ALGORITHMEN

Aufgaben

Kim Thuong Ngo

April 23, 2018

CONTENTS

1 Blatt 0

1.1 Aufgabe 1: Logarithmus

a)

Zeigen Sie: $b^{log_b(a)} = a$
$log_b(a) = x \Leftrightarrow b^x = a$
Sei $x = log_b(a)$ für angemessenes $x \epsilon \mathbb{R} \Rightarrow b^x = a \Rightarrow a = b^x = b^{log_b(a)}$

b)

Zeigen Sie: $log_b(x * y) = log_b(x) + log_b(y)$
Sei $x_1 = log_b(x), x_2 = log_b(y) \Rightarrow b^{x_1} = x b^{x_2} = y \Rightarrow x * y = b^{x_1} * b^{x_2} = b^{x_1+x_2} \Rightarrow log_b(x * y) = x_1 + x^2 = log_b(x) + log_b(y)$

c)

Berechnen Sie $2^{log_4(n)}$
$2^{log_4(n)} = 2^{log_2(n^{\frac{1}{2}})} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$

1.2 Aufgabe 2: Summenformel

a) Kleiner Gauss

$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$

b)

$\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$

c)

$\sum_{i=1}^n (i2^i) = 2 + 2^{n+1}(n-1)$

1.3 Aufgabe 3: Ereignisraum und Ereignisse

Lösen Sie folgende Aufgaben unter der Annahme, dass Ereignisse gleichverteilt sind.
Münze: Kopf (K), Zahl (Z)

a)

Bestimmen Sie den Ereignisraum für: "Eine Münze wird drei Mal hintereinander geworfen." Betrachten Sie das Ereignis: "Es wird mindestens zwei Mal Kopf geworfen. " Wie sieht dieses Ereignis als Menge geschrieben aus? Wie ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis?

Münze wird dreimal geworfen: $\Omega = KKK, KKZ, KZK, ZKK, ZZK, ZKZ, KZZ, ZZZ$ mind. zweimal Kopf: $S = KKK, KKZ, KZK, ZKK$ $P[S] = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

B)

Zeigen Sie: Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$. Was gilt, wenn $A \cap B \neq \emptyset$?
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cap B| = 0$
$P[A \cup B] = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P[A] + P[B]$

C)

Zeigen Sie für das Gegenereignis $A^C = \Omega \setminus A$ eines Ergebnisses $A : P[A^C] = 1 - P[A]$.
$A^C = \Omega \setminus A : P[A^C] = 1 - P[A]$ $\Omega = A \cup A^C, A \cap A^C = \emptyset \Rightarrow P[\Omega] = P[A \cup A^C] = P[A] + P[A^C]$ da $P[\Omega] = 1 \Rightarrow P[A^C] = 1 - P[A]$

1.4 Aufgabe 4: Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion $X : \Omega \to M$, wobei Ω ein Ereignisraum ist und M eine beliebige Menge.

Sei $\Omega = 1, ..., 10^2$. Betrachten Sie die Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{N}, X(x, y) = x + y.$$

Wir definieren das Ereignis $[X \leq a] = (x, y) \epsilon \Omega | X(x, y) \leq a$.

A)

Geben Sie die Menge $[X \leq 5]$ konkret an und beschreiben Sie das Ereignis in Worten.
$[X \leq 5] = (1,1), (1,2), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)$

B)

Berechnen Sie $P[X \leq 5]$ unter Annahme der Gleichverteilung der Ereignisse.
$P(X \leq 5)$ bei Gleichverteilung: $|[X \leq 5]| = 10$ $|\Omega| = 10 * 10 = 100 \Rightarrow P[X \leq 5] = \frac{|[X \leq 5]|}{|\Omega|} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

1.5 Aufgabe 5: Erwartungswert und Varianz

Sei Ω ein Ereignisraum. Wir definieren den Erwartungswert einer Zufallsvariable $X : \Omega \to M$ als

$$E[X] = \sum_{x \epsilon M} x * P[X = x].$$

Intuitiv beschreibt der Erwartungswert einer Zufallsvariable das Ereignis, welches im Mittel am häufigsten auftritt. Der Erwartungswert ist linear, d.h. es gilt

$$E[a + b * X] = a + b * E[X]$$

A)

Berechnen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable, die nur Werte 0 und 1 haben kann.
$E(X) = \sum_{x \epsilon M} x * P[X = x] = 0 * P[X = 0] + 1 * P[X = 1] = P[X = 1]$

B)

Berechnen Sie den Erwartungswert eines fairen Würfels.
Erwartungswert fairer Würfel: $W = 1, ..., 6$ $E(X) = \sum_{x \epsilon M} x * \frac{1}{6} = \frac{1}{6} * \sum_{x \epsilon M} x = \frac{1}{6} * 21 = 3,5$

C)

Verwenden Sie die Linearität des Erwartungswertes, um den Erwartungswert der Summe von zwei unabhängigen Würfelwürfen zu berechnen.
X: Ergebnis 1. Wurf Y: Ergebnis 2.Wurf $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 3,5 + 3,5 = 7$

D)

Die Varianz einer Zufallsvariable X gibt das Mittel der quadratischen Abweichung von X zu ihrem Erwartungswert an. Formal:

$$var(X) = E[(X - E(x))^2].$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Linearität des Erwartungswerts, dass folgende Gleichung gilt:

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

$var(x) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2 - 2x * E(X) + E(X)^2] = E[X^2] - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = E[X^2] - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

2 TUTORIUM 23.04.2018: REKURSION

$T(0) = 0$ $T(n) = 2^{n-1} + T(n-1) = 2^{n-1} + 2^{(n-1)-1} + T((n-1)-1)$ ... $2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^{n-i} + T(n-i)$
Vollständige Induktion
IB: $T(n) := \sum_{k=1}^{i} 2^{n-k} + T(n-i)$ IV: Behauptung gelte für beliebige feste $i \epsilon \mathbb{N}$ IA: $T(n)_1 = \sum_{k=1}^{1} 2^{n-k} + T(n-1) = 2^{n-1} + T(n-1)$ IS: Beh: $T(n)_{i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} 2^{n-k} + T(n-(i+1))$ $T(n) := \sum_{k=1}^{i} 2^{n-k} + T(n-i) \Rightarrow \sum_{k=1}^{i} 2^{n-i-1} + T(n-i-1) = \sum_{k=1}^{i} 2^{n-k} + 2^{n-(i+1)} + T(n-(i+1))$ $I.V. = \sum_{k=1}^{i+1} 2^{n-k} + T(n-(i+1)) = T(n)_{i+1} \Rightarrow T(n)_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} + T(n-n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}$
In welcher Laufzeitklasse liegt eine rekursive Funktion?
$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n); a, b \geq 1; f(n), T(n) \geq 0; \varepsilon > 0$

1.Fall $f(n) \epsilon \mathcal{O}(n^{log_b(a-\varepsilon)})$ für ein $\varepsilon > 0 \Rightarrow T(n) \epsilon \Theta(n^{log_b(a)})$

2.Fall $f(n) \epsilon \Theta(n^{log_b(a)}) \Rightarrow T(n) \epsilon \Theta(n^{log_b(a)} * log_b(n))$

3.Fall $f(n) \epsilon \Omega(n^{log_b(a+\varepsilon)}) \Rightarrow T(n) \epsilon \Theta(f(n))$

- $\mathcal{O}(n)$ Oberschranke
- $\Omega(n)$ Unterschranke
- $\Theta(n)$ Vereinigung beider Schranken

2.1 BEISPIELE

Mergesort $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ $a = 2, b = 2, f(n) = n$ $n^{log_2 2} = n \Rightarrow 2.Fall: T(n) \epsilon \Theta(n * log_2 n)$
binarySearch $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$ $a = 1, b = 2, f(n) = 1$ $1^{log_2 1} = 1 \Rightarrow 2.Fall$

3 Blatt 01

Aufgabe 1: O-Notation

a)

Aus $f_1(n), f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ folgt $f_1(n) + f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $f_1(n) \cdot f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)^2)$.

b)

Aus $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ folgt $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

c)

$f(n) = \Theta(g(n))$ genau dann, wenn $g(n) = \Theta(f(n))$.

d)

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ genau dann, wenn $g(n) = \Omega(f(n))$.

Aufgabe 2: Mastertheorem

Bestimmen Sie die Komplexitätsklasse für folgende Rekursionsgleichung mit Hilfe des Mastertheorems:

a)

$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$

b)

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$

c)

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

Aufgabe 3: Rekursionen aus alten Klausuren und geometrische Summenformel

a)

Zeigen Sie, dass für folgende Rekursion $T(n) = \Theta(n^2 log n)$ ist.

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = T(n-1) + nlogn$$

B)

Sei $n = (\frac{8}{7})^k$ für ein $k \epsilon \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T gegeben:

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \frac{7}{8} T(\frac{7}{8} n) + \frac{7}{8} n$$

Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer geschlossenen Form mit vollständiger Induktion.

C)

Sei $n = (\frac{3}{2})^k$ mit $k \epsilon \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T gegeben:

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = 2T(\frac{2}{3} n) + 1$$

Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer geschlossenen Form mit vollständiger Induktion.

D)

Sei n eine Zweierpotenz, das heißt $n = 2^k$ für ein $k \epsilon \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T gegeben: Für $n > 1$ gelte

$$T(n) = A(n) + B(n),$$

wobei

$$A(n) = A(\frac{n}{2}) + B(\frac{n}{2})$$

und

$$B(n) = B(n-1) + 2n - 1.$$

Die Endwerte seien $T(1) = 1$, $B(1) = 1$ und $A(1) = 0$. Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.