

# Documentation Diffusion

## Table des matières

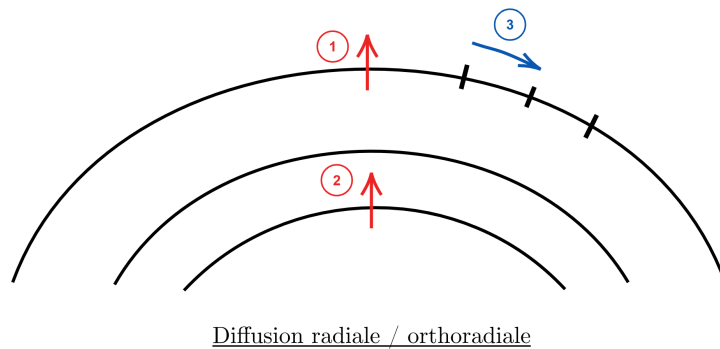
<b>1</b>	<b>Objectifs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Recherches - Données</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Présentation des différentes formes de diffusion</b>	<b>3</b>
3.1	Résolution de l'équation de diffusion . . . . .	3
3.2	Comparaison entre diffusion radiale et diffusion orthoradiale . . . . .	4
3.3	Approximation diffusion radiale, orthoradiale . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Modélisation diffusion orthoradiale</b>	<b>5</b>
4.1	Modèle 1 . . . . .	5
4.2	Modèle 2 . . . . .	6
4.3	Modèle 3 . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Modélisation diffusion radiale</b>	<b>7</b>
5.1	Modèle 4 . . . . .	7
5.2	Modèle 5 . . . . .	8

# 1 Objectifs

L'objectif est de modéliser la diffusion au niveau du sol afin de mesurer son impact sur la température terrestre au cours du temps.

On distingue 3 formes de diffusion :

- (2) celle entre les différentes couches terrestre (radiale)
- (3) celle à la surface de la terre (orthoradiale)
- (1) celle entre le sol et l'air (radiale)



## 2 Recherches - Données

Recherches intéressantes qui nous ont aidés et inspirés sur le sujet :

- PDF sur la chaleur et la température (ENS).
- PDF sur les transferts de chaleur dans la Terre (HAL).

Pour les calculs, on utilise le coefficient de diffusion thermique  $D$  qui dépend de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $C_p$ . On a donc effectué des recherches sur ces différents termes pour se donner une idée des ordres de grandeur. Source : Wikipedia.

Matériau	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Capacité thermique (J.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )	Conductivité thermique (W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
Eau	1000	4185	0.6
Glace	917	2040	2.25
Béton	2400	880	1
Sable	1650	800	0.27
Granit	2750	890	2.9

### 3 Présentation des différentes formes de diffusion

#### 3.1 Résolution de l'équation de diffusion

Pour modéliser notre démarche, nous sommes partis de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$$

- T la température (en K)
- $\Delta T$  le Laplacien de la température
- D le coefficient de diffusion (en m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)

et on a

$$D = \frac{\lambda}{\mu c_p}$$

Puis avec la discrétisation de la formule par Taylor, on retrouve cette formule :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = D \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

avec :

- i la position
- n l'itération dans la boucle

Puis, on peut résoudre cette équation informatiquement avec la méthode d'Euler (donc avec une boucle) grâce à un programme python. On va donc modéliser plusieurs situations (en partant d'une situation très simple pour la complexifier au fur et à mesure) et réaliser un code python pour chacune d'entre elles.

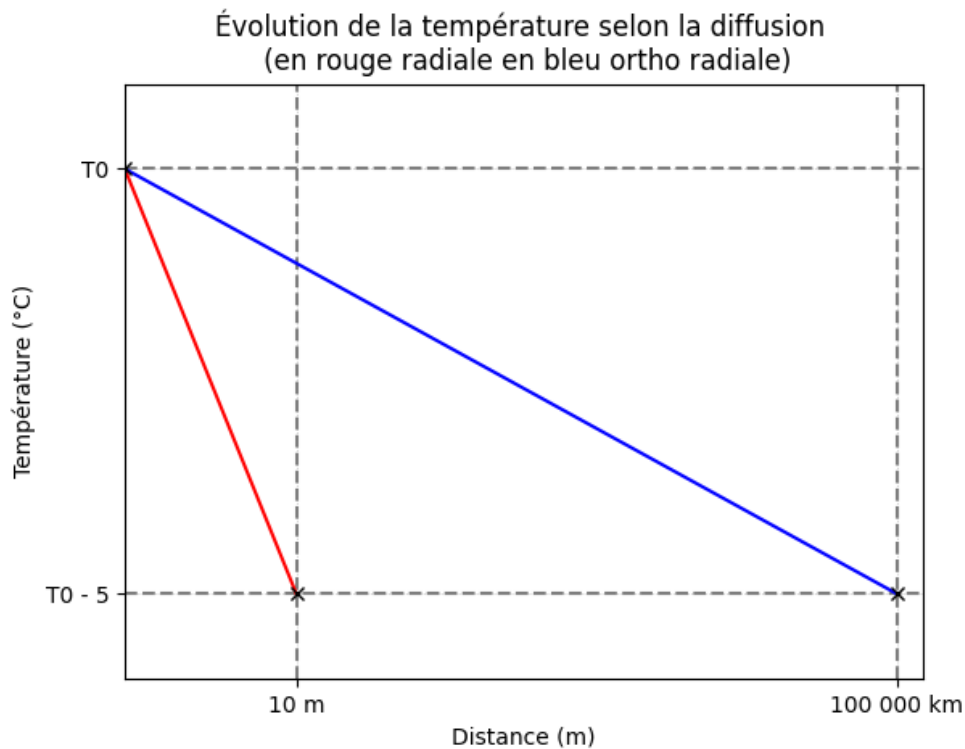
### 3.2 Comparaison entre diffusion radiale et diffusion orthoradiale

On s'intéresse au gradient de la température en coordonnées sphériques. Il possède une composante radiale (selon  $\vec{e}_r$ ) et deux composantes orthoradiales (selon  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$ ). Cependant, les composantes orthoradiales sont négligeables devant la composante radiale.

Considérons une différence de température de  $5^\circ\text{C}$  entre 2 points.

A la surface de la Terre (composante orthoradiale), pour obtenir une différence de  $5^\circ\text{C}$ , il faut parcourir une distance de plusieurs centaines voire même mille kilomètres. Par exemple en regardant la météo, une différence de  $5^\circ\text{C}$  est présente entre ville voire entre pays (centaines de kilomètres)

En profondeur de la Terre (composante radiale), pour obtenir une différence de  $5^\circ\text{C}$  il suffit de quelques mètres. Par exemple, entre un sol en plein soleil et une cave à 5m sous terre, on retrouve déjà une différence de  $5^\circ\text{C}$ .



On remarque que la pente rouge est bien plus élevée que la pente bleue. La composante de  $\nabla T$  sur  $\vec{e}_r$  est donc bien plus élevée que sur  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  (le gradient de température étant plus élevé là où la température grandit ou diminue plus rapidement donc là où la pente est plus élevée).

Or on a la formule du vecteur de diffusion de flux thermique qui est :

$$\vec{j} = -\lambda \nabla T$$

avec  $\lambda$  la conductivité thermique du matériau en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Donc comme les composantes du gradient de température en coordonnées orthoradiales sont négligeables, on a :

$$\vec{j} \approx -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$$

### 3.3 Approximation diffusion radiale, orthoradiale

Pour se donner une idée en ordre de grandeur du temps nécessaire à ce que la diffusion se fasse entièrement, on peut simplifier l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En raisonnant en ordre de grandeur,

$$\tau \sim \frac{L^2}{D}$$

Avec L la distance caractéristique de diffusion et  $\tau$  le temps caractéristique de diffusion.

Pour la diffusion orthoradiale, on prend comme distance typique de diffusion  $L = 1$  km entre deux points. Avec le coefficient de la Terre (soit environ  $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ) on obtient  $\tau = 10^{12}$  s soit plus de  $10^4$  ans. Avec celui de l'eau (soit environ  $10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ ), on obtient  $\tau = 10^{13}$  s soit plus de  $10^5$  ans.

Si on s'intéresse aux ordres de grandeur de la diffusion radiale, on prend maintenant  $L = 1$  m. Avec le coefficient de la Terre, on obtient  $\tau = 10^6$  s, soit plus de 11 jours. Avec celui de l'eau, on obtient  $\tau = 10^7$  s soit environ 3,8 mois. Ces temps caractéristiques de diffusion sont bien plus rapides.

## 4 Modélisation diffusion orthoradiale

### 4.1 Modèle 1

#### Explication

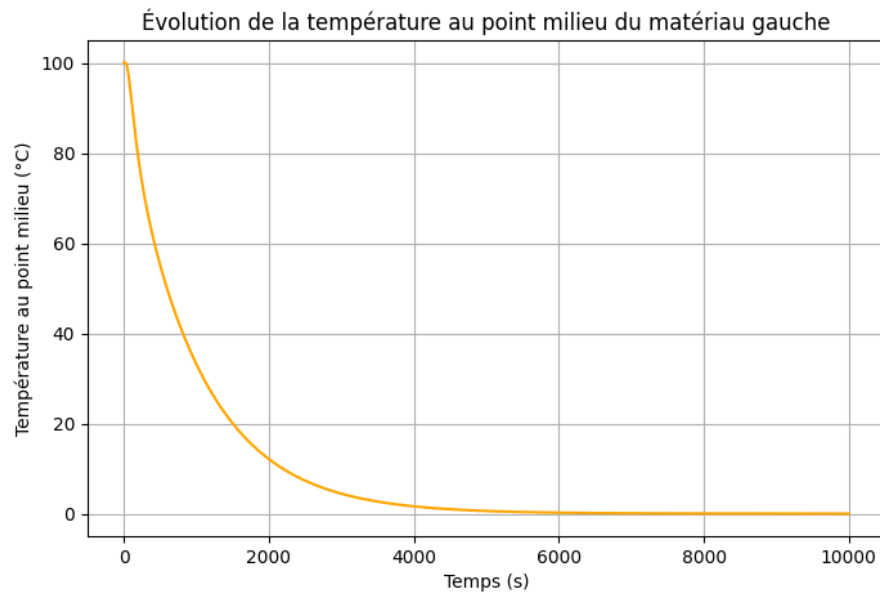
On considère deux plaques rectangulaires identiques côte à côte mais une à température  $T_1$ , l'autre à température  $T_2$ . Celle à  $T_2$  reste fixe,  $T_1$  varie jusqu'à atteindre  $T_2$ . On prend comme données :

- $D = 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$  (coefficient de diffusion thermique)
- $T_1 = 100^\circ\text{C}$
- $T_2 = 0^\circ\text{C}$

#### Code

LIEN CODE

#### Graphe



## 4.2 Modèle 2

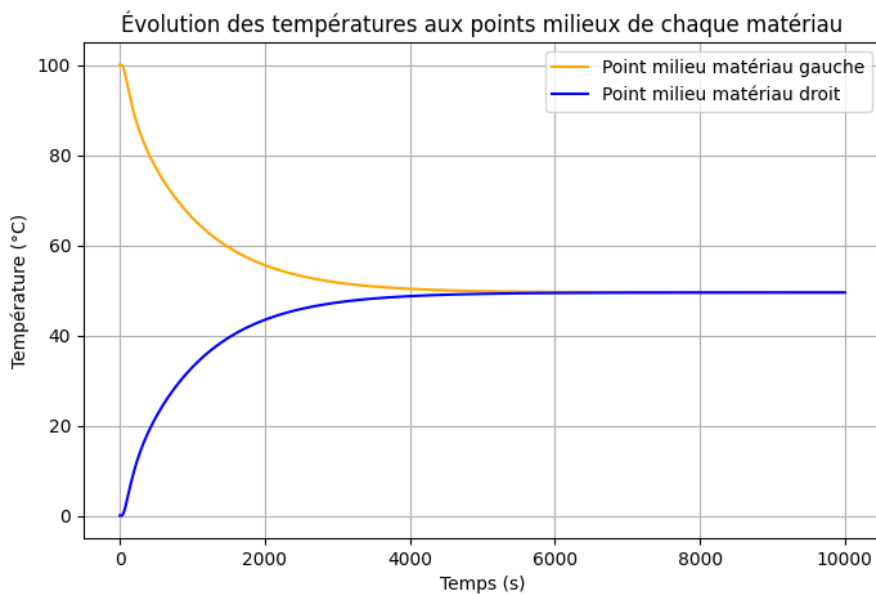
### Explication

On reprend le modèle précédent mais cette fois  $T_2$  n'est pas fixe, elle varie jusqu'à trouver un équilibre avec  $T_1$ . Comme les plaques 1 et 2 sont identiques (mis à part leur température) la température d'équilibre entre les deux plaques doit être la moyenne des deux températures.

### Code

[LIEN CODE](#)

### Graphpe



## 4.3 Modèle 3

### Explication

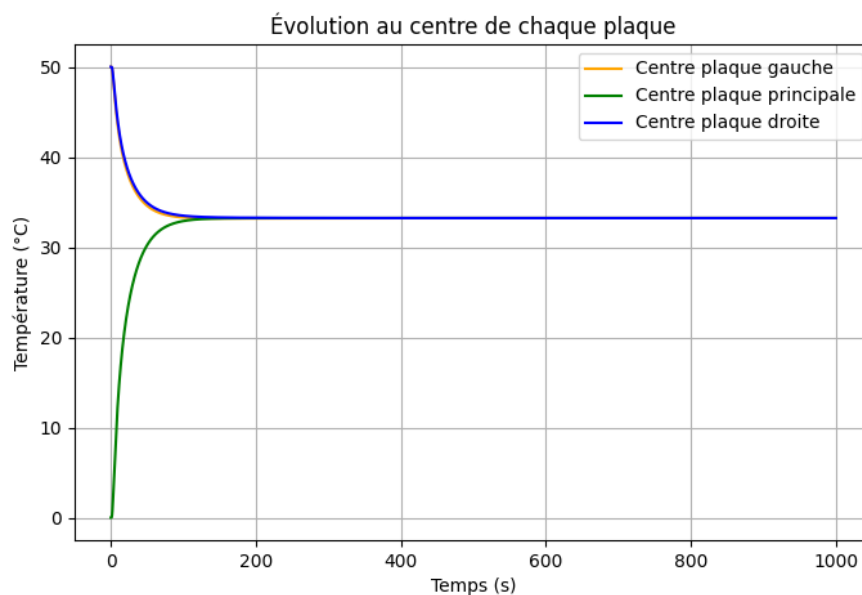
On considère trois plaques, toujours en 1D (donc toutes alignées). La plaque de gauche est à température  $T_1$ , celle du milieu à  $T_2$  et celle de droite à  $T_3$ .

- $T_1 = 50^\circ\text{C}$
- $T_2 = 0^\circ\text{C}$
- $T_3 = 50^\circ\text{C}$

### Code

[LIEN CODE](#)

### Graphe



## 5 Modélisation diffusion radiale

### 5.1 Modèle 4

#### Explication

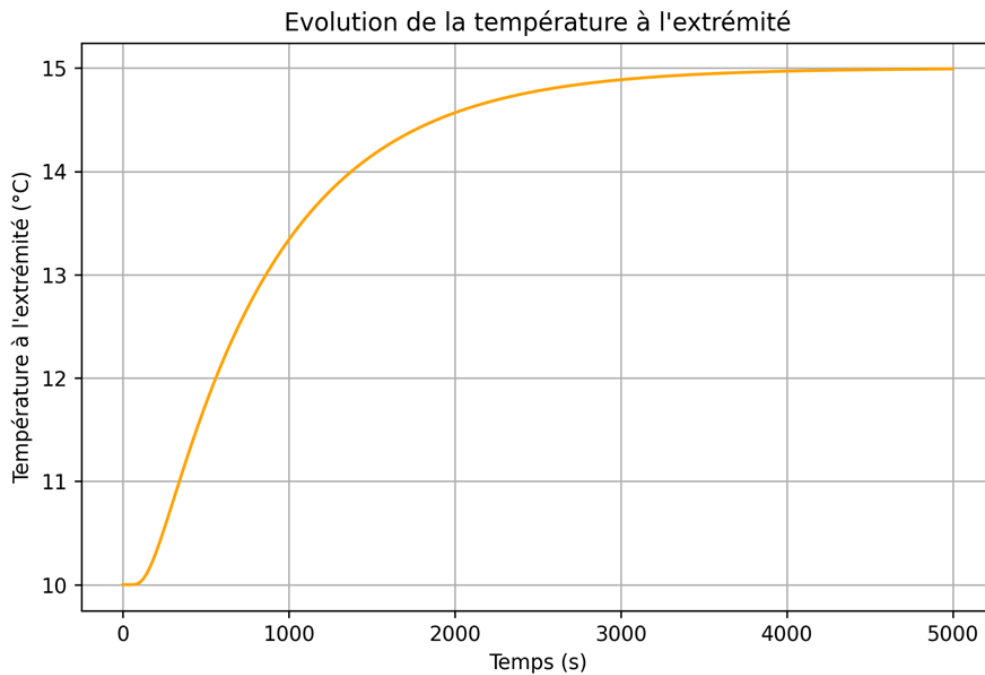
On est reparti du Modèle 1 de la partie diffusion orthoradiale mais en l'adaptant pour une diffusion radiale. on voit la variation de la température en surface avec une température en profondeur fixée (ce qui est semblable à une cave).

- $T_{\text{surf}} = 10^\circ\text{C}$
- $T_{\text{fixe}} = 15^\circ\text{C}$

### Code

[LIEN CODE](#)

## Graphe



## 5.2 Modèle 5

### Explication

On repart du modèle précédent mais en faisant un bilan de puissance pour pouvoir l'intégrer au code principal. Le code tient compte du fait que, chaque heure, la puissance repart de la valeur précédente. - Exemple de variation de la puissance avec une température de surface oscillante.

### Code

[LIEN CODE](#)

## Graphe

