UPMC	# Notes de Cours	M1 ANDROIDE
ANNÉE 2015-2016	[Logique Modale]	M1 DAC

1 Langage et sémantique des mondes possibles

Pour le langage, on se base sur des propositions $P = \{p, q, \ldots\}$ et les connecteurs usuels $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$, auxquels on ajoute les *modalités* $\Box$ (nécéssaire), et $\Diamond$ (possible).

Un modèle de Kripke est un triplet $M = \langle W, R, \pi \rangle$, où :
— W est un ensemble de mondes,
— $R \subseteq W \times W$, une relation binaire d'accessibilité entre les mondes,
— $\pi : P \rightarrow 2^W$ est une fonction d'évaluation (donnant les mondes où une proposition est vraie).

On note par $M, w \models \phi$ le fait que la formule ϕ est vraie dans le monde w du monde M.
D'un point de vue sémantique, on a en particulier :
— $M, w \models p$ ssi $w \in \pi(p)$,
— $M, w \models \Box\phi$ ssi dans *tous* les mondes w' accessibles depuis w, on a $M, w' \models \phi$,
— $M, w \models \Diamond\phi$ ssi il existe *un* monde w' accessible depuis w, tel que $M, w' \models \phi$.

2 Satisfiabilité, validité

On dit que :
— la formule ϕ est *valide dans le modèle* M (lorsque pour tout monde w de M, on a $M, w \models \phi$), noté $M \models \phi$
— la formule ϕ est *valide* (lorsque ϕ est valide dans tous les modèles), noté $\models \phi$,
— ϕ est *satisfiable* (lorsqu'il existe un modèle M_0 et un monde w_0 de M_0 tel que $M_0, w_0 \models \phi$.

3 Système normal K

Si on ne fait aucune hypothèse particulière sur les propriétés des modèles de Kripke considérés, on est en présence d'un système normal de logique modale. On a alors :
— Nécessitation : si $M \models \phi$, alors $M \models \Box\phi$
— Modus Ponens : si $M \models \phi$ et $M \models \phi \rightarrow \varphi$, alors $M \models \varphi$
— Axiome K : $\Box(\phi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\varphi)$

4 Correspondance

L'axiome K ne demande aucune hypothèse particulière sur les cadres de modèles de Kripke considéré (d'où son nom). Mais on peut établir en général des équivalences entre les propriétés des cadres, et certains schémas d'axiomes (qui ne sont pas valides dans un système normal) :

Nom	**Axiome**	**Propriété**	
T	$\Box\phi \rightarrow \phi$	réflexivité :	$\forall w : (w, w) \in R$
D	$\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$	sérialité :	$\forall w, \exists w' : (w, w') \in R$
4	$\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$	transitivité :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w', w'') \in R$, alors $(w, w'') \in R$
5	$\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	euclidienne :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w, w'') \in R$, alors $(w', w'') \in R$
B	$\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	symétrie :	$\forall w, w'$: si $(w, w') \in R$ alors $(w', w) \in R$

Notation : Quand on parle de la logique modale KT par exemple, il s'agit donc du système normal avec en plus l'axiome T (dans ce cas les modèles de Kripke sont réflexifs), etc.