离散数学

第一部分 数理逻辑

第一章 命题逻辑的基本概念

1.1 命题与联结词

命题的定义

能判断其**真假**的**陈述句**

优先级

（ ），$\neg$，$\wedge$ ，$\vee$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$

p $\rightarrow$ **q**

q为p的必要条件，1 $\rightarrow$ 0 $\Leftrightarrow$ 0

命题公式及其赋值

命题层次

1. A = $\neg$ B，$n+1$
2. A = B $\wedge$ C，$\vee, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$， $max(i,j)+1$
3. p为0层

公式类型

1. 重言式：真值表全为1
2. 矛盾式：真值表全为0
3. 可满足式：真值表至少一项为1

第二章 命题逻辑等值演算

2.1 等值式

等值式模式

定律		
蕴涵等值式	$A \to B$	$\neg A \vee B$
分配律	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
分配律	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
德摩根律	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
德摩根律	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
吸收律	$A \vee (A \wedge B)$	A
吸收律	$A \wedge (A \vee B)$	A
结合律	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
结合律	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
归谬论	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B)$	$\neg A$
双重否定律	$\neg\neg A$	A
幂等律	$A \vee A$	A
幂等律	$A \wedge A$	A
交换律	$A \vee B$	$B \vee A$
交换律	$A \wedge B$	$B \wedge A$
零律	$A \vee 1$	1
零律	$A \wedge 0$	0
同一律	$A \vee 0$	A
同一律	$A \wedge 1$	A
排中律	$A \vee \neg A$	1
矛盾律	$A \wedge \neg A$	0
假言易位式	$A \to B$	$\neg A \to \neg B$
等价等值式	$A \leftrightarrow B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
等价否定等值式	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$

2.2 析取范式与合取范式

文字

命题变项及其否定

简单析(合)取式

由有限个文字构成的析取式

析(合)取范式

有限个简单析取式构成的析取式

求范式

1. 消去连结词 $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
2. 用**德摩根律**内移否定符
3. 使用**分配律**使括号外符号相同

极小(大)项

每个极小项有且仅有**一个成真赋值**

表 2.3　含 p,q 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公　式	成真赋值	名　称	公　式	成假赋值	名　称
$\neg p\wedge\neg q$	0　0	m_0	$p\vee q$	0　0	M_0
$\neg p\wedge q$	0　1	m_1	$p\vee\neg q$	0　1	M_1
$p\wedge\neg q$	1　0	m_2	$\neg p\vee q$	1　0	M_2
$p\wedge q$	1　1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1　1	M_3

表 2.4　含 p,q,r 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公　式	成真赋值	名　称	公　式	成假赋值	名　称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0　0　0	m_0	$p\vee q\vee r$	0　0　0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0　0　1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0　0　1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0　1　0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0　1　0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0　1　1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0　1　1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1　0　0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1　0　0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1　0　1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1　0　1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1　1　0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1　1　0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1　1　1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1　1　1	M_7

主析(合)取范式

所有简单合(析)取式都是极小(大)值的**析**(合)取范式

通过在主**合取**范式括号内 $\vee(Q\wedge\neg Q)$ 和在主**析取**范式 $\wedge(Q\vee\neg Q)$ 获得

第三章 命题逻辑的推理推论 🌟

推理定律

公式	名称
$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	简化律
$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒收式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段式
$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$	假言三段式
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$	等价三段式
$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$	构造性二难
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难
$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow \neg A \vee \neg C$	破坏性二难

自然推理系统P

1. 字母表
2. 合取公式
3. 推理定理
    - **前提引入规则**：引入前提
    - **结论引入规则**：将所得结论作为后续证明的前提
    - **置换规则**：运用两类等值公式置换
    - **推理定理**九条
    - **化简规则**

归谬法

把结论的否定作为附加前提，推出矛盾

需要用到附加前提引入

附加前提证明法

若结论为$s \to r$，则将s放到前提中，结论改为r

第四章 一阶逻辑基本概念

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

个体

可独立存在的客体　x

个体域

个体变动的取值范围 $P(x)$

谓词

用来说明个体的性质或个体间关系 $\rightarrow$

量词

全称量词

$\forall$，后接 $\rightarrow$ (条件连接词) $\forall(P(x) \rightarrow Q(x))$

存在量词

$\exists$，后接 $\wedge$ (合取连接词) $\exists(P(x) \wedge Q(x))$

量词的辖域

量词的作用范围 $(P(x) \rightarrow Q(x))$

第五章 一阶逻辑等值演算与推理

谓词逻辑等价式

设A和B是任意的两个谓词，若$A \leftrightarrow B$为永真，则$A \Leftrightarrow B$

1. 命题逻辑中的等价式的代换实例

命题逻辑等价式转换而来

2. 量词否定转移

$$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. 量词辖域的收缩和扩张

(1)

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$

(2)

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$

4. 变量分配律

$$\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$$

前束范式

将量词提到最前面

谓词演算的推理理论

$$c \text{ 和 } x \text{ 为个体域中的个体}$$

1. UI（全称量词消去规则）

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$$

2. EI（存在量词消去规则）

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

3. UG（全称量词引入规则）

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$
$$y\text{为任意值}$$

4. EG（存在量词引入规则）

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

第二部分 集合论

第六章 集合代数

集合的基本运算

- 并运算：

$$A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$$

- 交运算：

$$A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

- 差运算：

$$A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

- 对称差：

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A)\}$$

- 幂集：

$$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$$

$$P(\varnothing)=2^0\quad P(\{\varnothing\})=2^1\quad P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=2^2$$

集合相等的证明

定律	
摩根律	$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$
摩根律	$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$
补律	$A\cap\sim A=\varnothing$
补律	$A\cup\sim A=E$
集合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
集合律	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
恒等律	$A\cup\varnothing=A$
恒等律	$A\cap E=A$
支配律	$A\cup C=E$
支配律	$A\cap\varnothing=\varnothing$
幂等律	$A\cup A=A$
幂等律	$A\cap A=a$
双否律	$\sim(\sim A)=A$
交换律	$A\cup B=B\cup A$
交换律	$A\cap B=B\cap A$

包含排斥原理

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |E| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

第七章 二元关系

笛卡尔积

$$A \times B = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in B\}$$

A 到 B 的关系

$A \times B$ 的任一子集

A 上的关系

$A \times A$ 的任一子集

A 上的特殊关系

空关系：$\varnothing$

全域关系 E_A：$A \times A$ 的所有子集

恒定关系 I_A：$\{< x, x > | x \in A\}$

关系的性质

$domR$：第一元 定义域

$ranR$：第二元 值域

R^{-1}：第一元与第二元交换

$R^2 = R \circ R$：$\{< x, z > | < x, y > \in R \wedge < y, z > \in R\}$

R在A上自反

$$\forall x(x \in A \rightarrow < x, x > \in R)$$

R在A上反自反

$$\forall x(x \in A \rightarrow < x, x > \notin R)$$

R在A上对称

$$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge < x, y > \in R \rightarrow < y, x > \in R)$$

R在A上反对称

$$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge < x, y > \in R \wedge < y, x > \in R \rightarrow x = y)$$

$$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge < x, y > \in R \ \wedge x \neq y \rightarrow < y, x > \notin R)$$

R在A上传递

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \land < x, y > \in R \land < y, z > \in R \rightarrow < x, z > \in R)$$

自反闭包

$$r(R) = R \cup I_A$$

对称闭包

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

传递闭包

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cdots R^n (n = |A|)$$

等价关系和等价类

等价关系

R 是非空集合 A 上的关系，且 R 是**自反、对称、传递**

若 $< x, y > \in R$，则称 **x 等价于 y**，记做 $x \sim y$ 或 xRy

全序集合内任何一对元素都是相互可比较的

等价类

R 是非空集合 A上的等价关系且 $x \in A$

$$[x]_R = \{y | y \in A \land xRy (< x, y > \in R)\} = [y]_R$$

偏序关系和哈斯图

偏序关系

R 是非空集合 A 上的关系，且 R 是**自反、反对称、传递**

若 $< x, y > \in R$，记作 $x \preceq y$

A 和 A 上的偏序关系 R 一起叫做偏序集，记作 (A, R) 或 $(A, \preceq)$

偏序集合内只有部分元素之间是可以比较的

哈斯图

1. 由于偏序关系具有自反性，可以去掉不必要的**环**
2. 由于偏序关系具有传递性，可以去掉不必要的**边**
3. 由于偏序关系具有反对称性，可以去掉不必要的**箭头**

第八章 函数

定义和性质

函数的定义

F 为二元关系，$\forall x \in domF$ 都存在唯一的 $y \in ranF$ ，如有 xFy，记作 y = F(x)

函数的性质

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \land G \subseteq F$$

所有由 A 到 B 的函数的集合:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

$$\varnothing^{\varnothing} = \{\varnothing\}$$
$$B^{\varnothing} = \{\varnothing\}$$
$$\varnothing^{A} = \varnothing$$

第五部分 图论

图的基本概念

阶数：图的顶点数

握手定理

度的数目等于边数的两倍

因为度数必为偶数，度为奇数的结点的个数为偶数

图的分类

简单图

无平行边且无环

弱连通图

有向图变无向图后才连通

单向连通图

任意两结点可单向连通

强连通图

任意两节点相互可达

有向连通图

弱连通图、单向连通图、 强连通图

通路的分类

基本通路

边无重复且点无重复

简单通路

边无重复

回路的分类

起点和终点相同的通路为回路

基本回路

边无重复且点无重复

简单回路

边无重复

长度为N的通路

邻接矩阵的N次方：A^N

左行右列

欧拉图与哈密顿图

欧拉图

具有欧拉**回路**的图

半欧拉图

只具有欧拉通路的图

欧拉通路(回路)

通过所有**边**一次且仅一次的通路(回路)

欧拉图判定

无向欧拉图 $\Leftrightarrow$ 所有结点度数为偶

无向半欧拉图 $\Leftrightarrow$ 有且只有两个奇度结点

有向欧拉图 $\Leftrightarrow$ 每个结点出度=入度

有向半欧拉图 $\Leftrightarrow$ 一个结点出度-入度=1，另一个结点入度-出度=1

哈密顿图

哈密顿通路(回路)

通过所有**结点**一次且仅一次的通路(回路)

最短路径 Dijkstra

1. 标记集 `cllc[u]=true`
2. 距离集 `dist[u]=0，其他为 10e10`
3. 找出 `dist` 最小的 V，`cllc[V]=true`
4. 改善 V 的邻接点到 u 的 `dist`
5. 循环到3

树

树的定义

连通且无回路的无向图

树的边数 = 顶点数-1

最小生成树

连通图中的所有生成树中带权最小的

避圈法 Kruskal

1. 将所有边从小到大排列
2. 在不形成回路的情况下，用边一条条连通结点
3. 检查是否生成了树

最优二元树

Huffman创建

1. 找出目前权值最小的两个节点
2. 合并节点形成新根，为新根赋权
3. 递归到1

Huffman编码

1. 循环每个叶结点
2. 向上编码直到根结点
3. 倒序不等长编码，使其从根结点开始