Übungen zur Vorlesung

Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsblatt 5

ARBEITSGRUPPE KRYPTOGRAPHIE UND KOMPLEXITÄTSTHEORIE
Prof. Dr. Marc Fischlin
Dr. Christian Janson
Patrick Harasser
Felix Rohrbach

Sommersemester 2019
Veröffentlicht am: 17.05.2019
Abgabe am: 31.05.2019, 12:00 Uhr

P1 (Gruppendiskussion)

Nehmen Sie sich etwas Zeit, um die folgenden Fachbegriffe in einer Kleingruppe zu besprechen, sodass sie anschließend in der Lage sind, die Begriffe dem Rest der Übungsgruppe zu erklären:

(a) Rot-Schwarz-Bäume
(b) AVL-Bäume

P2 (Suchpfade in binären Suchbäumen)

Die folgenden Zahlenfolgen sollen Suchpfade bei der Suche nach einem Wert in einem binären Suchbaum darstellen. Bestimmen Sie ob ein binärer Suchbaum existiert, auf dem der angegebene Suchpfad entsteht. Falls nicht, begründen Sie warum dieser nicht existieren kann.

(a) 75, 85, 130, 82, 150, 140, 145

(b) 14, 24, 20, 23, 21, 22

(c) 345, 980, 756, 520, 437, 320, 390

(d) 345, 980, 756, 520, 437, 420, 390

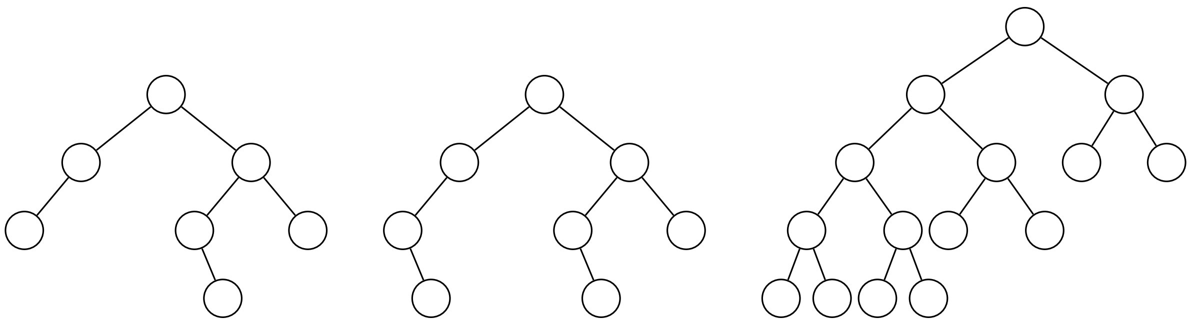
(e) 345, 980, 756, 520, 687, 590, 623

P3 (Kurze Beschreibung)

Beweisen Sie folgende Aussage: Ein Baum mit n Knoten hat immer genau $n - 1$ Kanten.
(Hinweis: Vollständige Induktion)

P4 (Rot-Schwarz-Bäume)

Sind die folgenden Bäume Rot-Schwarz-Bäume? Wenn ja, geben Sie eine Färbung an, wenn nein, begründen Sie, warum.



P5 (Bäume färben)

Geben Sie einen Algorithmus an, der die Knoten eines Binären Baums so färbt, dass er die Eigenschaften eines Rot-Schwarz-Baums hat. Falls dies nicht möglich ist, geben Sie einen Fehler aus. Sie dürfen davon ausgehen, dass Sie die Höhe des Baums als Parameter übergeben bekommen, und dass Sie Zugriff auf einen Algorithmus MinHeight(n) haben, der für Knoten n die minimale Anzahl an Schritten zu einem Blatt berechnet.

Hausübungen

In diesem Bereich finden Sie die theoretischen Hausübungen von Blatt 5. Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zu den Hausübungen und deren Abgabe im Moodle-Kurs! **Denken Sie bitte daran, dass Ihre Lösungen nachvollziehbar und entsprechend ausführlich dargestellt und begründet werden sollen.**
Bitte reichen Sie Ihre Abgabe bis spätestens **Freitag, 31.05.2019, um 12:00 Uhr** ein. Verspätete Abgaben können **nicht** berücksichtigt werden.

H1 (Einfügen und Löschen) (1+2+2 Punkte)

(a) Fügen Sie der Reihe nach Knoten mit den Schlüsseln $3, 5, 10, 11, 2, 4, 8, 7, 1, 6, 9$ in einen leeren binären Suchbaum ein. Skizzieren Sie Ihr Zwischenergebnis nach jeder Einfügeoperation. Begründen Sie, ob der resultierende Baum ein Rot-Schwarz-Baum ist; sollte dies der Fall sein, geben Sie an wie viele unterschiedliche Rot-Schwarz-Färbungen der Baum hat.
(b) Fügen Sie der Reihe nach Knoten mit den Schlüsseln $3, 5, 10, 11, 2, 4, 8, 7, 1, 6, 9$ in einen leeren Rot-Schwarz-Baum ein. Skizzieren Sie Ihr Zwischenergebnis nach jeder Einfügeoperation.
(c) Fügen Sie der Reihe nach Knoten mit den Schlüsseln $3, 5, 10, 11, 2, 4, 8, 7, 1, 6, 9$ in einen leeren AVL-Baum ein. Skizzieren Sie Ihr Zwischenergebnis nach jeder Einfügeoperation. Begründen Sie, ob der resultierende Baum ein Rot-Schwarz-Baum ist; sollte dies der Fall sein, geben Sie an wie viele unterschiedliche Rot-Schwarz-Färbungen der Baum hat.

H2 (Rotationen) (1+1+2+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Binäre-Suchbaum-Eigenschaft unter Rechtsrotationen erhalten bleibt. Genauer: Ist B ein binärer Suchbaum und B' der Baum, den man durch eine beliebige Rechtsrotationen von B erhält, dann ist B' auch ein binärer Suchbaum. (Offensichtlich gilt dieselbe Eigenschaft auch für Linksrotationen.)
(b) Es sei B ein binärer Suchbaum. Für einen Knoten v in B bezeichne $\ell(v)$ die Anzahl der Knoten im linken Teilbaum von v, und sei $L(B) = \sum \ell(v)$, wobei sich die Summe über alle Knoten in B erstreckt. Zeigen Sie, dass eine Rechtsrotation die Zahl $L(B)$ verkleinert. Folgern Sie daraus, dass man höchstens n^2 aufeinanderfolgende Rechtsrotationen in einem Baum mit n Knoten durchführen kann.
(c) Zeigen Sie, dass jeder binäre Suchbaum mit n Knoten durch $2n - 2$ Rotationen in einen beliebigen anderen binären Suchbaum mit denselben Knoten überführt werden kann.
(d) Gilt die Eigenschaft aus (c) auch, wenn man sich nur auf Rechtsrotationen beschränkt? Begründen Sie Ihre Angabe.

H3 (Anzahl verschiedener binärer Suchbäume) (1+1+1+1+1 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $b_n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der verschiedenen binären Suchbäume mit Knoten $1, \ldots, n$. In dieser Aufgabe sollen Sie eine explizite Formel für b_n, sowie eine asymptotische Abschätzung für b_n berechnen.

(a) Wir setzen formal $b_0 = 1$. Zeigen Sie, dass $b_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{i-1} b_{n-i}$ für alle $n \geq 1$.
(b) Betrachten Sie die formale Potenzreihe $B(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, welche der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugeordnet wird. Zeigen Sie, dass $B(x) = xB(x)^2 + 1$. Folgern Sie daraus, dass $B(x) = \dfrac{1}{2x}\big(1 - \sqrt{1-4x}\big)$.

Die *Taylor-Entwicklung* einer Funktion $f(x)$ im Punkt $x = a$ ist durch $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ definiert, wobei $f^{(n)}(a)$ die n-te Ableitung von f, ausgewertet im Punkt $x = a$, bezeichnet.

(c) Für $f(x) = \sqrt{1-4x}$, zeigen Sie, dass $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right) \cdots \left(\dfrac{-2n+3}{2}\right)(1-4x)^{\frac{-2n+1}{2}} \cdot (-4)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(d) Zeigen Sie, dass $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, indem Sie die Taylor-Entwicklung von $f(x) = \sqrt{1-4x}$ im Punkt $x = 0$ anwenden.

(e) Verwenden Sie die Stirling-Formel $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}(1 + O(1/n))$, um die Abschätzung $b_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}(1 + O(1/n))$ zu beweisen.