Solución - Parcial 2 : Electrodinámica II

Keith Patarroyo

9 de Mayo de 2017

Componente para entregar el martes 09 de Mayo de 2017:

Problema 2

Sea una lámina plana de espesor d cuya permitividad se corresponde con el modelo de plasma para altas frecuencias ($\omega \gg \omega_0$, $\omega \gg \Gamma$), es decir, $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$. Dicha lámina está rodeada de vacío. Considere la incidencia normal de ondas planas que están linealmente polarizadas.

a) Escriba la matriz de transferencia de la estructura tomando como planos de referencia dos planos situados por fuera de la lámina pero a una distancia infinitesimal de esta , es decir, en $z = 0^-$ y $z = d^+$.

R.

Consideremos la región propuesta en el problema,

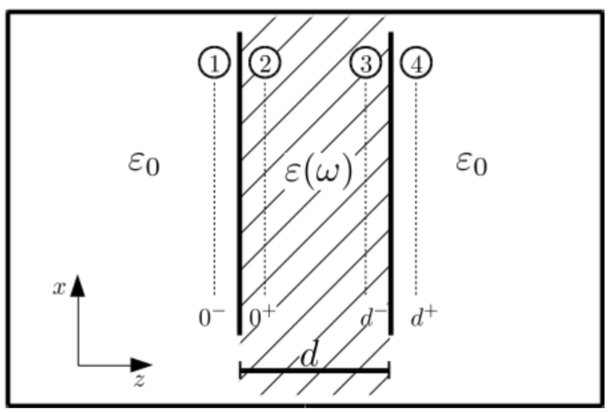


Figura 1: Región del problema inicial.

Entonces las matrices de transferencia entre las regiones 1-2, 2-3, 3-4 son:

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} & \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1-Y_0}{2Y_1} \\ \frac{Y_1-Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Por lo tanto la matriz de transferencia que convierte el campo eléctrico de la región 1-4 es,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \mathbf{T}_{1-2}\mathbf{T}_{2-3}\mathbf{T}_{3-4}.$$

Escribiendo esta matriz explícitamente tenemos,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-ikd}(Y_1+Y_0)^2-(Y_1-Y_0)^2e^{ikd}}{4Y_0Y_1} & \frac{-e^{-ikd}(Y_1^2-Y_0^2)+(Y_0^2-Y_1^2)e^{ikd}}{4Y_0Y_1} \\ \frac{-e^{-ikd}(Y_0^2-Y_1^2)+(Y_0^2-Y_1^2)e^{ikd}}{4Y_0Y_1} & \frac{-e^{-ikd}(Y_0-Y_1)^2+(Y_0+Y_1)^2e^{ikd}}{4Y_0Y_1} \end{bmatrix}.$$

Podemos escribir esta matriz usando un poco de álgebra de la siguiente manera,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \begin{bmatrix} \frac{-i\sin(kd)(Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)(2Y_0Y_1)}{2Y_0Y_1} & \frac{i\sin(kd)(Y_0^2-Y_1^2)}{2Y_0Y_1} \\ \\ \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-Y_0^2)}{2Y_0Y_1} & \frac{i\sin(kd)(Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)(2Y_0Y_1)}{2Y_0Y_1} \end{bmatrix}.$$

b) Grafique los coeficientes de transmisión, t y t', y de reflexión, r y r', mostrando separadamente sus correspondientes módulos y fases en función de la frecuencia ω.(4 gráficas de módulos y 4 gráficas de fases)

R.

Sabemos que dada una matriz de transferencia $\mathbf{T}$ que modele la incidencia normal de ondas planas linealmente polarizadas, esta estará dada en términos de los coeficientes de transmisión, t y t', y de reflexión, r y r', de la siguiente manera,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \\ \frac{r}{t} & \frac{tt'-rr'}{t} \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz $\mathbf{T}_{1-4}$ reconocemos los coeficientes t_{1-4} , t'_{1-4}, r_{1-4} y r'_{1-4} como,

$$t_{1-4} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(kd)(2Y_0Y_1) - i\sin(kd)(Y_0^2+Y_1^2)}, \qquad t'_{1-4} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(kd)(2Y_0Y_1) - i\sin(kd)(Y_0^2+Y_1^2)},$$
$$r_{1-4} = \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-Y_0^2)}{\cos(kd)(2Y_0Y_1) - i\sin(kd)(Y_0^2+Y_1^2)}, \qquad r'_{1-4} = \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-Y_0^2)}{\cos(kd)(2Y_0Y_1) - i\sin(kd)(Y_0^2+Y_1^2)}.$$

Asimismo podemos dividir por $1 = Y_0^2/Y_0^2$ todas las expresiones y usando $Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}} = Y_0\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, y $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ obtenemos,

$$t_{1-4} = t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left(2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left(2-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \tag{2}$$

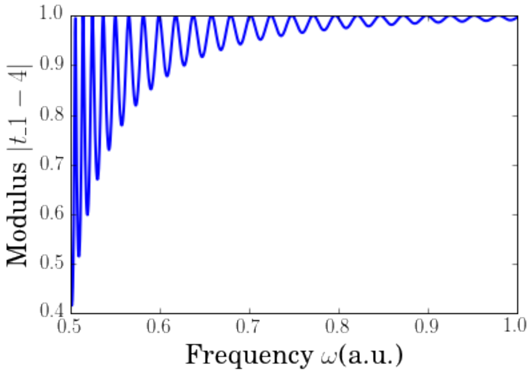
$$r_{1-4} = r'_{1-4} = \frac{i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]}{\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left(2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left(2-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}. \tag{3}$$

Ahora procedemos a graficar el módulo y la fase de los coeficientes.

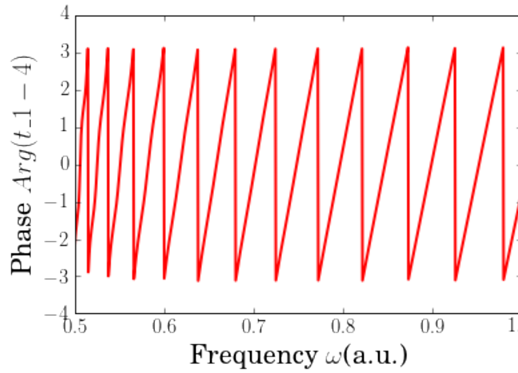
Coeficientes de transmisión t_{1-4} y t'_{1-4}: Notamos primero que $t_{1-4} = t'_{1-4}$, esto era de esperarse ya que el sistema físico es simétrico respecto a $d/2$, para poder graficar estos dos coeficientes se procedió a fijar los parámetros ω_p , d, c, como:

$$\omega_p = 0{,}49, \qquad d = 100{,}0, \qquad c = 1{,}0. \tag{4}$$

Ahora usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/dDBXhV`, se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de transmisión , primero utilizando la ecuación (2) se muestra el coeficiente t_{1-4},



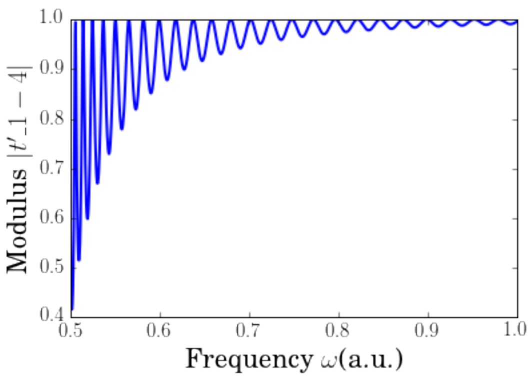
(a) Modulo del coeficiente de transmisión t_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.



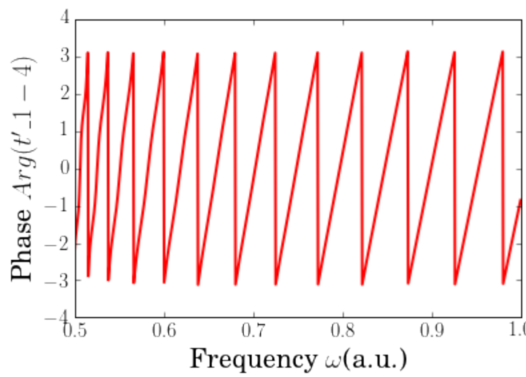
(b) Fase del coeficiente de transmisión t_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 2: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión t_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$.

De igual manera se obtuvo el coeficiente t'_{1-4} utilizando la ecuación (2),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión t'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

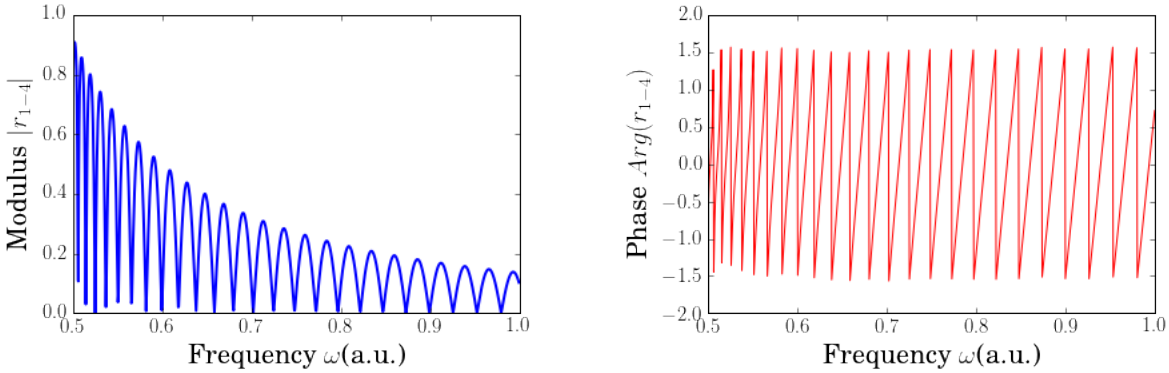


(b) Fase del coeficiente de transmisión t'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 3: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión t'_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$.

Coeficientes de reflexión r_{1-4} y r'_{1-4}:

Notamos nuevamente que $r_{1-4} = r'_{1-4}$, ahora usando los mismos parámetros de la ecuación (4), se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de reflexión utilizando la ecuación (3) , primero se muestra el coeficiente r_{1-4},

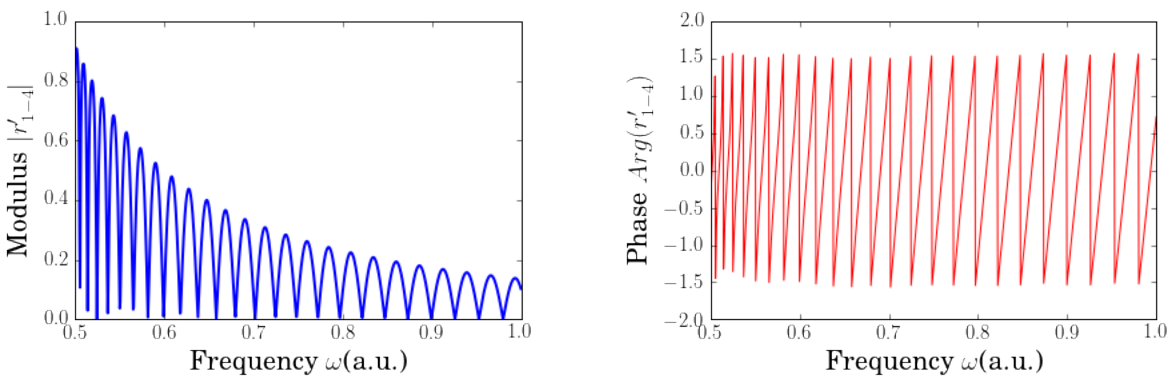


(a) Modulo del coeficiente de transmisión r_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Fase del coeficiente de transmisión r_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 4: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión r_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$.

De igual manera se obtuvo el coeficiente r'_{1-4} utilizando la ecuación (2),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión r'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Fase del coeficiente de transmisión r'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 5: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión r'_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$.

c) Grafique las transmitancias, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, y las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, en función de la frecuencia ω. De paso compruebe si $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$y $\mathcal{T}' + \mathcal{R}' = 1$.

R.

La transmitancia $\mathcal{T}$ y la reflectancia $\mathcal{R}$, están definidas como la razón entre la potencia de entrada P_{in} , la potencia transmitida P_{tr} y la potencia de entrada P_{in} y la potencia reflejada P_R respectivamente. Por el teorema de Poynting complejo sabemos que

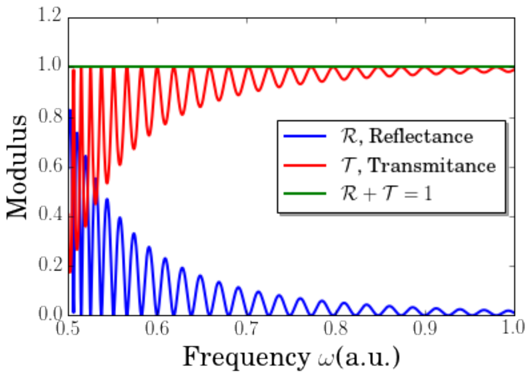
$$P = \frac{1}{2}Re(EH^*) = \frac{1}{2}Y\,|E|^2\,.$$

Por lo tanto la transmitancia $\mathcal{T}$ y la reflectancia $\mathcal{R}$ quedan,

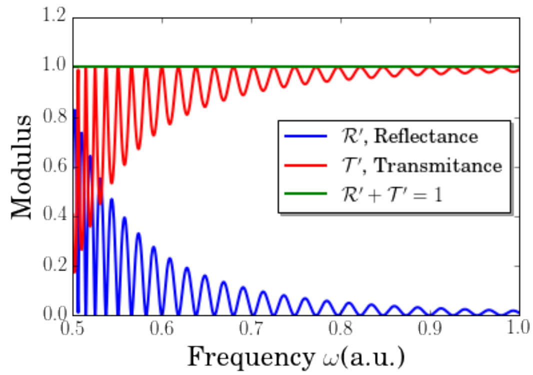
$$\mathcal{T} = \frac{P_{tr}}{P_{in}} = \frac{Y_{tr}\,|E_{tr}|^2}{Y_{in}\,|E_{in}|^2} = \frac{Y_{tr}}{Y_{in}}\,|t|^2\,, \tag{5}$$

$$\mathcal{R} = \frac{P_R}{P_{in}} = \frac{Y_{in}\,|E_R|^2}{Y_{in}\,|E_{in}|^2} = |r|^2\,. \tag{6}$$

Para este problema $Y_{tr}/Y_{in} = 1$ para $\mathcal{T}$ y $Y_{tr}/Y_{in} = 1$ para $\mathcal{T}'$, ahora nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/dDBXhV`, se procedió a graficar las transmitancias y las reflectancias , utilizando las ecuaciones (2) y (5) se muestra las transmitancias $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ y con las ecuaciones (3) y (6) se muestra las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$,



(a) Gráfica de las transmitancia, $\mathcal{T}$, la reflectancia $\mathcal{R}$ y su suma $\mathcal{T}+\mathcal{R}$ en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.



(b) Gráfica de las transmitancia, $\mathcal{T}'$, la reflectancia $\mathcal{R}'$ y su suma $\mathcal{T}'+\mathcal{R}'$ en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 6: Gráfica de las transmitancias, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, y las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$. Se puede ver gráficamente que $\mathcal{T}+\mathcal{R}=1$y $\mathcal{T}'+\mathcal{R}'=1$.

d) Asumiendo que la onda incide desde la izquierda, grafique el campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z=-d$ hasta $z=2d$

R.

Ya que la onda incide desde la izquierda tenemos que el vector del campo eléctrico viajante(onda hacia la izquierda - y onda hacia la derecha +) en el plano 4 de la figura, es dado por ,

$$\begin{pmatrix} E_4^+ \\ E_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la evolución espacial del campo en la región ε_0 de la derecha es dada por la propagación de una onda hacia la derecha multiplicada por el coeficiente de transmisión t. Para hallar el campo en las otras regiones usamos las matrices de transferencia $\mathbf{T}_{1-2}, \mathbf{T}_{2-3}, \mathbf{T}_{3-4}$ para hallar el campo eléctrico en el resto del espacio.

Nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/dDBXhV`.. En la simulación usamos $\omega = 0{,}5$a.u. y los parámetros (4), se procedió a graficar el campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z=-d$ hasta $z=2d$, este se muestra a continuación,

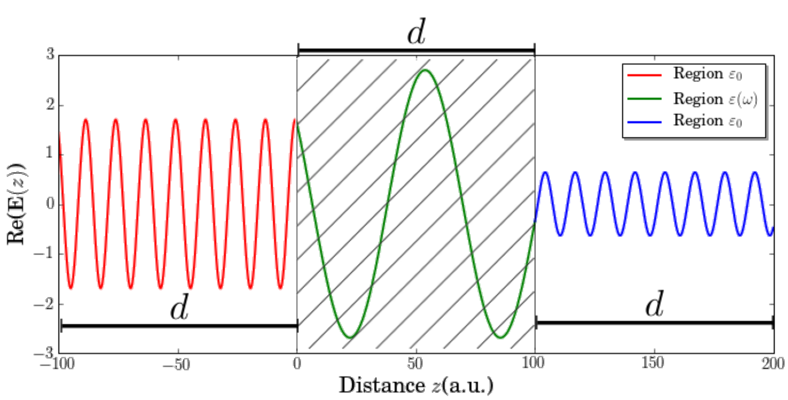


Figura 7: Gráfica del campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z=-d$ hasta $z=2d$ para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$.

e) Ahora asuma que el medio que se coloca a la derecha de la lamina es un dieléctrico de permitividad $2\varepsilon_0$. Dar respuesta nuevamente a la mismas preguntas desde (a) hasta (d).

R. Consideremos la región propuesta en el problema,

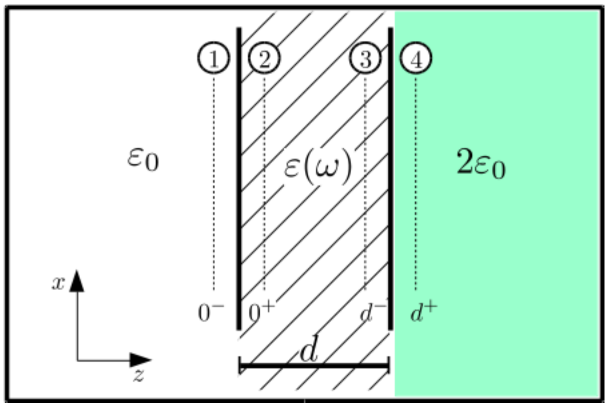


Figura 8: Región del problema e).

Entonces las matrices de transferencia entre las regiones 1-2, 2-3, 3-4 son:

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} & \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} \\ \\ \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ \\ 0 & e^{ikd} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1-\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \\ \\ \frac{Y_1-\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1+\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Por lo tanto la matriz de transferencia que convierte el campo eléctrico de la región 1-4 es,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \mathbf{T}_{1-2}\mathbf{T}_{2-3}\mathbf{T}_{3-4}.$$

Escribiendo esta matriz explícitamente tenemos,

$$\mathbf{T}_{1-4} = \begin{bmatrix} \frac{-i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} & \frac{-i\sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)\left[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} \\ \\ \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)\left[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} & \frac{i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} \end{bmatrix}.$$

Coeficientes de de transmisión, t y t', y de reflexión, r y r':

Sabemos que dada una matriz de transferencia $\mathbf{T}$ que modele la incidencia normal de ondas planas linealmente polarizadas, esta estará dada en términos de los coeficientes de transmisión, t y t', y de reflexión, r y r', de la siguiente manera,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \\ \frac{r}{t} & \frac{tt'-rr'}{t} \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz $\mathbf{T}_{1-4}$ reconocemos los coeficientes t_{1-4} , t'_{1-4}, r_{1-4} y r'_{1-4} como,

$$t_{1-4} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right] - i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)}, \qquad t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{2}Y_0Y_1}{\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right] - i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)},$$

$$r_{1-4} = \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)\left[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right] - i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)}, \qquad r'_{1-4} = \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)-\cos(kd)\left[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right] - i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)}.$$

Asimismo podemos dividir por $1 = Y_0^2/Y_0^2$ todas las expresiones y usando $Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}} = Y_0\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, y $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ obtenemos,

$$t_{1-4} = \sqrt{2}t'_{1-4} = \frac{2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left((1+\sqrt{2})\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left((1+\sqrt{2})-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \tag{8}$$

$$r_{1-4} = \frac{i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[(1-\sqrt{2})-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] + \cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[(1-\sqrt{2})\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right]}{\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left((1+\sqrt{2})\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left((1+\sqrt{2})-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \tag{9}$$

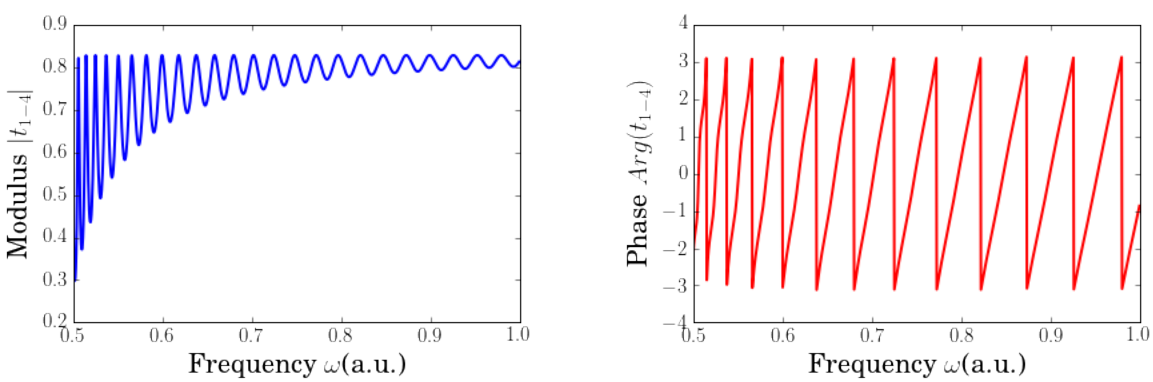
$$r'_{1-4} = \frac{i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[(1-\sqrt{2})-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] - \cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[(1-\sqrt{2})\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right]}{\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left((1+\sqrt{2})\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) - i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left((1+\sqrt{2})-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}. \tag{10}$$

Ahora procederemos a graficar el módulo y la fase de los coeficientes.

Coeficientes de transmisión t_{1-4} y t'_{1-4}: Notamos primero que $t_{1-4} \neq t'_{1-4}$, esto era de esperarse ya que el sistema físico NO es simétrico respecto a $d/2$, para poder graficar estos dos coeficientes se procedió a fijar los parámetros ω_p , d, c, como:

$$\omega_p = 0{,}49, \qquad d = 100{,}0, \qquad c = 1{,}0. \tag{11}$$

Ahora usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/Vki2jJ`, se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de transmisión , primero utilizando la ecuación (8) se muestra el coeficiente t_{1-4},

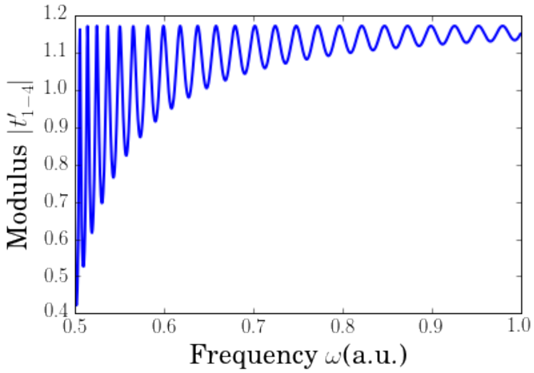


(a) Modulo del coeficiente de transmisión t_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

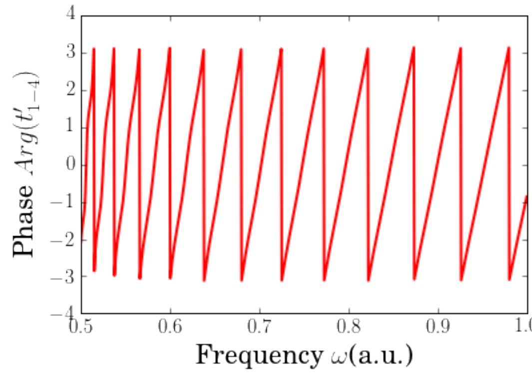
(b) Fase del coeficiente de transmisión t_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 9: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión t_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$.

De igual manera se obtuvo el coeficiente t'_{1-4} utilizando la ecuación (8),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión t'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

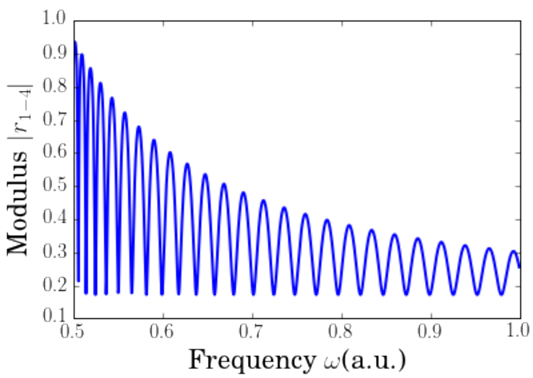


(b) Fase del coeficiente de transmisión t'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

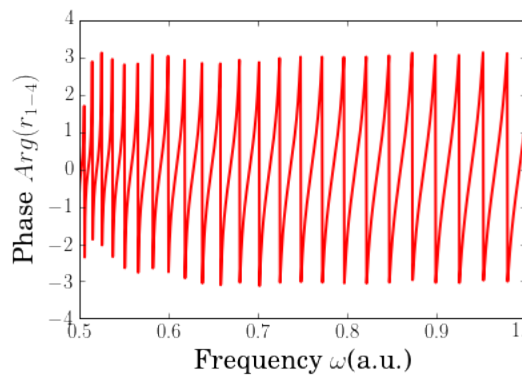
Figura 10: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión t'_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$.

Coeficientes de reflexión r_{1-4} y r'_{1-4}:

Notamos nuevamente que $r_{1-4} \neq r'_{1-4}$, sin embargo $|r_{1-4}| = \left|r'_{1-4}\right|$, lo que se espera por conservación de la energía, ahora usando los mismos parámetros de la ecuación (11), se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de reflexión utilizando la ecuación (9) , primero se muestra el coeficiente r_{1-4},



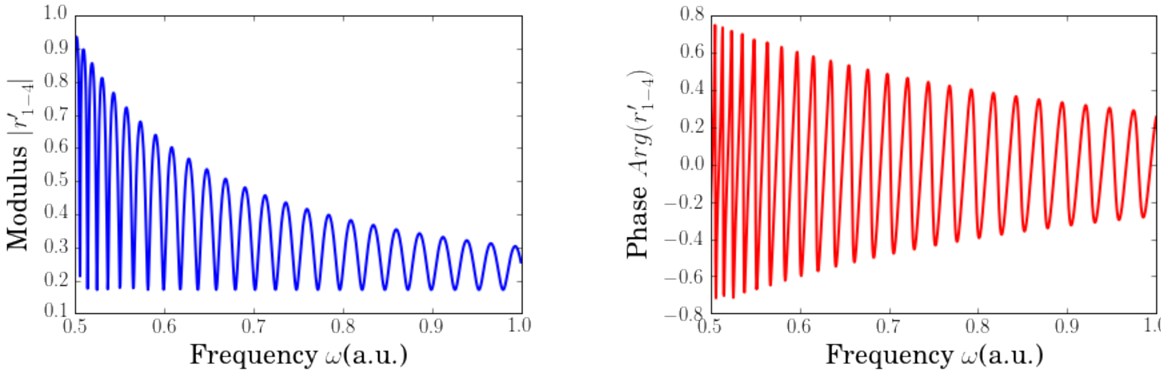
(a) Modulo del coeficiente de transmisión r_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.



(b) Fase del coeficiente de transmisión r_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 11: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión r_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$.

De igual manera se obtuvo el coeficiente r'_{1-4} utilizando la ecuación (8),



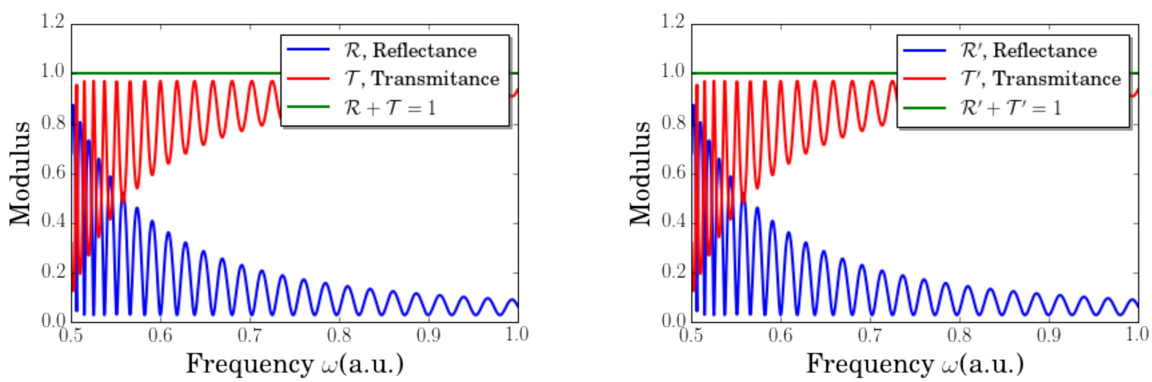
(a) Modulo del coeficiente de transmisión r'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Fase del coeficiente de transmisión r'_{1-4} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 12: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión r'_{1-4} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$.

Transmitancias $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ y Reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$:

Recordando las expresiones (5) y (6) y que para este problema $Y_{tr}/Y_{in} = \sqrt{2}$ para $\mathcal{T}$ y $Y_{tr}/Y_{in} = 1/\sqrt{2}$ para $\mathcal{T}'$, entonces resolvemos nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/Vki2jJ`. Se procedió a graficar las transmitancias y las reflectancias , utilizando las ecuaciones (8) y (5) se muestra las transmitancias $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ y con las ecuaciones (9) y (6) se muestra las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$,



(a) Gráfica de las transmitancia, $\mathcal{T}$, la reflectancia $\mathcal{R}$ y su suma $\mathcal{T}+\mathcal{R}$ en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Gráfica de las transmitancia, $\mathcal{T}'$, la reflectancia $\mathcal{R}'$ y su suma $\mathcal{T}'+\mathcal{R}'$ en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 13: Gráfica de las transmitancias, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, y las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$. Se puede ver gráficamente que $\mathcal{T}+\mathcal{R} = 1$y $\mathcal{T}'+\mathcal{R}' = 1$.

Campo eléctrico $Re(E)$ en la región $z \in [-d, 2d]$:

Ya que la onda incide desde la izquierda tenemos que el vector del campo eléctrico viajante(onda hacia la izquierda - y onda hacia la derecha $+$) en el plano 4 de la figura, es dado por ,

$$\begin{pmatrix} E_4^+ \\ E_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la evolución espacial del campo en la región $2\varepsilon_0$ de la derecha es dada por la propagación de una onda hacia la derecha multiplicada por el coeficiente de transmisión t. Para hallar el campo en las otras regiones usamos las matrices de transferencia $\mathbf{T}_{1-2}, \mathbf{T}_{2-3}, \mathbf{T}_{3-4}$ para hallar el campo eléctrico en el resto del espacio.

Nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/Vki2jJ`. En la simulación usamos $\omega = 0{,}5$a.u. y los parámetros (11), se procedió a graficar el campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z = -d$ hasta $z = 2d$, este se muestra a continuación,

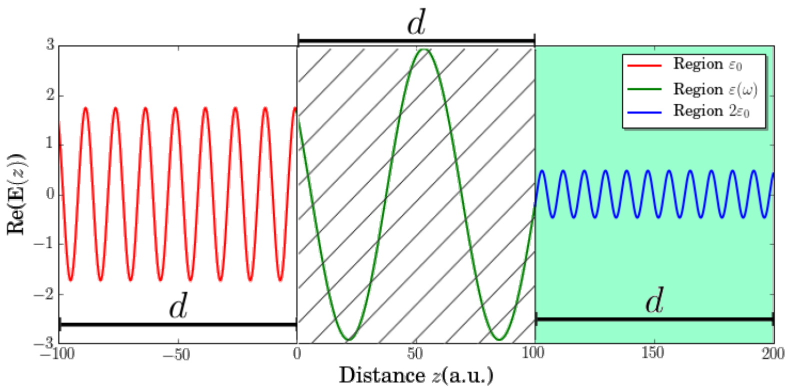


Figura 14: Gráfica del campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z = -d$ hasta $z = 2d$ para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0$.

f) Finalmente, considere una nueva geometría para la que la región de permitividad $2\varepsilon_0$ tenga espesor finito d (igual al espesor de la lámina de plasma) y que el medio de la derecha vuelva a ser vacío (vacío ε_0 + plasma $\varepsilon(\omega)$ + dieléctrico $2\varepsilon_0$ + vacío ε_0). Dar respuesta nuevamente a las mismas preguntas desde (a) hasta (d), pero modificado en el apartado (d) el rango de muestreo del campo eléctrico, siendo ahora desde $z = -d$ hasta $z = 3d$.

R. Consideremos la región propuesta en el problema,

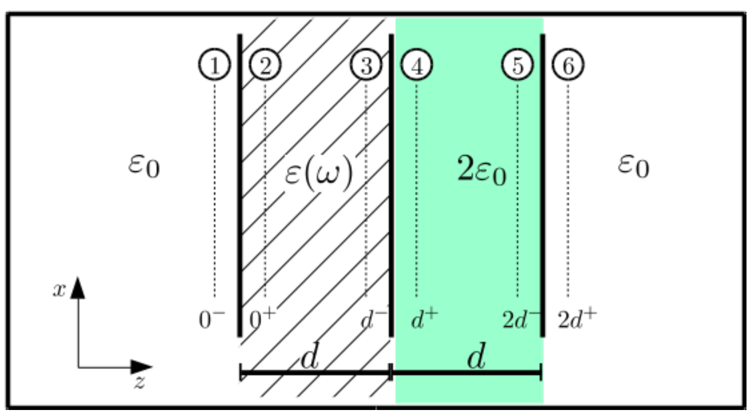


Figura 15: Región del problema f).

Entonces las matrices de transferencia entre las regiones 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6 son:

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} & \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_1}{2Y_0} & \frac{Y_1+Y_0}{2Y_0} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1+\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1-\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \\ \frac{Y_1-\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} & \frac{Y_1+\sqrt{2}Y_0}{2Y_1} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{T}_{4-5} = \begin{bmatrix} e^{-ik_D d} & 0 \\ 0 & e^{ik_D d} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{5-6} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}Y_0+Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} & \frac{\sqrt{2}Y_0-Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} \\ \frac{\sqrt{2}Y_0-Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} & \frac{\sqrt{2}Y_0+Y_0}{2\sqrt{2}Y_0} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz de transferencia que convierte el campo eléctrico de la región 1-6 es,

$$\mathbf{T}_{1-6} = \mathbf{T}_{1-2}\mathbf{T}_{2-3}\mathbf{T}_{3-4}\mathbf{T}_{4-5}\mathbf{T}_{5-6}.$$

Escribiendo esta matriz explícitamente tenemos,

$$\mathbf{T}_{1-6} = \begin{bmatrix} \frac{-i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} & \frac{-i\sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)\left[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} \\ \frac{i\sin(kd)(Y_1^2-\sqrt{2}Y_0^2)+\cos(kd)\left[(1-\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} & \frac{i\sin(kd)(\sqrt{2}Y_0^2+Y_1^2)+\cos(kd)\left[(1+\sqrt{2})Y_0Y_1\right]}{2Y_0Y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)e^{-ik_Dd} & \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)e^{ik_Dd} \\ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)e^{ik_Dd} & \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)e^{ik_Dd} \end{bmatrix}.$$

Podemos escribir esta matriz usando un poco de álgebra de la siguiente manera,

$$\mathbf{T}_{1-6} = \begin{bmatrix} T_{1-6}^{(1,1)} & T_{1-6}^{(1,2)} \\ T_{1-6}^{(2,1)} & T_{1-6}^{(2,2)} \end{bmatrix},$$

donde,

$$T_{1-6}^{(1,1)} = \frac{\cos(k_Dd)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2+Y_0^2\right]+\cos(kd)2Y_0Y_1\right\} - \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)3Y_0Y_1\right\}}{2Y_0Y_1},$$

$$T_{1-6}^{(1,2)} = \frac{\cos(k_Dd)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2-Y_0^2\right]\right\} - \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[-Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)Y_0Y_1\right\}}{2Y_0Y_1},$$

$$T_{1-6}^{(2,1)} = \frac{\cos(k_Dd)\left\{i\sin(kd)\left[Y_1^2-Y_0^2\right]\right\} + \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{+i\sin(kd)\left[-Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)Y_0Y_1\right\}}{2Y_0Y_1},$$

$$T_{1-6}^{(2,2)} = \frac{\cos(k_Dd)\left\{i\sin(kd)\left[Y_1^2+Y_0^2\right]+\cos(kd)2Y_0Y_1\right\} + \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{+i\sin(kd)\left[Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)3Y_0Y_1\right\}}{2Y_0Y_1}.$$

Coeficientes de de transmisión, t y t', y de reflexión, r y r':

Sabemos que dada una matriz de transferencia $\mathbf{T}$ que modele la incidencia normal de ondas planas linealmente polarizadas, esta estará dada en términos de los coeficientes de transmisión, t y t', y de reflexión, r y r', de la siguiente manera,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{tt'-rr'}{t} \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz $\mathbf{T}_{1-6}$ reconocemos los coeficientes t_{1-6} , t'_{1-6}, r_{1-6} y r'_{1-6} como,

$$t_{1-6} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(k_Dd)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2+Y_0^2\right]+\cos(kd)2Y_0Y_1\right\} - \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)3Y_0Y_1\right\}},$$

$$r_{1-6} = \frac{\cos(k_Dd)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2-Y_0^2\right]\right\} - \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[-Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)Y_0Y_1\right\}}{\cos(k_Dd)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2+Y_0^2\right]+\cos(kd)2Y_0Y_1\right\} - \frac{i\sin(k_Dd)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2+2Y_0^2\right]+\cos(kd)3Y_0Y_1\right\}},$$

$$r'_{1-6} = \frac{\cos(k_D d)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2 - Y_0^2\right]\right\} - \frac{i\sin(k_D d)}{\sqrt{2}}\left\{+i\sin(kd)\left[-Y_1^2 + 2Y_0^2\right] + \cos(kd)Y_0Y_1\right\}}{\cos(k_D d)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2 + Y_0^2\right] + \cos(kd)2Y_0Y_1\right\} - \frac{i\sin(k_D d)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2 + 2Y_0^2\right] + \cos(kd)3Y_0Y_1\right\}},$$

$$t'_{1-6} = \frac{2Y_0Y_1}{\cos(k_D d)\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2 + Y_0^2\right] + \cos(kd)2Y_0Y_1\right\} - \frac{i\sin(k_D d)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin(kd)\left[Y_1^2 + 2Y_0^2\right] + \cos(kd)3Y_0Y_1\right\}}.$$

Asimismo podemos dividir por $1 = Y_0^2/Y_0^2$ todas las expresiones y usando $Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}} = Y_0\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, , $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ y $k_D = \frac{\omega}{v_D} = \frac{\omega}{c}\sqrt{2}$obtenemos,

$$t_{1-6} = t'_{1-6} = \frac{2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[2-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}-\frac{i\sin(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[3-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)3\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}}, \tag{12}$$

$$r_{1-6} = \frac{\cos(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]\right\}-\frac{i\sin(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2}+1\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}}{\cos(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[2-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}-\frac{i\sin(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[3-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)3\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}}, \tag{13}$$

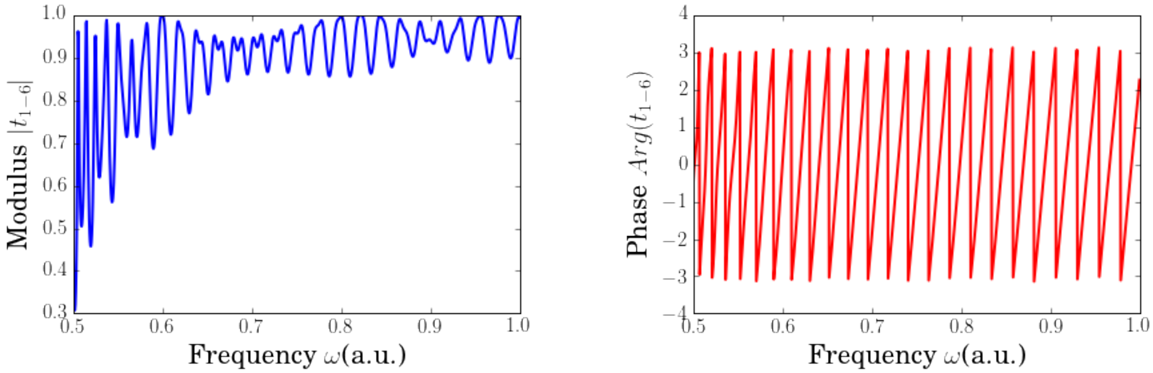
$$r'_{1-6} = \frac{\cos(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]\right\}-\frac{i\sin(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}}\left\{+i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2}+1\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}}{\cos(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[2-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)2\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}-\frac{i\sin(\frac{\omega}{c}\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}}\left\{-i\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)\left[3-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]+\cos\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}\right)3\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right\}}. \tag{14}$$

Ahora procederemos a graficar el módulo y la fase de los coeficientes.

Coeficientes de transmisión t_{1-6} y t'_{1-6}: Notamos primero que $t_{1-6} = t'_{1-6}$, esto era de esperarse ya que el sistema inicia y termina en el mismo medio, vacío, y adicionalmente por que la energía se conserva, para poder graficar estos dos coeficientes se procedió a fijar los parámetros ω_p , d, c, como:

$$\omega_p = 0{,}49, \qquad d = 100{,}0, \qquad c = 1{,}0. \tag{15}$$

Ahora usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/BTPL6n`, se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de transmisión , primero utilizando la ecuación (8) se muestra el coeficiente t_{1-6},

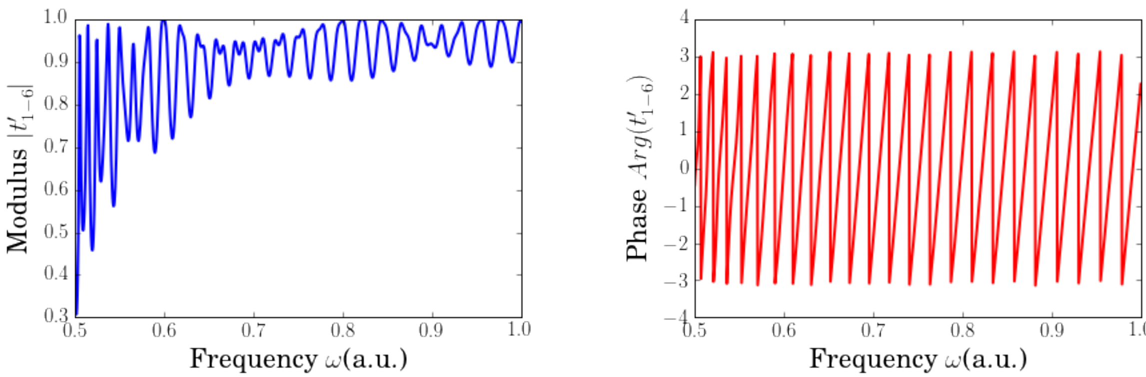


(a) Modulo del coeficiente de transmisión t_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Fase del coeficiente de transmisión t_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 16: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión t_{1-6} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0$.

De igual manera se obtuvo el coeficiente t'_{1-6} utilizando la ecuación (8),



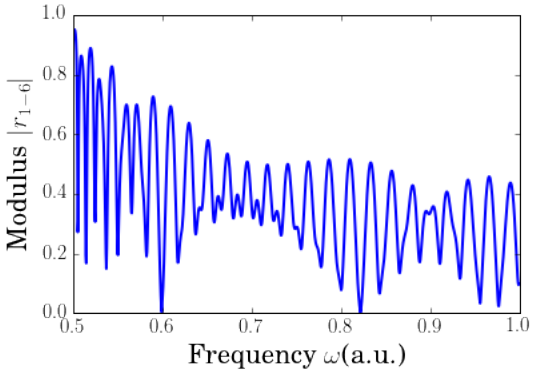
(a) Modulo del coeficiente de transmisión t'_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Fase del coeficiente de transmisión t'_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

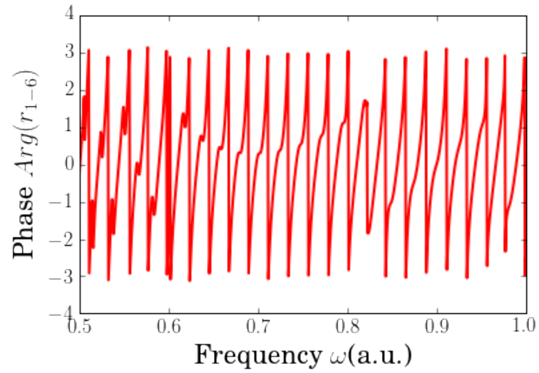
Figura 17: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión t'_{1-6} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0$.

Coeficientes de reflexión r_{1-6} y r'_{1-6}:

Notamos nuevamente que $r_{1-6} \neq r'_{1-6}$, sin embargo $|r_{1-6}| = \left|r'_{1-6}\right|$, lo que se espera por conservación de la energía, ahora usando los mismos parámetros de la ecuación (15), se procedió a graficar el módulo y la fase de los coeficientes de reflexión utilizando la ecuación (9) , primero se muestra el coeficiente r_{1-6},



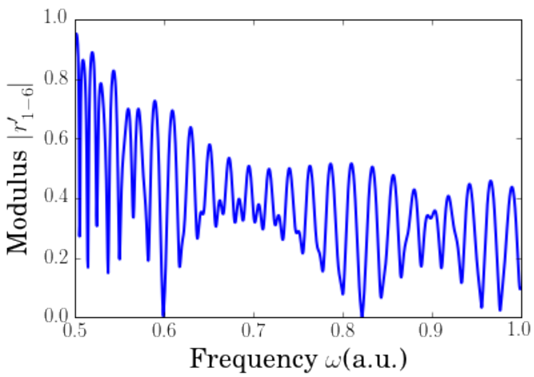
(a) Modulo del coeficiente de transmisión r_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.



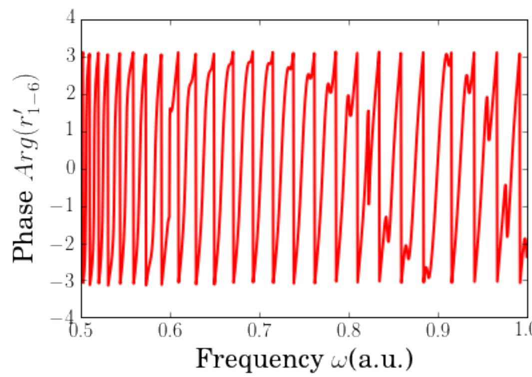
(b) Fase del coeficiente de transmisión r_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 18: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión r_{1-6} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0$.

De igual manera se obtuvo el coeficiente r'_{1-6} utilizando la ecuación (8),



(a) Modulo del coeficiente de transmisión r'_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

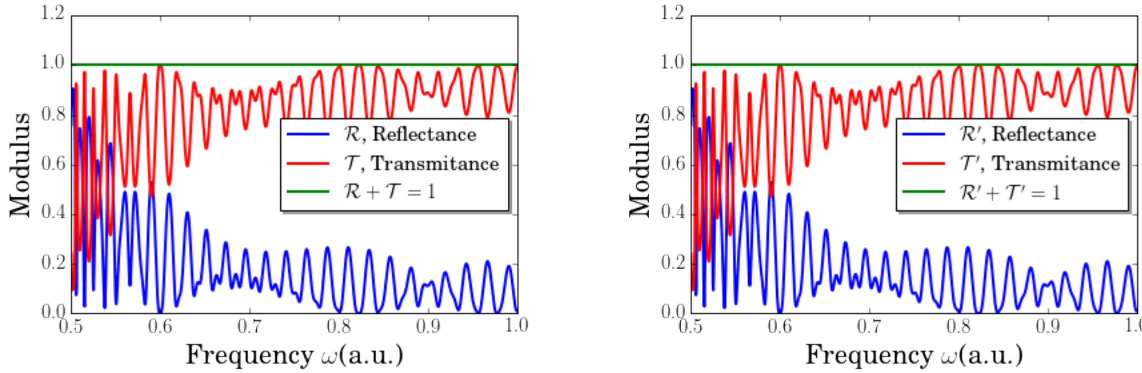


(b) Fase del coeficiente de transmisión r'_{1-6} en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 19: Fase y modulo de el coeficiente de transmisión r'_{1-6} en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0$.

Transmitancias $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ y Reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$:

Recordando las expresiones (5) y (6) y que para este problema $Y_{tr}/Y_{in} = \sqrt{2}$ para $\mathcal{T}$ y $Y_{tr}/Y_{in} = 1/\sqrt{2}$ para $\mathcal{T}'$, entonces resolvemos nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/BTPL6n`. Se procedió a graficar las transmitancias y las reflectancias , utilizando las ecuaciones (8) y (5) se muestra las transmitancias $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ y con las ecuaciones (9) y (6) se muestra las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$,



(a) Gráfica de las transmitancia, $\mathcal{T}$, la reflectancia $\mathcal{R}$ y su suma $\mathcal{T}+\mathcal{R}$ en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

(b) Gráfica de las transmitancia, $\mathcal{T}'$, la reflectancia $\mathcal{R}'$ y su suma $\mathcal{T}'+\mathcal{R}'$ en función de la frecuencia con unidades arbitrarias para ω.

Figura 20: Gráfica de las transmitancias, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, y las reflectancias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ en función de ω para la interfaz $\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega) - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0$. Se puede ver gráficamente que $\mathcal{T}+\mathcal{R}=1$y $\mathcal{T}'+\mathcal{R}'=1$.

Campo eléctrico $Re(E)$ en la región $z \in [-d, 3d]$:

Ya que la onda incide desde la izquierda tenemos que el vector del campo eléctrico viajante(onda hacia la izquierda - y onda hacia la derecha $+$) en el plano 6 de la figura, es dado por ,

$$\begin{pmatrix} E_6^+ \\ E_6^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la evolución espacial del campo en la región ε_0 de la derecha es dada por la propagación de una onda hacia la derecha multiplicada por el coeficiente de transmisión t. Para hallar el campo en las otras regiones usamos las matrices de transferencia $\mathbf{T}_{1-2}, \mathbf{T}_{2-3}, \mathbf{T}_{3-4}, \mathbf{T}_{4-5}, \mathbf{T}_{5-6}$ para hallar el campo eléctrico en el resto del espacio.

Nuevamente usando el notebook escrito en python disponible online en `https://goo.gl/BTPL6n`, En la simulación usamos $\omega = 0{,}5$a.u. y los parámetros (11), se procedió a graficar el campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z=-d$ hasta $z=3d$, este se muestra a continuación,

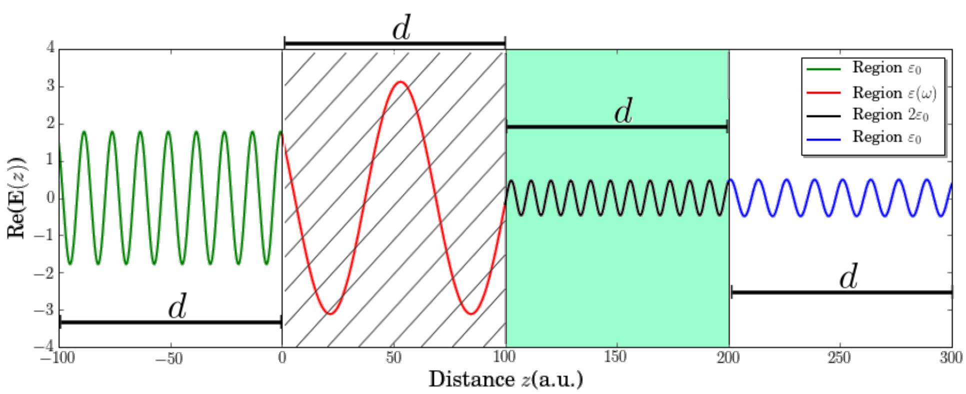


Figura 21: Gráfica del campo eléctrico en función de la coordenada z, desde $z=-d$ hasta $z=3d$.