Algorithmen und Datenstrukturen - Hausübung 03

Gruppenmitglieder

- Emre Berber (2957148)
- Christoph Berst (2743394)
- Jan Braun (2768531)

Inhaltsverzeichnis

H1

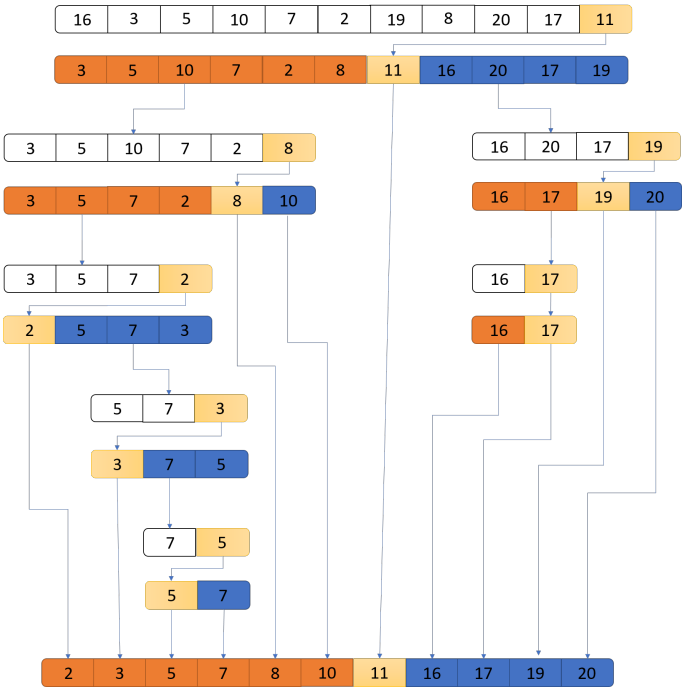
a)

$$\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{2} \in \mathrm{O}(n^2)$$

Je nachdem, ob in Zeile 4 vom Partition-Algorithmus (s. Foliensatz 02 - Seite 220-284) $<$ oder $\leq$ steht, durchläuft i das Teilarray gar nicht oder komplett. Auf jeden Fall steht i nach Partition an einer der Enden des Teilarrays, weswegen der nächste Rekursionsaufruf unbalanciert mit (Anzahl der Elemente im aktuellen Teilarray) -1 Elementen geschieht. Das ganze geschieht $(n-1)$ mal, da man den letzten Fall bei dem das Teilarray nur noch aus einem Element besteht nicht betrachten muss.
Wenn dieses Ablaufen der Elemente nun graphisch betrachten, haben wir nun ein Dreieck. Daher kommt auch die Multiplikation mit $(n+2)$ und $\frac{1}{2}$. Die $(n+2)$ entstehen durch das aneinander legen der Dreiecke. Zur Erinnerung der letzte Rekursionsaufruf hat 2 Elemente.

b)

Teilarrayzerlegung seihe Bild rechts



c)

Best-Case:
$[2, 11, 7, 19, 3, 16, 8, 20, 5, 17, 10]$
23 Vergleiche

Worst-Case:
$[2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 16, 17, 19, 20]$
55 Vergleiche

H2

a)

```
Find-Modal-M(A, l, r)
1   // l = 0
2   // r = A.length − 1
3   WHILE true DO
4       m = l + (r − l) / 2
5       IF A[m] > A[m+1] THEN
6           IF m == l
7               return m
8           r = m
9       ELSE
10          IF m == l
11              return m+1
12          left = m+1
```

Laufzeit bestimmt sich da dadurch, dass es sich durch die Zeilen 4, 8 und 12 das betrachtete Array immer halbiert wird. $\mathrm{O}(\log n)$

Schleifeninvariante: Zwischen l und r liegt immer m.
Initialisierung: In jedem Modalenarray gibt es ein m.
Fortsetzung: Da m zwischen dem Auf- und dem Absteienteil liegt, muss m in der linken Hälfte liegen, wenn A[m] > A[m+1] absteigen ist, und in der rechten Hälfte, wenn A[m] $\leq$ A[m+1] aufsteigend ist.
Terminierung: Sobald das betrachtete Array nur noch aus 2 Elementen besteht, wird das jeweils größere Element zurückgegeben.

b)

```
BIGGEST-X()
1   RETURN Find-Modal-M(V, 0, V.length − 1)
```

Die Laufzeit sollte identisch mit der Aufgabe a sein. Da das Polygon konvex ist, ist das Array V auch modal.

c)

```
BIGGEST-Y()
1   RETURN Find-Modal-M(W, 0, BIGGEST-X())
```

Da hier einfach nur 2 mal Algorithmen mit $\log n$ ausgeführt werden, ist es immer noch in $O(\log n)$.
Die Punkten werden im Uhrzeigersinn beginnend mit dem Punkt mit dem kleinsten x-Wert aufgelistet. Die y-Werte in W könnten nun nach dem Hochpunkt m auch einen Tiefpunkt besitzen. Deshalb betrachten wir für den größten y-Wert nur den Halbkreis zwischen 0 und dem Punkt, mit dem größten x-Wert.

H3

a)

Reflexiv:

Sei $P = (x, y)$
$P \trianglelefteq P \Leftrightarrow (x \leq x) \wedge (y \leq y)$

Antisemmetrie:

$P \trianglelefteq Q \wedge Q \trianglelefteq P \Leftrightarrow$
$((x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)) \wedge ((x_1 \geq x_2) \wedge (y_1 \geq y_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2) \Rightarrow P = Q$

Transitivität:

Sei $R \in \mathbb{Z}^2$ mit $R = (x_3, y_3)$
$P \trianglelefteq Q \wedge Q \trianglelefteq R \Leftrightarrow$
$((x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)) \wedge ((x_2 \leq x_3) \wedge (y_2 \leq y_3)) \Rightarrow (x_1 \leq x_3) \wedge (y_1 \leq y_3) \Rightarrow P \trianglelefteq R$

$\Rightarrow \trianglelefteq$ ist eine Ordnungralation auf $\mathbb{Z}^2$

Sei P = (1,2) und Q = (2,1), dann ist weder P $\trianglelefteq$ Q $\Leftrightarrow (1 \leq 2) \wedge (2 \leq 1)$ noch Q $\trianglelefteq$ P $\Leftrightarrow (2 \leq 1) \wedge (1 \leq 2)$
Also ist $\trianglelefteq$ keine totale Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$

b)

```
Fin-All-Max(M)
1   IF IsEmpty(M) THEN
2       RETURN M
3   IF Size(M) == 1 THEN
4       RETURN M
5   p = 0
6   q = 1
7   RETURN Compare(M, p, q)
```

```
Compare(M, p, q)
1   IF p+1 > M.length − 1 THEN
2       RETURN M
3   IF q+1 > M.length − 1 THEN
4       RETURN Compare(M, p+1, 0)
5   IF p == q THEN
6       RETURN Compare(M, p, q+1)
7   IF M[p].x < M[q].x
    ∧ M[p].y < M[q].y THEN
8       Delete(M, p)
9       RETURN Compare(M, q, q+1)
10  ELSE
11      RETURN Compare(M, p, q+1)
```

Delete(M,p) := löscht das Element an Position p in M

c)

Laufzeit: $(n-1) \cdot n \in O(n^2)$

Korrektheit:
Initialisierung:
Vor dem ersten Aufruf der Methode Compare gilt M$\neq \emptyset$ und hat mehr als ein Element. p=0 und q=1.

Fortsetzung:
5 Verscheidenen Fälle sind zu betrachten:

- Wenn p das letzte Element ist, besteht M schon aus den größten Elementen.
- Wenn q das letzte Element ist, dann ist p ein maximaler Punkt und wir können nach diesem weitersuchen.
- Wenn p gleich q ist, dann vergleichen wir direkt p mit dem Element nach q.
- Wenn der Punkt p kleiner dem Punkt q ist, dann ist der Punkt p definitiv nicht der maximale Punkt sein kann und können q mit allen anderen Punkten vergleichen.
- In allen anderen Fällen können wir einfach das nächsten Punkte vergleichen.

Terminierung:
Compare terminiert, wenn die Bedingung in Zeile 1 zutrifft und somit M zurückgegeben wird. Dies wird erst erreicht, wenn p von 0 bis zum letzten Element gelaufen ist. p wird immer dann erhöht, wenn es mit jedem anderen Element verglichen wurde oder sicher ist, dass es kein maximaler Punkt ist.