点の LSTM block もしくは多層の LSTM ならば 2 層目の LSTM block に入力される。

1 ~  $t$  時点を通して渡されるセル状態  $C_t$  とそのセル状態を  $t-1$  時点の出力と  $t$  時点での入力から更新する構造を LSTM は持っているため、RNN より長い長期依存関係を保持できる。また LSTM block の構造は時系列データの構造変化にも対処することが可能である。本論文で扱うデータの対象期間内には金融業界に多大な影響を与えたリーマンショックが含まれるため構造変化についても考える必要がある。従って多層パーセプトロンや RNN ではなく LSTM を用いる利点の方が大きいと考え採用した。

## 6 結果

本章では評価方法と 5 章で述べたモデルを用いた予測結果について述べる。なお主成分分析と主成分に関しては付録 A に記載する。ここでは主成分を時変係数回帰モデルの外生変数として代入して推定した結果のみを述べる。

### 6.1 評価方法

予測モデルの評価を行うためには、テストデータを設定しモデルに学習させるデータから省く必要がある。本論文では 2018 年 7 月から 2020 年 3 月までのデータをテス

トデータとしてモデルの予測精度の評価を行った。その際の評価指標は、月単位で2年国債,5年国債,10年国債,20年国債のモデルの予測値と実測値の二乗平均平方根誤差(Root-Mean-Square-Error, RMSE)を計算し、全部の月の総和をとったものとした。これを Sum of RMSE と略す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (7)$$

## 6.2 予測結果

### 6.2.1 結果の概要

予測モデルと評価指標について以下の表3にまとめた。表3を見ると Sum of RMSE が小さくなったのは説明変数に経済指標を組み入れた LSTM モデルであった。逆に Sum of RMSE が一番大きくなったのは時変係数モデルとなった。なお dynamic な Nelson-Siegel モデルと時変係数回帰モデルについては、各時点における利回りの期待値を用いて Sum of RMSE を算出した。

予測モデル	Sum of RMSE
dynamic Nelson-Siegel モデル	14.176
時変回帰係数モデル	48.647
LSTM(利回りのみ)	7.034
LSTM(経済指標込み)	5.593

表3 予測モデルと Sum of RMSE

### 6.2.2 状態空間モデル

状態空間モデルの枠組みで考えた dynamic Nelson-siegel モデルと時変係数回帰モデルの予測値をプロットしたものを図5及び図6に示す。各時点の利回りの実測値は赤い点線で示している。各時点の利回りの予測値に関しては、確率分布から乱数を発生させ事後分布の形状を推測した。青線は各時点における利回りの期待値であり、薄い青色で塗り潰された区間が95%確信区間を示している。図5のdynamicなNelson-Siegelの期待値と確信区間を見ると、実測値はほぼ95%確信区間に含まれているものの、期待値の推移は直線でありテスト期間データにおける下降トレンドを捉えていないため、予測には不十分であると言える。次に図6の時変係数回帰モデルの期待値と確信区間について述べる。状態

空間モデルと違ってより具体的に予測できている。こちらも実測値は 95% 確信区間に含まれるが、5 ヶ月以降の予測に関しては上昇トレンドを示しており正確に予測できていない。Sum of RMSE がモデルの中で一番大きい値となっているのはこのためである。

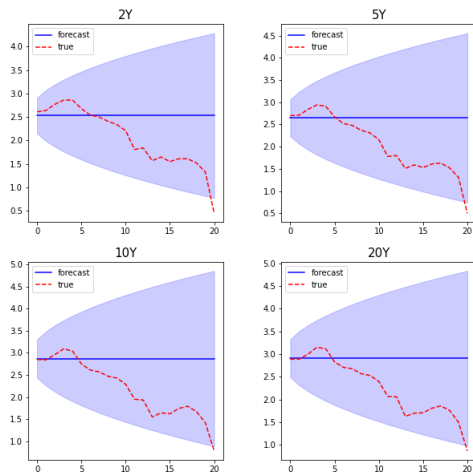


図5 状態空間モデル (14.176)

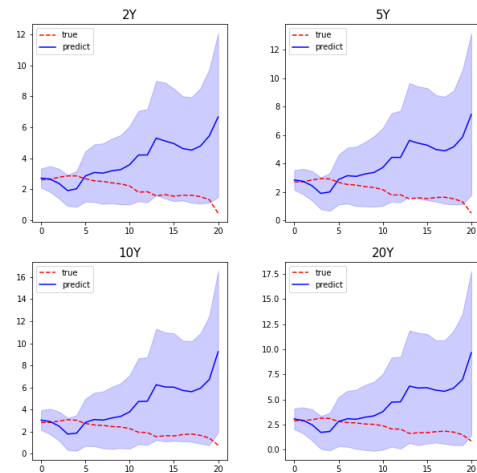


図6 時変係数回帰モデル (48.647)

### 6.2.3 Long short-term memory

過去の利回りのみで予測した LSTM と経済指標を説明変数に採用した LSTM の予測値をプロットしたものを図 7 及び図 8 に示す。状態空間モデルと異なり予測値のみのプロットである。赤の点線が実測値で青が予測値を表している。Sum of RMSE を比較すると経済指標を考慮した LSTMの方が低かったが、両者の予測値は大きく変わることはないことが分かる。だが 20 年国債の利回りの予測に関しては経済指標も考慮した LSTMの方が誤差が小さく予測に適していると言える。

なお LSTM の入力データに関しては、過去 12 ヶ月分のデータを入力するようにした。またデータに関しては正規化を施した。その際訓練データの最大値と最小値を用いることにした。損失関数には平均絶対誤差を採用し、過学習を防ぐために出力層の前にドロップアウト層を設定した。検証用データに対する学習結果に関しては付録 B で提示する。

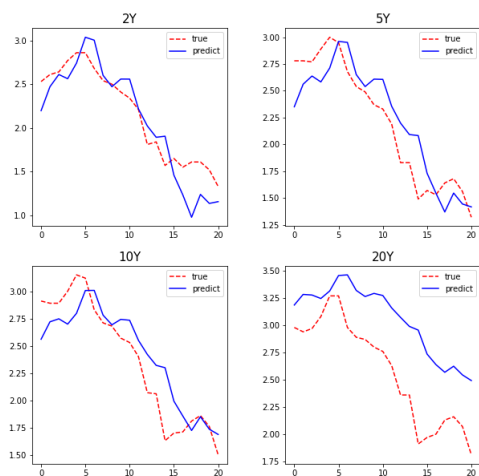


図7 過去の利回りのみ (7.034)

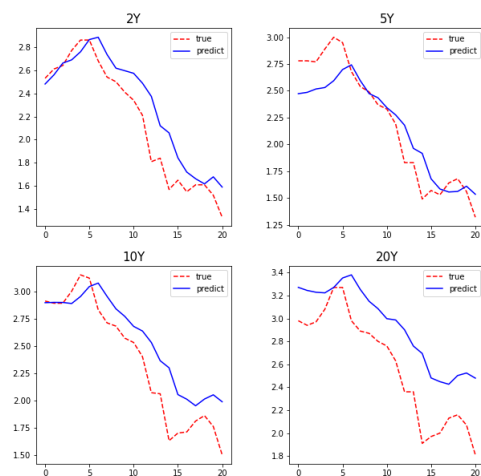


図8 過去の利回りと経済指標 (5.593)

### 6.3 考察

本節では第1章で述べた検討事項である、状態空間モデルと Long short-term memory の比較と経済変数を組み込んだ場合の比較について述べる。まず状態空間モデルと LSTM の比較をしてみると、LSTM の方が予測に適していることが分かる。状態空間モデルでは、95% 確信区間に利回りの値が入っており利回りの予測値の取りうる値の範囲は分かるが、期待値の推移をみると正確な予測に適しているとは言い難い。ここは深層学習の複雑な関数形で表現できる点と LSTM のセル状態を更新するという点が反映されていると言える。次に経済指標を利回りの予測に用いることの利点だが、評価指標は低くなったが、プロットして比較したところ両者の予測値は似ており、予測に関して明確な利点があると断言しがたい結果となった。

## 7 終わりに

本論文では米国債の利回りを正確に予測するという目的のもと、深層学習のモデルの 1 つである LSTM を新たに採用し、先行研究に倣ってマクロ経済や金融政策の要因も考慮し予測を試みた。そして金利の期間構造及び割引債の利回りを多項式関数で表現した (4) 式の dynamic な Nelson-Siegel モデルと比較したところ LSTM を用いることの有意性は確認できた。だがマクロ経済的要因を考慮することの有意性は LSTM をベースに考えるとはっきりと確認できなかった。ここに関しては本論文では米国のマクロ経済や景気の動向のみに着目し米国の経済指標を採用していたため、経済指標を全世界を対象にして組み込むことが改善の余地としてあげられる。

実際にイールドカーブが重要視されるのは流通市場で債券を取引するときである。キャピタルゲインをより多く得るために本論文で検討した経済変数を組み込んだ LSTM モデルはまだ改善の余地はあるが検討を重ねることで十分活用できると考える。

## 付録 A 利回りの主成分分析

本論文で考慮した時変回帰係数モデルの外生変数であった主成分について、この付録で述べる。2000 年 1 月からのデータで、3 ヶ月物から 30 年物の国債の利回りのデータに対して主成分分析を行った。以下の表 4 に第 3 主成分までの寄与率を載せた。累積寄与率を計算すると、第 3 主成分までで 99% となり、それぞれの主成分は (4) 式の水準・傾き・曲率を表すことが分かる。

第 1 主成分	第 2 主成分	第 3 主成分
0.8839	0.1066	0.0073

表4 各主成分の寄与率

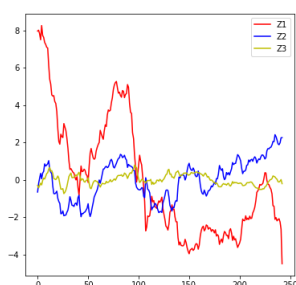


図9 各主成分の時系列推移

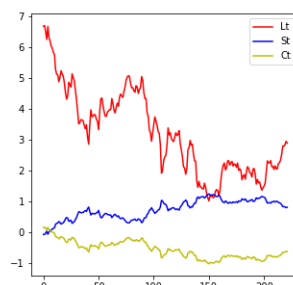


図10 状態空間モデルの状態変数の時系列推移

上の 2 つの図はどちらも (4) 式の dynamic な Nelson-Siegel モデルの水準・傾き・曲率を推定している。図 9 では主成分分析で推定した結果を表したもので、図 10 では 10 年国債の利回りを表現した状態空間モデルから推定した結果を表したものである。状態空間モデルでは 10 年国債 (1 つの国債) の利回りから状態変数を推定しているため主成分分析のものと差異はあるが、各成分は似たような動きをしている。各主成分は dynamic な Nelson-Siegel モデルの各成分を表しているとプロットしてみても分かる。

## 付録 B LSTM

本論文では触れることができなかった LSTM の事柄についてこの付録では述べる。表 5 は各 LSTM の検証データにおける平均絶対誤差 (MAE) の値をまとめたものである。経済指標を組み入れた LSTM の方が若干であるが値は小さく、検証データに対しては当てはまりが良いことが分かる。図 11 は今回用いたモデルの概略である。

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n abs(y_i - \hat{y}_i) \quad (8)$$

利回り & 経済指標	利回りのみ
0.01833	0.02529

表5 損失関数: 平均絶対誤差 (MAE) の比較

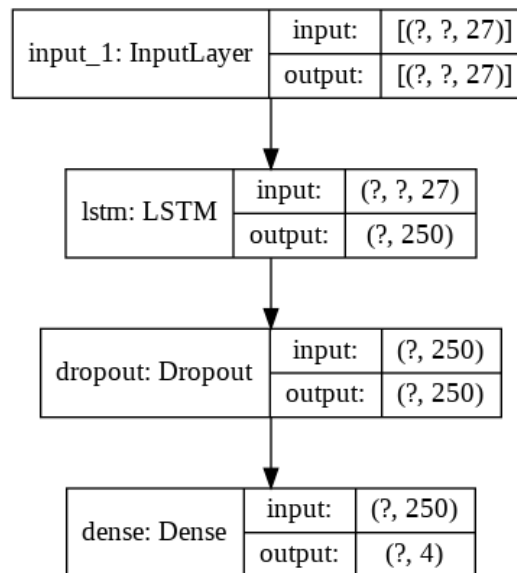


図11 LSTM モデルの概要



## 参考文献

- [1] SIFMA.(2020).Capital markets fact book.  
<https://www.sifma.org/resources/research/fact-book/>
- [2] SIFMA.(2020).Fixed Income Chart.  
<https://www.sifma.org/resources/archive/research/>
- [3] 財務省 (2020).「国債発行額の推移 (実績ベース)」, 財務省,  
<https://www.mof.go.jp/jgbs/reference/appendix/>
- [4] Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 473–489.
- [5] Diebold, F.X., Li, C., (2002). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, forthcoming.
- [6] Litterman, R., & Scheinkman, J. (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of fixed income*, 1(1), 54-61.
- [7] Diebold,F.X.,& Rudebusch,G.D.(2013).Yield curve modeling and forecasting: The dynamic Nelson-Siegel approach. *Econometric and Tinbergen Institutes lectures*. Princeton University Press.
- [8] Diebold,F.X.,& Rudebusch,G.D.,Aruoba,S.B.(2006).The macroeconomy and the yield curve a dynamic latent factor approach.*Journal of Econometrics*,131(1),309-338
- [9] N. Mahler, "Modeling the S&P 500 index using the Kalman filter and the LagLasso,"(2009) *IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, Grenoble, (2009), pp. 1-6,
- [10] Christian L. Dunis & Vincent Morrison (2007) The Economic Value of Advanced Time Series Methods for Modelling and Trading 10-year Government Bonds, *The European Journal of Finance*, 13:4, 333-352,
- [11] M. Nunes, E. Gerding, F. McGroarty, M. Niranjana. A comparison of multitask and single task learning with artificial neural networks for yield curve forecasting. *Expert Syst. Appl.*, 119 (2019), pp. 362-375,
- [12] U.S.DEPARTMENT OF THE TREASURY,<https://www.treasury.gov/resource-center/economic-policy/corp-bond-yield/Pages/TNC-YC.aspx>

- [13] U.S.DEPARTMENT OF COMMERCE Bureau of Economic Analysis, BEA data. <https://www.bea.gov/data/income-saving>
- [14] United States Census Bureau.  
[https://www.census.gov/construction/nrc/historical\\_data/index.html](https://www.census.gov/construction/nrc/historical_data/index.html)
- [15] Board of Governors of the Federal Reserve Systems, Data.  
<https://www.federalreserve.gov/data.htm>
- [16] University of michigan, surveys of consumers. <http://www.sca.isr.umich.edu/>
- [17] United States BUREAU OF LABOR STATISTICS, Economy at a Glance, DATA TOOLS. <https://www.bls.gov/eag/eag.us.htm>.
- [18] Investing.com, S&P500, <https://jp.investing.com/indices/us-spx-500>
- [19] Institute for Supply Management, <https://www.ismworld.org/supply-management-news-and-reports/reports/ism-report-on-business/>
- [20] Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780.