STOCHASTIK

Skript

Kim Thuong Ngo

April 23, 2018

CONTENTS

1 Vorwort

1.1 Stochastik

Beschreibungen von zufälligen Vorgängen, z.B.:

- Münzwurf, Lotto, Würfel, ...
- Regentropfen, Katastrophen, radioaktiver Zerfall, ...
- Warteschlangen
- Zinsenentwicklung, Aktienkurse, ...
- Abstimmungen, Wahlergebnisse
- Wetter
- Vererbung, Mutation

Experimente

- zufällige Vorgänge nennt man Experiment
- das Ergebnis beschreibt den Ausgang des Experiments
- ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen, der wir einer Wahrscheinlichkeit zuordnen können

Aufbau

- Modellbildung (stochastisches Modell) Ziel ist die Beschreibung von Experimenten
- Wahrscheinlichkeitstheorie Methoden und Werkzeuge für die Untersuchung von stochastischen Modellen
- Statistik Justierung und Überprüfung eines Modells anhand von Daten

1.2 Abkürzungen

W' : Wahrscheinlichkeiten

2 Grundbegriffe

2.1 Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 1.1 Es sei $\Omega \neq \varnothing$ eine Menge, der Grundraum. Eine Familie $F \subseteq P(\Omega)$ von Teilmengen heißt σ-Algebra, wenn gilt:

- leere Menge $\emptyset$ liegt in F
- aus $A \epsilon F$ folgt $\Omega \setminus A \epsilon F$
- für $A_1, A_2, ... \epsilon F$ gilt $A_1 \cup A_2 \cup ... \epsilon F$

Eine Abbildung $\mu : F \to [0, \infty]$ heißt Maß auf (Ω, F), wenn gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- σ-Additivität: Ist $A_1, A_2, A_3, ...$ eine Folge von paarweisen disjunkten Elementen in F, dann gilt $\mu(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + ...$

Das Tripel (Ω, F, μ) heißt Maßraum.

BEMERKUNG 1.2 Ist Ω eine beliebige Menge, dann ist $\zeta : P(\Omega) \to [0, \infty]$ mit $\zeta(A) = |A|$ ein Maß, welches Zählmaß heißt.

BEMERKUNG 1.3 Die Begriffe Länge, Fläche, Volumen sind Maße auf geeigneten σ-Algebra von $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ definiert. Diese σ-Algebra enthalten alle Intervalle achsenparallele Rechtecke, achsenparallele Quader. Allgemein ist das d-dimensionale Volumen von geeigneten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ein Maß, welches d-dimensionales Lebesgue-Maß heißt.

DEFINITION 1.4 Ist P eine Maß auf (Ω, F) mit $P(\Omega) = 1$, so heißt P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und das Tripel (Ω, F, P) Wahrscheinlichkeitsraum. In diesem Fall heißen die Elemente der σ-Algebra Ereignisse.

Interpretation: Es sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis des Experiments im Ereignis $A \epsilon F$ liegt.

1.5 Es seien Ω, Z zwei Mengen. Es sei F eine σ-Algebra über Ω und z eine σ-Algebra über Z. Eine Abbildung $X : \Omega \to Z$ heißt Zufallsvariable, wenn $X^{-1}(B) = w \epsilon \Omega : X(w) \epsilon B \epsilon F \forall B \epsilon z$ gilt. In diesem Fall nennen wir Z den Zustandsraum von X und sagen, dass X von (Ω, F) nach (Z, z) abbildet, kurz $X : (\Omega, F) \to (Z, z)$.

BEISPIEL Münzwurf

- $p \epsilon [0, 1], q = 1 - p$
- $\Omega = Zahl, Kopf = 0, 1$
- $F = P(\Omega) = \emptyset, 0, 1, \Omega$
- $P(\emptyset) = 0, P(0) = q, P(1) = 0, P(\Omega) = 1$

Für $p = \frac{1}{2}$ ist das Modell ein fairer Münzwurf.
zweifacher Münzwurf

- $p\epsilon[0,1], q = 1 - p$
- $P((0,0)) = q^2, P((0,1)) = P((1,0)) = pq, P((1,1)) = p^2$
- für $A \subseteq \Omega : P(A) = \sum_{w\epsilon A} P(w)$

Die Größe $X : \Omega \to 0,1,2$ mit $X(w)$ = "Anzahl der 1er in w" ist eine Zufallsvariable mit Werten in $Z = 0,1,2(z = P(Z))$

NOTIZEN 16.04.18 $P(x) = x\epsilon\Omega$
W' , dass das Ergebnis des zufälligen Experiments gleich x ist, sofern $x\epsilon F$, also ein Ereignis ist.
W' maß $P : F \to [0,1]$ mit

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$

für Folgen $A_1, A_2, ...\epsilon F$von paarweisen disjunkten Ereignissen.
Beispiel: zweifacher Münzwurf
$\Omega = 0,1^2 = 0,1x0,1 = (0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$
$F = P(\Omega) = \emptyset,(0,0),(0,1),...,(0,0),(0,1),...,\Omega \Rightarrow$ 16 Elemente
z.B. $P((0,0),(0,1)) = P((0,0)) + P((0,1)) = q^2 + pq = q(q+p) = q(1-p+p) = q$
Anzahl der 1er:
$X : \Omega \to 0,1,2$ mit

- $X(0,0) = 0$
- $X(0,1) = X(1,0) = 1$
- $X(1,1) = 2$

ODER: $X(w_1, w_2) = w_1 + w_2$
z.B. $P(X^{-1}(1)) = P((0,1),(1,0)) = 2pq$

2.2 STATISTIK

DEFINITION 1.6 Ein statistisches Modell wird durch eine Menge Ω mit σ-Algebra F, sowie einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen Q auf (Ω, F) beschrieben. In der parametrischen Statistik wird die Familie Q durch einen Index (Parameter) θ einer Indexmenge (Parametermenge) Θ beschrieben: $Q = P_\theta : \theta\epsilon\Theta$.

DEFINITION 1.7 Eine Stichprobe ist eine Zufallsvariable X (oder ein zufälliger Vektor $(X_1, ..., X_n)$ oder eine zufällige Folge $X_1, X_2, ...)$ von (Ω, F) in den Stichprobenraum (Z, z). Ein Element x (oder ein Vektor $(x_1, ..., x_n)$ oder eine Folge $x_1, x_2, ...)$ aus dem Stichprobenraum Z heißt Realisation oder Beobachtung. Ist die Stichprobe ein Vektor, so nennen wir dessen Länge den Stichprobenumfang.

BEISPIEL Münzwurf

- $\Theta = [0, 1]$
- $\Omega = 0, 1, F = P(\Omega)$
- für $\theta \epsilon \Theta : P_\theta(\varnothing) = 0, P_\theta(0) = 1 - \theta, P_\theta(1) = \theta, P_\theta(\Omega) = 1$
- Stichprobe: $X : \Omega \rightarrow 0, 1$ mit $X(w) = w$

DEFINITION 1.8 Es sei $Q = P_\theta : \theta \epsilon \Theta$ ein statistisches Modell und es sei X (oder $X_1, ..., X_n$) eine Stichprobe im Stichprobenraum (Z, z). Ein statistisches Verfahren ist eine Abbildung vom Stichprobenraum Z (oder von Z^n) ist eine Antwortmenge A.

- Ist die Antwortmenge A gleich Θ (oder $g(\Theta)$, wobei g eine Funktion ist), so sagen wir, das Verfahren ist ein Schätzer
- Ist die Antwortmenge A gleich $ja, nein$ (oder $1, 0$), so sprechen wir von einem Hypothesentest
- Ist die Antwortmenge eine Familie von Intervallen, dass sprechen wir von einem Verfahren zur Berechnung von Konfidenzintervallen