大物

第一章 质点运动

1-1 质点运动描述

位置矢量

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢余弦

$$cos\alpha = \frac{x}{|\ \vec{r}\ |} \quad cos\beta = \frac{y}{|\ \vec{r}\ |} \quad cos\gamma = \frac{z}{|\ \vec{r}\ |}$$

速度方程

$$\vec{r} \ = \ \vec{r}(t) \ = \ x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

分速度

$$\vec{v} \ = \ \vec{v_x} + \vec{v_y} + \vec{v_z} \ = \ v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

1-2 圆周运动

切向单位矢量

$$\vec{v} = v\vec{e_\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{e_\tau} = |\vec{v}|\vec{e_\tau}$$

加速度

$$\vec{\alpha} = d\vec{v} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\tau} + v\frac{d\vec{e_\tau}}{dt}$$

切向加速度

描述由速度大小变化快慢，方向为$\vec{e_t}$，与速度$\vec{v}$方向相同

$$\vec{a_\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\tau} \qquad a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

角加速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \overrightarrow{\alpha_\tau} = r\alpha\overrightarrow{e_\tau}$$

法向单位矢量

$\Delta\overrightarrow{e_t}$ 与 $\overrightarrow{e_t}$ 的方向垂直，所以法向单位矢量指向圆心

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{e_\tau}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{e_\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_n}$$

法向加速度

反映速度方向变化快慢

$$\overrightarrow{a_n} = v\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_n} = r\omega^2\overrightarrow{e_n} = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_n}$$

加速度

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\tau} + \frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_n} = r\alpha\overrightarrow{e_\tau} + r\omega^2\overrightarrow{e_n}$$

变速圆周运动

$$\alpha = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad tan\varphi = \frac{a_n}{a_\tau}$$

自然坐标系

以动点为原点，以切向单位矢量 $\overrightarrow{e_t}$ 和法向单位矢量 $\overrightarrow{e_n}$ 为坐标轴建立的坐标系。

匀加速运动

$\vec{\alpha}$ 为常矢量

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$$

匀变速圆周运动

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha_\tau \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

1-3 相对运动

质点相对基本参考系的绝对速度 $\vec{v}$，等于运动参考系相对绝对参考系的牵连速度 $\vec{u}$ 与质点相对速度参考系的相对速度 $\overrightarrow{v'}$ 之和。

1-0 错题

1. 质点沿X轴正向运动，加速度 $\vec{a}=k\vec{v}$，k 为常数。设从原点出发时速度为 $\overrightarrow{v_0}$，求运动方程 $\vec{x}=x(t)$。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\vec{v}}{dt}=-k\vec{v}\\
&=>-\frac{d\vec{v}}{k\vec{v}}=dt\\
\text{两边积分：}\ &=>\frac{1}{k}ln(\frac{\vec{v}}{\overrightarrow{v_0}})=t\\
&=>\vec{v}=\overrightarrow{v_0}e^{-kt}\\
\text{两边积分：}\ &=>\vec{x}=-\frac{\overrightarrow{v_0}}{k}e^{-kt}+C\\
\text{带入 } t=0\text{，}x=0\text{ 解得：}\ &C=\frac{\overrightarrow{v_0}}{k}\\
&\vec{x}=\frac{\overrightarrow{v_0}}{k}(1-e^{-kt})
\end{aligned}
$$

2. 质点作曲线运动的方程为 $x=2t,\ y=4-t^2(SI)$，求 t 时刻质点的 a_τ 和 a_τ

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}=2\overrightarrow{e_x}-2t\overrightarrow{e_y}\\
&\vec{a}=-2\overrightarrow{e_y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{e_\tau}&=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\\
&=\frac{2\overrightarrow{e_x}-2t\overrightarrow{e_y}}{\sqrt{2^2+(2t)^2}}\\
&=\frac{\overrightarrow{e_x}-t\overrightarrow{e_y}}{\sqrt{1+t^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a_\tau}&=\frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\tau}\\
&=(-2\overrightarrow{e_y})\frac{(\overrightarrow{e_x}-t\overrightarrow{e_y})}{1+t^2}\\
&=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a_n}&=\sqrt{|\vec{a}|^2-(\overrightarrow{a_\tau})^2}\\
&=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}
\end{aligned}
$$