

# Solución - Parcial 2 : Electrodinámica II

Keith Patarroyo

9 de Mayo de 2017

*Componente para entregar el martes 09 de Mayo de 2017:*

## Problema 2

Sea una lámina plana de espesor  $d$  cuya permitividad se corresponde con el modelo de plasma para altas frecuencias ( $\omega \gg \omega_0$ ,  $\omega \gg \Gamma$ ), es decir,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$ . Dicha lámina está rodeada de vacío. Considere la incidencia normal de ondas planas que están linealmente polarizadas.

- a) Escriba la matriz de transferencia de la estructura tomando como planos de referencia dos planos situados por fuera de la lámina pero a una distancia infinitesimal de esta, es decir, en  $z = 0^-$  y  $z = d^+$ .

**R.**

Consideremos la región propuesta en el problema,

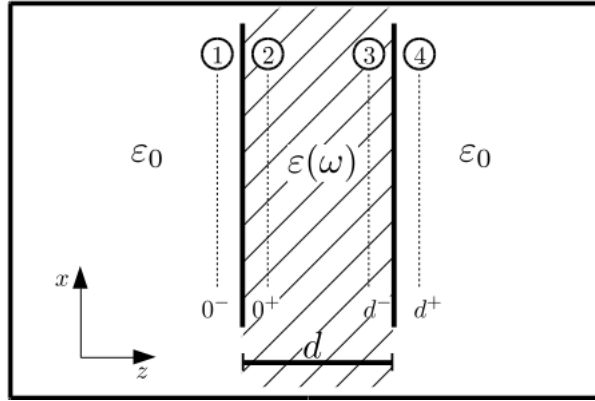


Figura 1: Región del problema inicial.

Entonces las matrices de transferencia entre las regiones 1-2, 2-3, 3-4 son:

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} & \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1-Y_0}{2Y_1} \\ \frac{Y_1-Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Por lo tanto la matriz de transferencia que convierte el campo eléctrico de la región 1-4 es,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \mathbf{T}_{1-2} \mathbf{T}_{2-3} \mathbf{T}_{3-4}.$$

Escribiendo esta matriz explícitamente tenemos,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-ikd}(Y_1+Y_0)^2 - (Y_1-Y_0)^2 e^{ikd}}{4Y_0Y_1} & \frac{-e^{-ikd}(Y_1^2 - Y_0^2) + (Y_0^2 - Y_1^2)e^{ikd}}{4Y_0Y_1} \\ \frac{-e^{-ikd}(Y_0^2 - Y_1^2) + (Y_0^2 - Y_1^2)e^{ikd}}{4Y_0Y_1} & \frac{-e^{-ikd}(Y_0-Y_1)^2 + (Y_0+Y_1)^2 e^{ikd}}{4Y_0Y_1} \end{bmatrix}.$$

Podemos escribir esta matriz usando un poco de álgebra de la siguiente manera,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \begin{bmatrix} \frac{-i \sin(kd)(Y_0^2 + Y_1^2) + \cos(kd)(2Y_0 Y_1)}{2Y_0 Y_1} & \frac{i \sin(kd)(Y_0^2 - Y_1^2)}{2Y_0 Y_1} \\ \frac{i \sin(kd)(Y_1^2 - Y_0^2)}{2Y_0 Y_1} & \frac{i \sin(kd)(Y_0^2 + Y_1^2) + \cos(kd)(2Y_0 Y_1)}{2Y_0 Y_1} \end{bmatrix}.$$

- b) Grafique los coeficientes de transmisión,  $t$  y  $t'$ , y de reflexión,  $r$  y  $r'$ , mostrando separadamente sus correspondientes módulos y fases en función de la frecuencia  $\omega$ . (4 gráficas de módulos y 4 gráficas de fases)

**R.**

Sabemos que dada una matriz de transferencia  $\mathbf{T}$  que modele la incidencia normal de ondas planas linealmente polarizadas, esta estará dada en términos de los coeficientes de transmisión,  $t$  y  $t'$ , y de reflexión,  $r$  y  $r'$ , de la siguiente manera,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{tt' - rr'}{t} \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz  $\mathbf{T}_{1-4}$  reconocemos los coeficientes  $t_{1-4}$ ,  $t'_{1-4}$ ,  $r_{1-4}$  y  $r'_{1-4}$  como,

$$\begin{aligned} t_{1-4} &= \frac{2Y_0 Y_1}{\cos(kd)(2Y_0 Y_1) - i \sin(kd)(Y_0^2 + Y_1^2)}, & t'_{1-4} &= \frac{2Y_0 Y_1}{\cos(kd)(2Y_0 Y_1) - i \sin(kd)(Y_0^2 + Y_1^2)}, \\ r_{1-4} &= \frac{i \sin(kd)(Y_1^2 - Y_0^2)}{\cos(kd)(2Y_0 Y_1) - i \sin(kd)(Y_0^2 + Y_1^2)}, & r'_{1-4} &= \frac{i \sin(kd)(Y_1^2 - Y_0^2)}{\cos(kd)(2Y_0 Y_1) - i \sin(kd)(Y_0^2 + Y_1^2)}. \end{aligned}$$

Asimismo podemos dividir por  $1 = Y_0^2/Y_0^2$  todas las expresiones y usando  $Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}} = Y_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ , y  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$  obtenemos,

$$t_{1-4} = t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left(2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \quad (2)$$

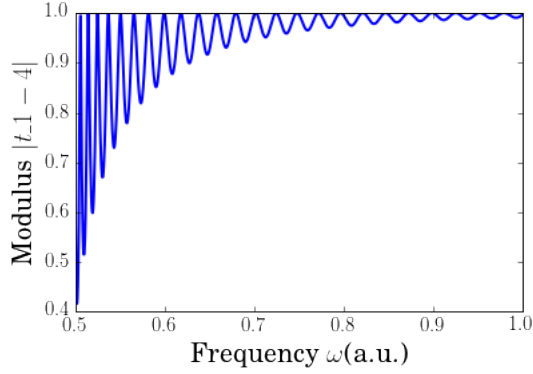
$$r_{1-4} = r'_{1-4} = \frac{i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]}{\cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left(2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}. \quad (3)$$

Ahora procedemos a graficar el módulo y la fase de los coeficientes.

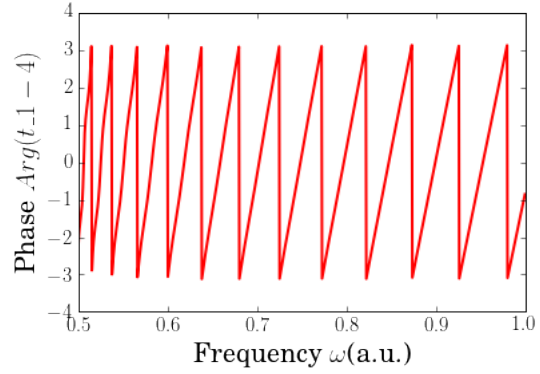
**Coefficientes de transmisión  $t_{1-4}$  y  $t'_{1-4}$ :** Notamos primero que  $t_{1-4} = t'_{1-4}$ , esto era de esperarse ya que el sistema físico es simétrico respecto a  $d/2$ , para poder graficar estos dos coeficientes se procedió a fijar los parámetros  $\omega_p$ ,  $d$ ,  $c$ , como:

$$\omega_p = 0,49, \quad d = 100,0, \quad c = 1,0. \quad (4)$$

Ahora usando el notebook escrito en python disponible online en <https://goo.gl/BuxA4s>, se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de transmisión, primero utilizando la ecuación (2) se muestra el coeficiente  $t_{1-4}$ ,



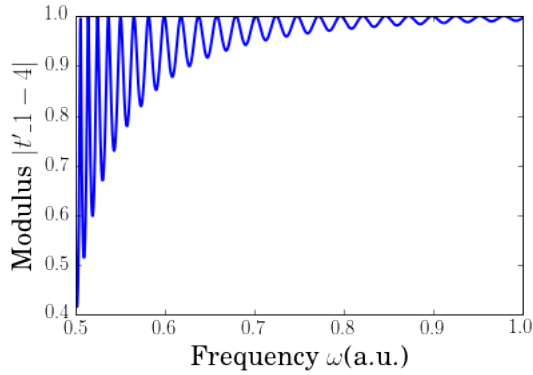
(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $t_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .



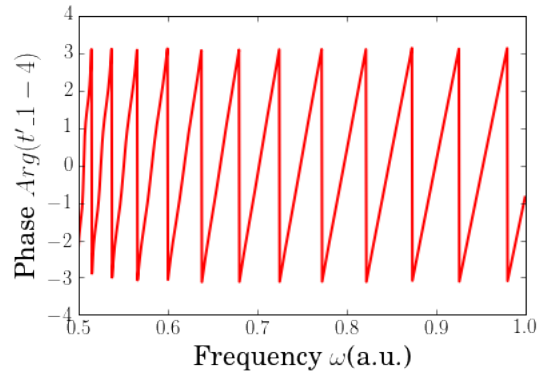
(b) Fase del coeficiente de transmisión  $t_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

Figura 2: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $t_{1-4}$  en función de  $\omega$ .

De igual manera se obtuvo el coeficiente  $t'_{1-4}$  utilizando la ecuación (2),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $t'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

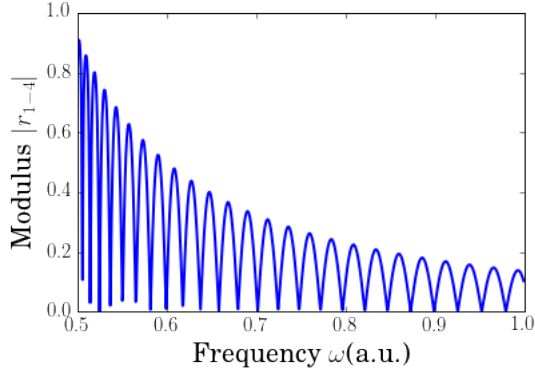


(b) Fase del coeficiente de transmisión  $t'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

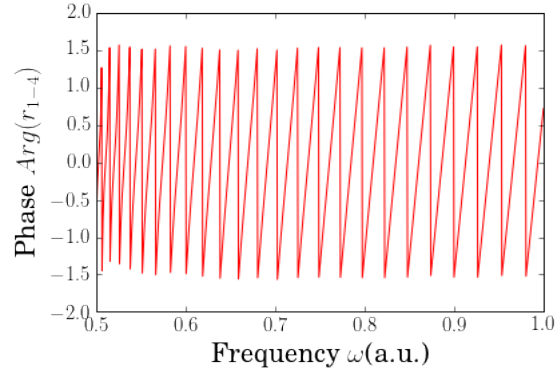
Figura 3: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $t'_{1-4}$  en función de  $\omega$ .

### Coeficientes de reflexión $r_{1-4}$ y $r'_{1-4}$ :

Notamos nuevamente que  $r_{1-4} = r'_{1-4}$ , ahora usando los mismos parámetros de la ecuación (4), se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de reflexión utilizando la ecuación (3), primero se muestra el coeficiente  $r_{1-4}$ ,



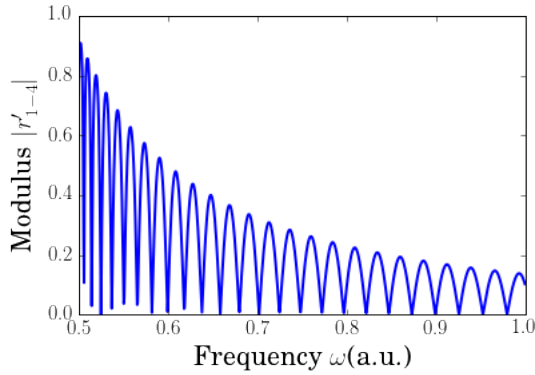
(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $r_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .



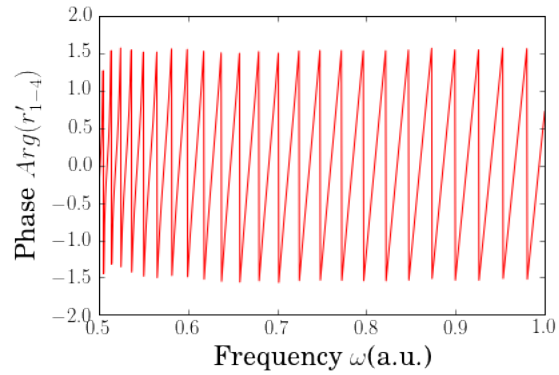
(b) Fase del coeficiente de transmisión  $r_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

Figura 4: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $r_{1-4}$  en función de  $\omega$ .

De igual manera se obtuvo el coeficiente  $r'_{1-4}$  utilizando la ecuación (2),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $r'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .



(b) Fase del coeficiente de transmisión  $r'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

Figura 5: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $r'_{1-4}$  en función de  $\omega$  para la interfaz  $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$ .

- c) Grafique las transmitancias,  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$ , y las reflectancias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ , en función de la frecuencia  $\omega$ . De paso compruebe si  $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$  y  $\mathcal{T}' + \mathcal{R}' = 1$ .

## R.

La transmitancia  $\mathcal{T}$  y la reflectancia  $\mathcal{R}$ , están definidas como la razón entre la potencia de entrada  $P_{in}$ , la potencia transmitida  $P_{tr}$  y la potencia de entrada  $P_{in}$  y la potencia reflejada  $P_R$  respectivamente. Por el teorema de Poynting complejo sabemos que

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}(EH^*) = \frac{1}{2} Y |E|^2.$$

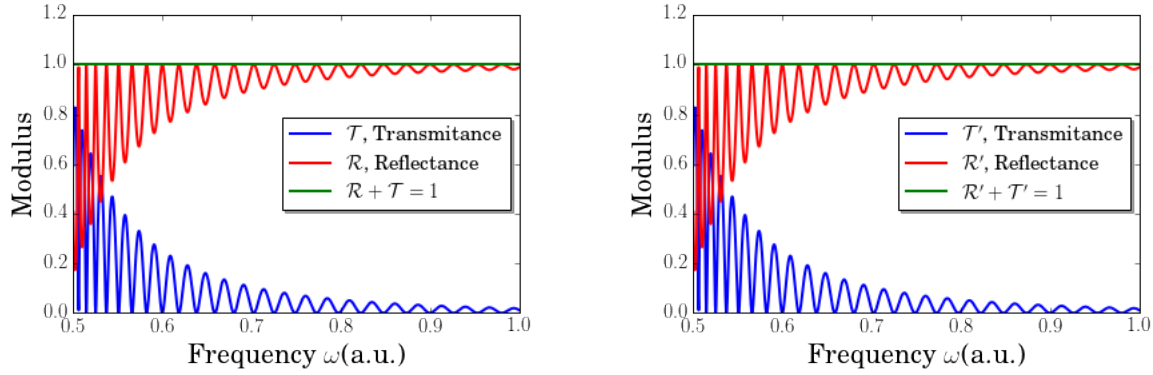
Por lo tanto la transmitancia  $\mathcal{T}$  y la reflectancia  $\mathcal{R}$  quedan,

$$\mathcal{T} = \frac{P_{tr}}{P_{in}} = \frac{Y_{tr} |E_{tr}|^2}{Y_{in} |E_{in}|^2} = \frac{Y_{tr}}{Y_{in}} |t|^2, \quad (5)$$

$$\mathcal{R} = \frac{P_R}{P_{in}} = \frac{Y_{in} |E_R|^2}{Y_{in} |E_{in}|^2} = |r|^2. \quad (6)$$

Para este problema  $Y_{tr}/Y_{in} = 1$  para  $\mathcal{T}$  y  $Y_{tr}/Y_{in} = 1$  para  $\mathcal{T}'$ , ahora nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en <https://goo.gl/BuxA4s>, se procedió a graficar las transmitancias y las

reflectancias , utilizando las ecuaciones (2) y (5) se muestra las transmitancias  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  y con las ecuaciones (3) y (6) se muestra las reflectancias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ ,



(a) Gráfica de las transmitancias,  $\mathcal{T}$ , la reflectancia  $\mathcal{R}$  y su suma  $\mathcal{T} + \mathcal{R}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

(b) Gráfica de las transmitancias,  $\mathcal{T}'$ , la reflectancia  $\mathcal{R}'$  y su suma  $\mathcal{T}' + \mathcal{R}'$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

Figura 6: Gráfica de las transmitancias,  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$ , y las reflectancias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  en función de  $\omega$  para la interfaz  $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$ . Se puede ver gráficamente que  $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$  y  $\mathcal{T}' + \mathcal{R}' = 1$ .

- d) Asumiendo que la onda incide desde la izquierda, grafique el campo eléctrico en función de la coordenada  $z$ , desde  $z = -d$  hasta  $z = -2d$

**R.**

Ya que la onda incide desde la izquierda tenemos que el vector del campo eléctrico viajante (onda hacia la izquierda - y onda hacia la derecha +) en el plano 4 de la figura, es dado por ,

$$\begin{pmatrix} E_4^+ \\ E_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la evolución espacial del campo en la región  $\varepsilon_0$  de la derecha es dada por la propagación de una onda hacia la derecha multiplicada por el coeficiente de transmisión  $t$ . Para hallar el campo en las otras regiones usamos las matrices de transferencia  $\mathbf{T}_{1-2}$ ,  $\mathbf{T}_{2-3}$ ,  $\mathbf{T}_{3-4}$  para hallar el campo eléctrico en el resto del espacio.

Nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en <https://goo.gl/BuxA4s>, se procedió a graficar el campo eléctrico en función de la coordenada  $z$ , desde  $z = -d$  hasta  $z = -2d$ , este se muestra a continuación,

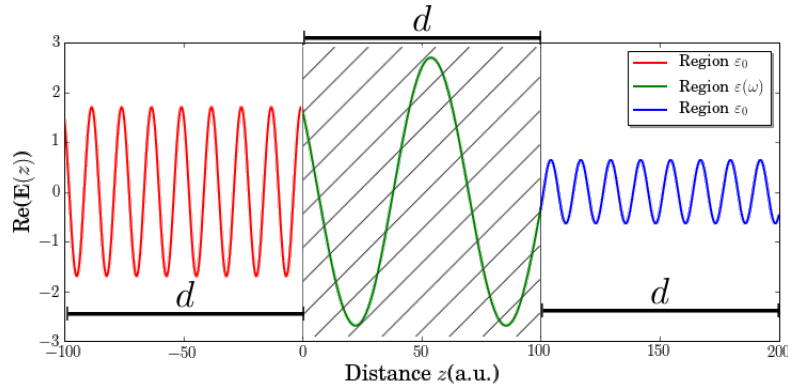


Figura 7: Gráfica del campo eléctrico en función de la coordenada  $z$ , desde  $z = -d$  hasta  $z = -2d$ .

- e) Ahora asuma que el medio que se coloca a la derecha de la lamina es un dieléctrico de permitividad  $2\varepsilon_0$ . Dar respuesta nuevamente a la mismas preguntas desde (a) hasta (d).

R. Consideremos la región propuesta en el problema,

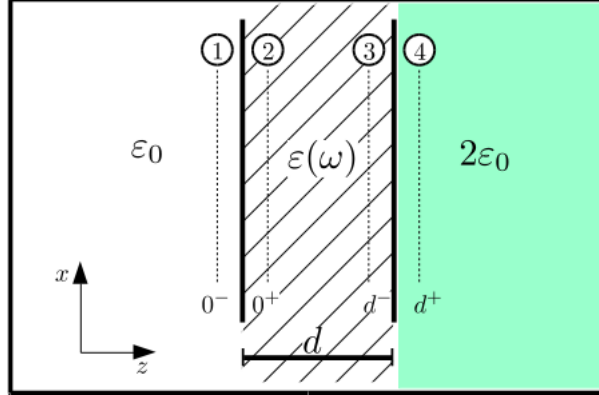


Figura 8: Región del problema e).

Entonces las matrices de transferencia entre las regiones 1-2, 2-3, 3-4 son:

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} & \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1-\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \\ \frac{Y_1-\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1+\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Por lo tanto la matriz de transferencia que convierte el campo eléctrico de la región 1-4 es,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \mathbf{T}_{1-2} \mathbf{T}_{2-3} \mathbf{T}_{3-4}.$$

Escribiendo esta matriz explícitamente tenemos,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \begin{bmatrix} \frac{-i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} & \frac{-i \sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} \\ \frac{i \sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} & \frac{i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} \end{bmatrix}.$$

### Coefficientes de de transmisión, $t$ y $t'$ , y de reflexión, $r$ y $r'$ :

Sabemos que dada una matriz de transferencia  $\mathbf{T}$  que modele la incidencia normal de ondas planas linealmente polarizadas, esta estará dada en términos de los coeficientes de transmisión,  $t$  y  $t'$ , y de reflexión,  $r$  y  $r'$ , de la siguiente manera,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{tt'-rr'}{t} \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz  $\mathbf{T}_{1-4}$  reconocemos los coeficientes  $t_{1-4}$ ,  $t'_{1-4}$ ,  $r_{1-4}$  y  $r'_{1-4}$  como,

$$t_{1-4} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1] - i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)}, \quad t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{2}Y_0Y_1}{\cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1] - i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)},$$

$$r_{1-4} = \frac{i \sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2) + \cos(kd)[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1]}{\cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1] - i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)}, \quad r'_{1-4} = \frac{i \sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2) - \cos(kd)[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1]}{\cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1] - i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)}.$$

Asimismo podemos dividir por  $1 = Y_0^2/Y_0^2$  todas las expresiones y usando  $Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}} = Y_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ , y  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$  obtenemos,

$$t_{1-4} = \sqrt{2}t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left((1 + \sqrt{2})\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left((1 + \sqrt{2}) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \quad (8)$$

$$r_{1-4} = \frac{i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[(1 - \sqrt{2}) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[(1 - \sqrt{2})\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right]}{\cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left((1 + \sqrt{2})\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left((1 + \sqrt{2}) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \quad (9)$$

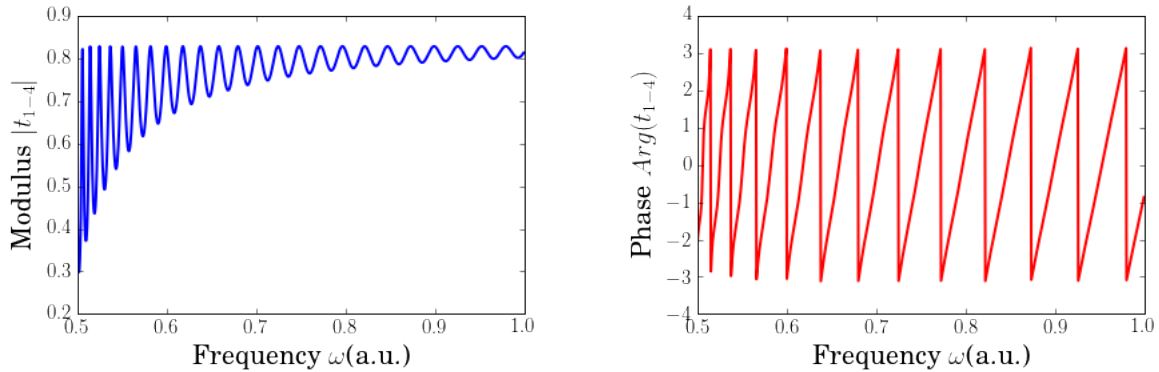
$$r'_{1-4} = \frac{i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[(1 - \sqrt{2}) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] - \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[(1 - \sqrt{2})\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right]}{\cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left((1 + \sqrt{2})\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left((1 + \sqrt{2}) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}. \quad (10)$$

Ahora procederemos a graficar el módulo y la fase de los coeficientes.

**Coefficientes de transmisión  $t_{1-4}$  y  $t'_{1-4}$ :** Notamos primero que  $t_{1-4} \neq t'_{1-4}$ , esto era de esperarse ya que el sistema físico NO es simétrico respecto a  $d/2$ , para poder graficar estos dos coeficientes se procedió a fijar los parámetros  $\omega_p$ ,  $d$ ,  $c$ , como:

$$\omega_p = 0,49, \quad d = 100,0, \quad c = 1,0. \quad (11)$$

Ahora usando el notebook escrito en python disponible online en <https://goo.gl/BuxA4s>, se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de transmisión, primero utilizando la ecuación (8) se muestra el coeficiente  $t_{1-4}$ ,

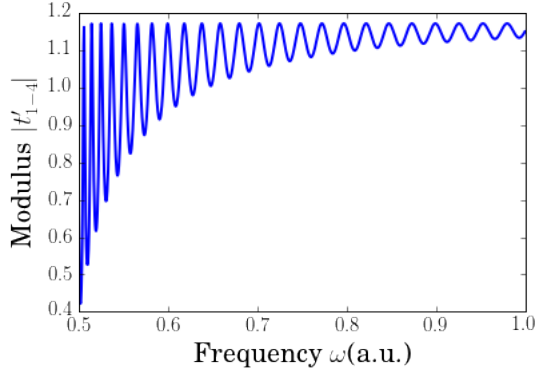


(a) Módulo del coeficiente de transmisión  $t_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

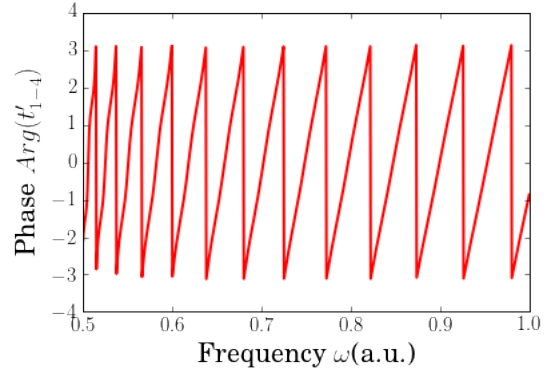
(b) Fase del coeficiente de transmisión  $t_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

Figura 9: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $t_{1-4}$  en función de  $\omega$ .

De igual manera se obtuvo el coeficiente  $t'_{1-4}$  utilizando la ecuación (8),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $t'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

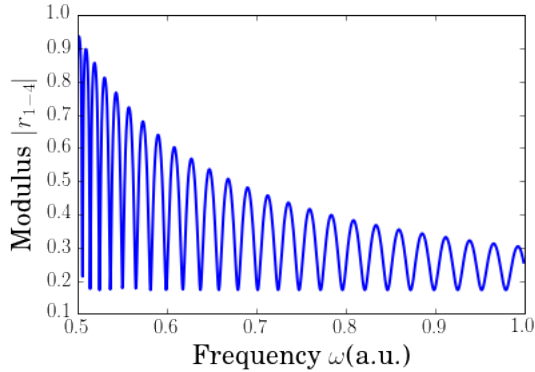


(b) Fase del coeficiente de transmisión  $t'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

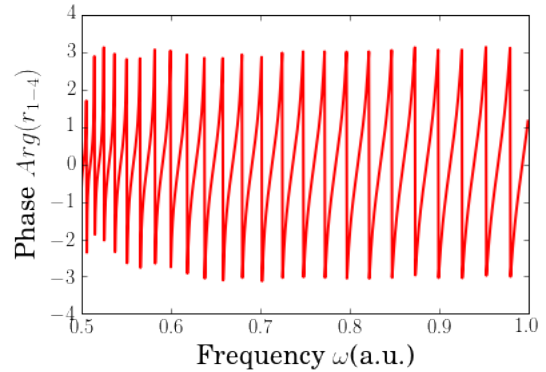
Figura 10: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $t'_{1-4}$  en función de  $\omega$ .

#### Coeficientes de reflexión $r_{1-4}$ y $r'_{1-4}$ :

Notamos nuevamente que  $r_{1-4} \neq r'_{1-4}$ , sin embargo  $|r_{1-4}| = |r'_{1-4}|$ , lo que se espera por conservación de la energía, ahora usando los mismos parámetros de la ecuación (11), se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de reflexión utilizando la ecuación (9), primero se muestra el coeficiente  $r_{1-4}$ ,



(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $r_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

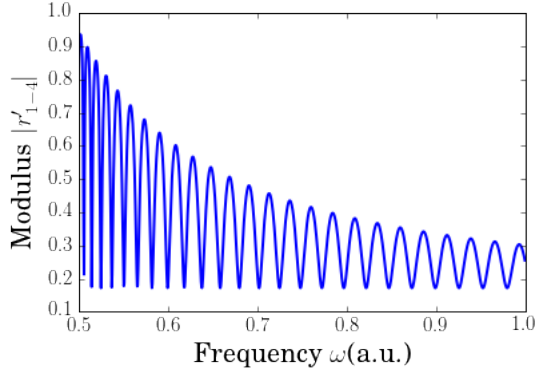


(b) Fase del coeficiente de transmisión  $r_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

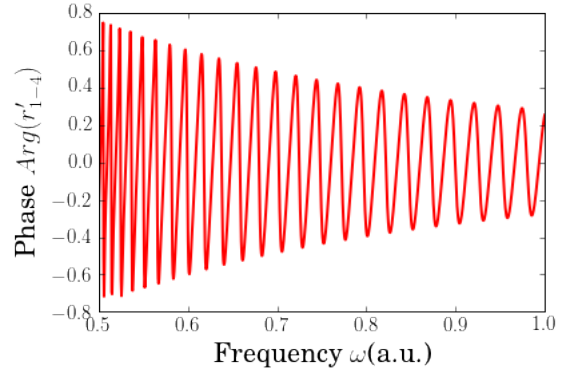
Figura 11: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $r_{1-4}$  en función de  $\omega$ .

De igual manera se obtuvo el coeficiente  $r'_{1-4}$  utilizando la ecuación (8),





(a) Modulo del coeficiente de transmisión  $r'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

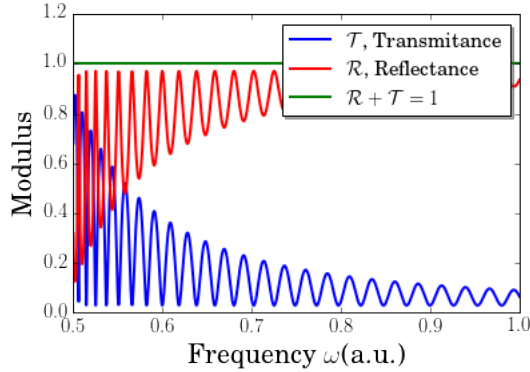


(b) Fase del coeficiente de transmisión  $r'_{1-4}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

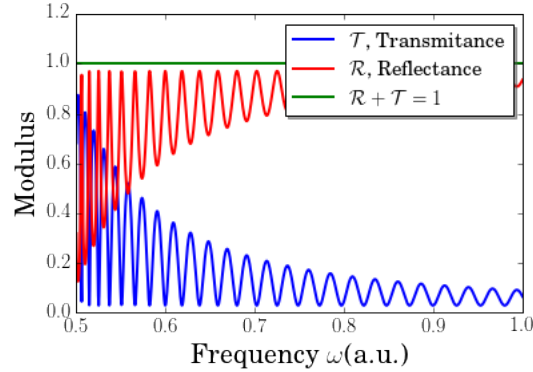
Figura 12: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión  $r'_{1-4}$  en función de  $\omega$  para la interfaz  $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$ .

### Transmitancias $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ y Reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ :

Recordando las expresiones (5) y (6) y que para este problema  $Y_{tr}/Y_{in} = \sqrt{2}$  para  $\mathcal{T}$  y  $Y_{tr}/Y_{in} = 1/\sqrt{2}$  para  $\mathcal{T}'$ , entonces resolvemos nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en <https://goo.gl/BuxA4s>. Se procedió a graficar las transmitancias y las reflectancias, utilizando las ecuaciones (8) y (5) se muestra las transmitancias  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  y con las ecuaciones (9) y (6) se muestra las reflectancias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ ,



(a) Gráfica de las transmitancia,  $\mathcal{T}$ , la reflectancia  $\mathcal{R}$  y su suma  $\mathcal{T} + \mathcal{R}$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .



(b) Gráfica de las transmitancia,  $\mathcal{T}'$ , la reflectancia  $\mathcal{R}'$  y su suma  $\mathcal{T}' + \mathcal{R}'$  en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para  $\omega$ .

Figura 13: Gráfica de las transmitancias,  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$ , y las reflectancias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  en función de  $\omega$  para la interfaz  $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$ . Se puede ver gráficamente que  $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$  y  $\mathcal{T}' + \mathcal{R}' = 1$ .

### Campo eléctrico $Re(E)$ en la región $z \in [-d, 2d]$ :

Ya que la onda incide desde la izquierda tenemos que el vector del campo eléctrico viajante (onda hacia la izquierda - y onda hacia la derecha +) en el plano 4 de la figura, es dado por ,

$$\begin{pmatrix} E_4^+ \\ E_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la evolución espacial del campo en la región  $2\varepsilon_0$  de la derecha es dada por la propagación de una onda hacia la derecha multiplicada por el coeficiente de transmisión  $t$ . Para hallar el campo en las otras regiones usamos las matrices de transferencia  $\mathbf{T}_{1-2}, \mathbf{T}_{2-3}, \mathbf{T}_{3-4}$  para hallar el campo eléctrico en el resto del espacio.

Nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en <https://goo.gl/BuxA4s>, se procedió a graficar el campo eléctrico en función de la coordenada  $z$ , desde  $z = -d$  hasta  $z = -2d$ , este se muestra a continuación,

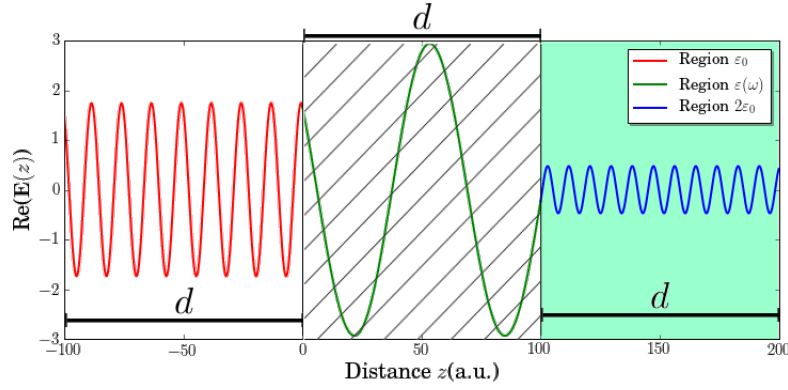


Figura 14: Gráfica del campo eléctrico en función de la coordenada  $z$ , desde  $z = -d$  hasta  $z = -2d$ .

f) Finalmente, considere

**R.** Consideremos la región propuesta en el problema,

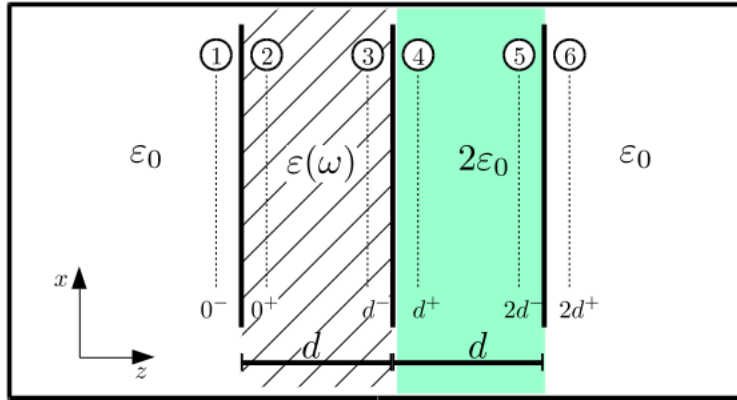


Figura 15: Región del problema f).

Entonces las matrices de transferencia entre las regiones 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6 son:

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1 + Y_0}{2Y_0} & \frac{Y_0 - Y_1}{2Y_0} \\ \frac{Y_0 - Y_1}{2Y_0} & \frac{Y_1 + Y_0}{2Y_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1 + \sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1 - \sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \\ \frac{Y_1 - \sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1 + \sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{T}_{4-5} = \begin{bmatrix} e^{-ik_D d} & 0 \\ 0 & e^{ik_D d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{5-6} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}Y_0 + Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} & \frac{\sqrt{2}Y_0 - Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} \\ \frac{\sqrt{2}Y_0 - Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} & \frac{\sqrt{2}Y_0 + Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz de transferencia que convierte el campo eléctrico de la región 1-6 es,

$$\mathbf{T}_{1-6} = \mathbf{T}_{1-2} \mathbf{T}_{2-3} \mathbf{T}_{3-4} \mathbf{T}_{4-5} \mathbf{T}_{5-6}.$$

Escribiendo esta matriz explícitamente tenemos,

$$\mathbf{T}_{1-6} = \begin{bmatrix} \frac{-i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2 + Y_1^2) + \cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} & \frac{-i \sin(kd)(Y_1^2 - \sqrt{2}Y_0^2) + \cos(kd)[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} \\ \frac{i \sin(kd)(Y_1^2 - \sqrt{2}Y_0^2) + \cos(kd)[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} & \frac{i \sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2 + Y_1^2) + \cos(kd)[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1]}{2Y_0Y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right) e^{-ik_D d} & \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) e^{ik_D d} \\ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) e^{ik_D d} & \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right) e^{ik_D d} \end{bmatrix}.$$

Podemos escribir esta matriz usando un poco de álgebra de la siguiente manera,

$$\mathbf{T}_{1-6} = \begin{bmatrix} T_{1-6}^{(1,1)} & T_{1-6}^{(1,2)} \\ T_{1-6}^{(2,1)} & T_{1-6}^{(2,2)} \end{bmatrix},$$

donde,

$$T_{1-6}^{(1,1)} = \frac{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + Y_0^2] + \cos(kd) 2Y_0Y_1\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) 3Y_0Y_1\}}{2Y_0Y_1},$$

$$T_{1-6}^{(1,2)} = \frac{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 - Y_0^2]\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [-Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) Y_0Y_1\}}{2Y_0Y_1},$$

$$T_{1-6}^{(2,1)} = \frac{\cos(k_D d) \{i \sin(kd) [Y_1^2 - Y_0^2]\} + \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{+i \sin(kd) [-Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) Y_0Y_1\}}{2Y_0Y_1},$$

$$T_{1-6}^{(2,2)} = \frac{\cos(k_D d) \{i \sin(kd) [Y_1^2 + Y_0^2] + \cos(kd) 2Y_0Y_1\} + \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{+i \sin(kd) [Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) 3Y_0Y_1\}}{2Y_0Y_1}.$$

## Coefficientes de de transmisión, $t$ y $t'$ , y de reflexión, $r$ y $r'$ :

Sabemos que dada una matriz de transferencia  $\mathbf{T}$  que modele la incidencia normal de ondas planas linealmente polarizadas, esta estará dada en términos de los coeficientes de transmisión,  $t$  y  $t'$ , y de reflexión,  $r$  y  $r'$ , de la siguiente manera,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{tt' - rr'}{t} \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz  $\mathbf{T}_{1-6}$  reconocemos los coeficientes  $t_{1-6}$ ,  $t'_{1-6}$ ,  $r_{1-6}$  y  $r'_{1-6}$  como,

$$t_{1-6} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + Y_0^2] + \cos(kd) 2Y_0Y_1\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) 3Y_0Y_1\}},$$

$$r_{1-6} = \frac{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 - Y_0^2]\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [-Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) Y_0Y_1\}}{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + Y_0^2] + \cos(kd) 2Y_0Y_1\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) 3Y_0Y_1\}},$$

$$r'_{1-6} = \frac{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 - Y_0^2]\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{+i \sin(kd) [-Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) Y_0Y_1\}}{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + Y_0^2] + \cos(kd) 2Y_0Y_1\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) 3Y_0Y_1\}},$$

$$t'_{1-6} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(k_D d) \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + Y_0^2] + \cos(kd) 2Y_0Y_1\} - \frac{i \sin(k_D d)}{\sqrt{2}} \{-i \sin(kd) [Y_1^2 + 2Y_0^2] + \cos(kd) 3Y_0Y_1\}}.$$

Asimismo podemos dividir por  $1 = Y_0^2/Y_0^2$  todas las expresiones y usando  $Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}} = Y_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ ,  
 $, k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$  y  $k_D = \frac{\omega}{v_D} = \frac{\omega}{c} \sqrt{2}$  obtenemos,

$$t_{1-4} = t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d) \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) 2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\} - \frac{i \sin(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d)}{\sqrt{2}} \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) 3\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\}}, \quad (12)$$

$$r_{1-4} = \frac{\cos(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d) \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] \right\} - \frac{i \sin(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d)}{\sqrt{2}} \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + 1\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\}}{\cos(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d) \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) 2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\} - \frac{i \sin(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d)}{\sqrt{2}} \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) 3\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\}}, \quad (13)$$

$$r'_{1-4} = \frac{\cos(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d) \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] \right\} - \frac{i \sin(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d)}{\sqrt{2}} \left\{ +i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + 1\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\}}{\cos(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d) \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) 2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\} - \frac{i \sin(\frac{\omega}{c} \sqrt{2}d)}{\sqrt{2}} \left\{ -i \sin\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) \left[3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right) 3\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right\}}, \quad (14)$$

Ahora procederemos a graficar el módulo y la fase de los coeficientes.