Modello di un'epidemia: Il Morbillo

Progetto per l'esame di Modelli Matematici

Francesco L. De Faveri

Struttura della Presentazione

1. La malattia del Morbillo
2. Il modello SIRM
3. Modello in MATLAB

La Malattia del Morbillo

Malattia:

Il Morbillo è una malattia infettiva che causa complicazioni nei malati a livello respiratorio e non, portando in molti casi anche alla morte.

Una cura è proposta dalla vaccinazione, raccomandata tra i 12 e i 15 mesi d'età.
Secondo l'Istituto Superiore di Sanità:
"Una volta contratto, il morbillo dà un'immunizzazione teoricamente definitiva, quindi non ci si ammalerà più per l'intera durata della vita. Il morbillo è diffuso in tutto il mondo. È una delle più frequenti febbri eruttive, sebbene sia molto meno comune da quando è in uso la vaccinazione con richiamo."
Si tratta quindi di una malattia *Immunizzante*.

Il modello SIRM

Durante un'epidemia la popolazione *omogenea*[1] può essere suddivisa in quattro categorie:

i) Individui sani, $S(t)$, suscettibili alla malattia;

ii) Individui infetti, $I(t)$, persone che svolgono il ruolo di vettore del virus che causa la malattia;

iii) Individui guariti, $R(t)$, immunizzati, che vengono considerati rimossi;

iv) Individui morti, $M(t)$.

Per analizzare il modello dell'epidemia utilizzeremo il modello ***SIRM (Suscettibili, Infetti, Rimossi, Morti)***.

[1] Nel caso in esame si assume che la popolazione abbia la stessa probabilità di infettarsi, guarire e morire. Non si tengono conto di fattori ambientali, legati all'età o malnutrizione.

Il modello SIRM

Si indica con $N(t)$ il numero di persone che compone la popolazione durante il periodo interessato, ovvero il periodo dell'epidemia, allora le variabili $S(t), I(t), R(t), M(t)$, variano nel tempo rispettando:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{1}$$

Il modello SIRM

Si osserva che:

i) $S(t)$ ha un andamento decrescente dovuto dal progressivo aumento dei contagi e il consequenziale aumento degli infetti $I(t)$;

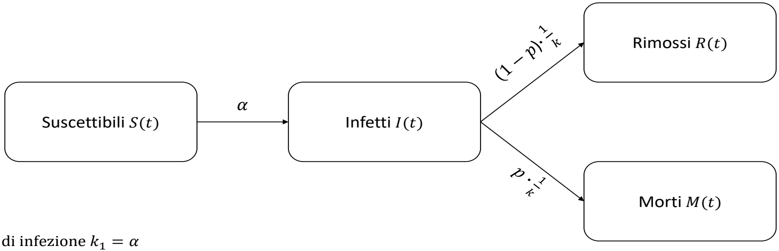
ii) $I(t)$ aumenta a inizio epidemia e decresce con la conclusione dell'epidemia a seconda di un certo indice;

iii) $R(t)$ e $M(t)$ aumentano fino alla fine dell'epidemia, quando si stabilizzeranno ad un valore asintotico.
Infatti, si ha che $\forall t \geq 0$,

$$0 \leq R(t) \leq N(t), \text{ e si ha } \lim_{t \to +\infty} R(t) = \lim_{t \to +\infty} N(t)$$

Il modello SIRM

Nel seguente diagramma di flusso è rappresentata la situazione in esame:



Tasso di infezione $k_1 = \alpha$
Tasso di rimozione $k_2 = \frac{1}{k}\big((1-p)+p\big) = \frac{1}{k}$

Il modello SIRM

Si denota con:

- α il tasso di contrazione della malattia, esso si può ricavare come:

$$\alpha = \frac{R_{zero}}{kN(0)}$$

  dove:
  R_{zero} = Tasso iniziale di riproduzione del virus, al tempo $t = 0$.
  k = giorni in cui un infetto è contagioso (il morbillo è contagioso al più 15 giorni).

- p tasso di mortalità.

Importante per controllare l'andamento dell'epidemia è l'indice R_t, definito come segue:

$$R_t = \frac{S(t)k_1}{k_2} = \frac{S(t)R_{zero}k}{kN(t)} = \frac{S(t)R_{zero}}{N(t)}$$

Il modello SIRM

Quindi:

$$\begin{cases} S(t+\Delta t) = S(t) - \alpha S(t) I(t) \Delta t \\ \\ I(t+\Delta t) = I(t) + \left(\alpha S(t) I(t) - \dfrac{1}{k} I(t) \right) \Delta t \\ \\ R(t+\Delta t) = R(t) + \dfrac{1-p}{k} I(t) \Delta t \\ \\ M(t+\Delta t) = M(t) + \dfrac{p}{k} I(t) \Delta t \end{cases}$$

Il modello SIRM

Sistema di Equazioni del modello

Sistema da risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI, & S(0) = S_0 \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \dfrac{1}{k} I, & I(0) = I_0 \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1-p}{k} I, & R(0) = R_0 \\[2ex] \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{p}{k} I, & M(0) = M_0 \end{cases}$$

Con:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

Modello in MATLAB

Modelli Numerici per la risoluzione del sistema.