Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften

Aufgaben

Kim Thuong Ngo

October 24, 2018

Contents

1 Tutorium I

1.1 Formeln

Summenzeichen:

$$\sum_{i=m}^{n} a = a_m + a_{m+1} + ... + a_{n-1} + a_n$$

mit $n \geq m$ und $n, m \in \mathbb{Z}$
Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Rechenregeln:

- $\sum_{i=1}^{n} a = n * a$
- $\sum_{i=k}^{n} c * a_i = ca_k + ca_{k+1} + ... + ca_n = c * (a_k + ... + a_n) = c * \sum_{i=k}^{n} a_i$
- $\sum_{i=}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i$
- $\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$ mit $k \leq m < n$
- $\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1+k}^{n+k} a_{i-k}$
- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i * b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i * \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Produktzeichen:

$$\Pi_{i=m}^{n} a = a_m * a_{m+1} * ... * a_{n-1} * a_n$$

mit $n \geq m$ und $n, m \in \mathbb{Z}$
Rechenregeln:

- $\Pi_{i=1}^{n} ca_i = c^n \Pi_{i=1}^{n} a_i$
- $\Pi_{i=1}^{n} a_i b_i = /left(\Pi_{i=1}^{n} a_i /right) * /left(\Pi_{i=1}^{n} b_i /right)$
- für $a_i = b_i$ gilt $\Pi_{i=1}^{n} a_i^2 = /left(\Pi_{i=1}^{n} a_i /right)^2$
- $\Pi_{i=1}^{n} a_i = \Pi_{i=1+k}^{n+k} a_{i-k}$
- $\Pi_{i=1}^{n} \Pi_{j=1}^{m} a_{ij} = \Pi_{j=1}^{n} \Pi_{i=1}^{n} a_{ij}$

1.2 Summennotation

Berechnen Sie folgende Summen:

A)

$$\sum_{j=12}^{15} j$$

$\sum_{j=12}^{15} j = 12 + 13 + 14 + 15 = 54$

B)

$$\sum_{i=1}^{6} 5i$$

$\sum_{i=1}^{6} 5i = 5*1+5*2+5*3+5*4+5*5+5*6 = 5+10+15+20+25+30 = 105$

C)

$$\sum_{i=1}^{10}(i^2-i) - \sum_{i=1}^{9} i^2 + \sum_{k=2}^{10} k$$

$\sum_{i=1}^{10}(i^2-i) - \sum_{i=1}^{9} i^2 + \sum_{k=2}^{10} k$
$= (1^2-1)+(2^2-2)+(3^2-3)+(4^2-4)+(5^2-5)+(6^2-6)+(7^2-7)+(8^2-8)+(9^2-9)+(10^2-10)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2)+(2+3+4+5+6+7+8+9+10)$
$= (0+2+6+12+20+30+42+56+72+90)-(1+4+9+16+25+36+49+64+81)+(2+3+4+5+6+7+8+9+10)$
$= 330-285+54 = 99$

D)

$$\sum_{i=0}^{5}(e^{\pi*i}\sqrt{i+1}) - \sum_{j=6}^{10}(e^{\pi*(j-5)}\sqrt{j-4})$$

$\sum_{i=0}^{5}(e^{\pi*i}\sqrt{i+1}) - \sum_{j=6}^{10}(e^{\pi*(j-5)}\sqrt{j-4})$
$= e^{\pi*0}\sqrt{0+1}+e^{\pi*1}\sqrt{1+1}+e^{\pi*2}\sqrt{2+1}+e^{\pi*3}\sqrt{3+1}+e^{\pi*4}\sqrt{4+1}+e^{\pi*5}\sqrt{5+1}-(e^{\pi*(6-5)}\sqrt{6-4}+e^{\pi*(7-5)}\sqrt{7-4}+e^{\pi*(8-5)}\sqrt{8-4}+e^{\pi*(9-5)}\sqrt{9-4}+e^{\pi*(10-5)}\sqrt{10-4})$
$= e^0\sqrt{1}+e^{\pi}\sqrt{2}+e^{2*\pi}\sqrt{3}+e^{3*\pi}\sqrt{4}+e^{4*\pi}\sqrt{5}+e^{5*\pi}\sqrt{6}-(e^{\pi}\sqrt{2}+e^{2*\pi}\sqrt{3}+e^{3*\pi}\sqrt{4}+e^{4*\pi}\sqrt{5}+e^{5*\pi}\sqrt{6})$
$= e^0\sqrt{1} = 1*1 = 1$

E)

$$\sum_{k=-2}^{3} k*i+1^k$$

$\sum_{k=-2}^{3} k*i+1^k$
$= (-2)*i+1^{-2}+(-1)*i+1^{-1}+(0)*i+1^0+1*i+1^1+2*i+1^2+3*i+1^3$
$= (-2i+1)+(-i+1)+1+(i+1)+(2i+1)+(3i+1) = 3i+6$

F)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} i * 2^j$$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} i * 2^j$
$= (1*2^0+2*2^0+3*2^0)+(1*2^1+2*2^1+3*2^1)+(1*2^2+2*2^2+3*2^2)+(1*2^3+2*2^3+3*2^3)$
$= (1+2+3)+(2+4+6)+(4+8+12)+(8+16+24) = 90$

1.3 Produktnotation

Berechnen Sie die folgenden Produkte:

A)

$$\Pi_{m=1}^{3} * (-1)^m$$

$\Pi_{m=1}^{3} * (-1)^m$
$= 1*(-1)^1 * 2*(-1)^2 * 3*(-1)^3$
$= -1 * 2 * -3 = 6$

B)

$$\Pi_{i=2}^{4}\Pi_{j=2}^{3}\frac{i}{j}$$

$\Pi_{i=2}^{4}\Pi_{j=2}^{3}\frac{i}{j}$
$= \frac{2}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{2} * \frac{3}{3} * \frac{4}{2} * \frac{4}{3}$
$= \frac{2*2*3*3*4*4}{2*2*2*3*3*3} = \frac{4*4}{2*3} = \frac{2*4}{3} = \frac{8}{3}$

1.4 Binomialkoeffizienten

Bestimmen Sie:

A)

$$(a+b)^7$$

$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

B)

$$(x-y)^9$$

$(x-y)^9 = x^9+9x^8y+36x^7y^2+84x^6y^3+126x^5y^4+126x^4y^5+84x^3y^6+36x^2y^7+9xy^8+y^9$

1.5 Binomialkoeffizienten

Bestimmen Sie
Formel:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1*2*...*k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

für $n \geq k$ und $n, k \in \mathbb{N}_0$

A)

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{10*9*8*7}{1*2*3*4} = 210$$

B)

$$\begin{pmatrix} 201 \\ 198 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 201 \\ 198 \end{pmatrix} = \frac{201*200*199}{1*2*...*198} = 1.333.300$$

C)

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{23*22*21*20}{1*2*3*4} + \frac{23*22*21*20*19}{1*2*3*4*5} = 8855 + 33649 = 42.504$$

1.6 Summennotation/Binomialkoeffizienten

A)

$$\sum_{k=0}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}$$

B)

$$\sum_{k=0}^{11} \begin{pmatrix} 11 \\ k \end{pmatrix} (-2)^{11-k} 3^{k+3}$$

1.7 Folgen und Reihen

Die Glieder einer arithmetischen Folge sind definiert als $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 = c$. Die Differenz zweier benachbarter Glieder $a_{n+1} - a_n$ ist konstant und gleich d. Prüfen Sie, ob es sich im folgenden um eine arithmetische Folge handelt. Wenn ja, bestimmen sie d und c. Wenn nein, so versuchen Sie eine alternative Bestimmungsgleichung anzugeben.

A)

$$2,4,6,8,10,\ldots = 2n$$

B)

$$12,0,-12,-24,-36,\ldots = 24-12n$$

C)

$$1,7,17,31,49,\ldots = 2n2-1 \rightarrow keinearithmetischeFolge$$

1.8 Summennotation/ Folgen und Reihen

Die Summen der ersten n Gleider einer Zahlenfolge heißen n-te Partialsumme.

A) Schreiben Sie n-te Partialsumme in der Summennotation auf.

B) Leiten Sie daraus eine einfache Berechnungsformel der n-ten Partialsumme einer arithmetischen Folge her.

C) Berechnen Sie damit die n-te und die zwanzigste Partialsumme der in Aufgabe 6 genannten Folgen.