MATHE II

Aufgaben

Kim Thuong Ngo

November 8, 2017

CONTENTS

1 Blatt 01: Körper/Gruppen, Abbildungen und komplexe Zahlen

Aufgabe 1 Sei (G, *) eine Gruppe. Eine Untergruppe von (G, *) ist eine Teilmenge $U \subseteq G$, die selbst eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung * ist.

Zeigen Sie, dass $U \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von (G, *) ist, wenn $U \neq \emptyset$ und für alle $a, b \epsilon U$ auch $a * b^{-1} \epsilon U$ gilt, wobei b^{-1} das inverse Element bezüglich * in G ist.

Sei (G, *), $U \subseteq G$ Untergruppe

Beh: $U \subseteq G$ ist eine Untergruppe von (G, *) $\Longleftrightarrow$
(i) $U \neq \emptyset$
(ii) $\forall a, b \epsilon U : a * b^{-1} \epsilon U$, wobei b^{-1} inv. bzgl. * in G

Beweis:
"$\Rightarrow$"
Sei $U \subseteq G$ Untergruppe von (G, *)
z.z: $U \neq \emptyset$
denn: U ist nach Voraussetzung eine Gruppe $\longrightarrow$ $\exists$ ein neutrales Element in U

z.z: e=e' , $e' \epsilon U$, $e \epsilon G$
denn:

e' = $e * e'$
= $((e')^{-1} * e') * e'$
= $(e'^{-1}) * (e' * e')$
= $e'^{-1} * e'$
= e

z.z: $\tilde{b} = b^{-1} \quad \tilde{b} \epsilon U$
denn: Sei $b \epsilon U$ beliebig
$\Rightarrow \exists \tilde{b} \epsilon U : b * \tilde{b} = e$
$\Rightarrow \exists \tilde{b} \epsilon U : b^{-1} * b * \tilde{b} = b^{-1} * e$
$\Rightarrow \exists \tilde{b} \epsilon U : \tilde{b} = b^{-1}$

d.h. neutrales Element und inverses Element sind gleich in U und G

z.z: U abgeschlossen
denn: U Gruppe
damit gilt $\forall a, b \epsilon U : a * b^{-1} \epsilon U$

"$\Leftarrow$"
Sei $U \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists a\epsilon U : a * a^{-1} = e\epsilon U$

z.z: Existenz inverses Element
denn: Sei $b\epsilon U$ beliebig
$\Rightarrow \exists b^{-1}\epsilon U : e * b^{-1} = b^{-1}\epsilon U$

z.z: Assoziativität von U
denn: * assoziativ auf G
⇒ * assoziativ auf U

z.z: U abgeschlossen
denn: Seien $a, b\epsilon U$ beliebig
$\Rightarrow b^{-1}\epsilon U$
$\Rightarrow a * b = a * (b^{-1})^{-1}\epsilon U$

□

AUFGABE 2 Es sei

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d\epsilon\,\mathbb{R}, ad - bc \neq 0\right\}$$

und die binäre Verknüpfung $\circ$ auf $GL_2(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

(A) Zeigen Sie, dass $\circ$ tatsächlich eine binäre Verknüpfung auf $GL_2(\mathbb{R})$ darstellt, d.h. dass $A \circ B\epsilon GL_2(\mathbb{R})$ gilt.

$A \circ B\epsilon GL_2(\mathbb{R})$ soll für $A, B\epsilon GL_2(\mathbb{R})$ gelten
Beweise, dass $(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \neq 0$

(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)
= (aecf+bgcf+aedh+bgdh)-(aecf+afdg+bhce+bgdh)
= bgcf+aedh-afdg-bhce
= bc(gf-he)+ad(eh-gf)
= -bc(eh-gf)+ad(eh-gf)
= (ad-bc)(eh-gf)

Da $A, B\epsilon GL_2(\mathbb{R})$ gilt, heißt es, dass $ad - bc \neq 0$ und $eh - gf \neq 0$ sind, d.h. das $(ad - bc)(eh - gf)$ ebenfalls ungleich 0 ist. Somit ist bewiesen, das $A \circ B\epsilon GL_2(\mathbb{R})$ für $A, B\epsilon GL_2(\mathbb{R})$ gilt.

(B) Zeigen Sie, dass die Operation $\circ$ nicht kommutativ ist.

Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

(C) Zeigen Sie, dass $(GL_2(\mathbb{R}),\circ)$ eine Gruppe ist. Geben Sie das neutrale Element an. Wie sieht das inverse Element zu

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

aus?

z.z: $(GL_2(\mathbb{R}),\circ)$ ist Gruppe
Beweis:
Abgeschlossenheit gezeigt in Teilaufgabe a)

Assoziativität:
z.z: $(A\circ B)\circ C = A\circ(B\circ C)$
Beweis: Sei $C=\begin{pmatrix}i & j\\ k & l\end{pmatrix}$
$(A\circ B)\circ C=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}i & j\\ k & l\end{pmatrix}$

ausmultiplizieren und ausklammern

$= A\circ(B\circ C)$

(D) Zeigen Sie, dass

$$SL_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}: a,b,c,d\epsilon\mathbb{R}, ad-bc=1\right\}$$

eine Untergruppe (vgl. mit Aufgabe 1) von $(GL_2(\mathbb{R}),\circ)$ ist. Ist diese Untergruppe kommutativ?

z.z: $(SL_2(\mathbb{R})\neq 0)$
denn: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\epsilon SL_2(\mathbb{R})$

z.z: Aufgabe 1(ii)
denn: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}\epsilon SL_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \frac{1}{eh - gf} \begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ah - bg & -af + be \\ ah - gd & -cf + de \end{pmatrix} \epsilon SL_2(\mathbb{R})$$

AUFGABE 3 Sei $a = 2 - i$ und $b = 1 + 2i$. Berechnen Sie

$$z_1 = a + b,\ z_2 = a - b,\ z_3 = a * b,\ z_4 = \frac{1}{a},\ z_5 = \frac{a}{b},\ z_6 = a^2,\ z_7 = |b|,\ z_8 = a*,\ z_9 = \varphi(b),$$

wobei $\varphi(b)\epsilon 0, 2\pi$ mit $b = |b| * (cos\varphi(b) + i * sin\varphi(b))$. Die Angabe von z_9 kann näherungsweise erfolgen. Stellen Sie a, b sowie $z_1, ..., z_9$ in der komplexen Zahlenebene dar.

$$z_1 = a + b$$
$$= (2 - i) + (1 + 2i) = 3 + i$$

$$z_2 = a - b$$
$$= (2 - i) - (1 + 2i) = (2 - i) - 1 - 2i = 1 - 3i$$

$$z_3 = a * b$$
$$= (2 - i) * (1 + 2i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$$

$$z_4 = \frac{1}{a}$$
$$= \frac{1}{(2 - i)} = \frac{(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i}{(\sqrt{2^2 + 1^2})^2} = \frac{2 + i}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$$
$$z_5 = \frac{a}{b}$$
$$= \frac{(2 - i)}{(1 + 2i)} = \frac{(2 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - i - 4i + 2i^2}{(\sqrt{1^2 + 2^2})^2} = \frac{-5i}{5} = -i$$
$$z_6 = a^2$$
$$= (2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

$$z_7 = |b|$$
$$= |(1 + 2i)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$z_8 = a*$$
$$= 2 - i$$

$$z_9 = \varphi(b)$$
$$= \varphi(1 + 2i) = atan(\frac{2}{1}) = atan(2) = \frac{7}{20}\pi$$

2 BLATT 02: ABBILDUNGEN UND POLYNOME

AUFGABE 1 Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und betrachte die Funktionen $h_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, i=1,2,3 mit

$$h_1(x)=(f+g)(x),\ h_2(x)=(f*g)(x),\ h_3(x)=(g\circ f)(x).$$

Welche dieser Funktionen ist notwendigerweise injektiv/ surjektiv/ bijektiv/ achsensymmetrisch zur y-Achse/ punktsymmetrisch zu (0,0)/ monoton wachsend, wenn sowohl f als auch g diese Eigenschaft haben? Beweisen Sie Ihre Antworten.

	Formel
injektiv	$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$
surjektiv	$\forall y\epsilon\mathbb{R}\exists x\epsilon\mathbb{R}: h(x)=y$
bijektiv	injektiv und surjektiv
Achsensymmetrie zur y-Achse	$h(-x)=h(x)$
Punktsymmetrie zum Ursprung	$-h(-x)=h(x)$
monoton wachsend	$x_1\leq x_2\Rightarrow h(x_1)\leq h(x_2)$

	$h_1(x)=(f+g)(x)$	$h_2(x)=(f*g)(x)$	$h_3(x)=(g\circ f)(x)$
injektiv	nicht injektiv	nicht injektiv	injektiv
surjektiv	nicht surjektiv	nicht surjektiv	surjektiv
bijektiv	nicht bijektiv	nicht bijektiv	bijektiv
Achsensymmetrie zur y-Achse	ja	ja	ja
Punktsymmetrie zum Ursprung	ja	ja	ja
monoton wachsend	ja	ja	ja

AUFGABE 2 Sind die folgenden Abbildungen injektiv und/ oder surjektiv? Geben Sie, wenn f bijektiv ist, die Umkehrabbildung f^{-1} an. Begründen Sie ihre Antworten.

(A) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $f(n)=n+1$

injektiv:
Seien $n_1,n_2\epsilon\mathbb{N}$ mit $f(n_1)=f(n_2)$
$\Rightarrow n_1+1=n_2+1$
$\Rightarrow n_1=n_2$

nicht surjektiv:
$\nexists n\epsilon\mathbb{N}: f(n)=1$

nicht bijektiv

(B) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0$ mit $f(k)=|k|$

nicht injektiv:
Gegenbeispiel:
$n_1 = 2$, $n_1 = -2$
$n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$
$f(n_1) = 2$, $f(n_1) = 2$

surjektiv:
Sei $f(k) = l$
$\forall l \epsilon \mathbb{N}_0 \exists k \epsilon \mathbb{Z} : f(k) = |k| = l$

nicht bijektiv

(C) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n_1, n_2) = n_1 - n_2$

nicht injektiv:
Gegenbeispiel:
$(4,3) \neq (3,2)$
$f(4,3) = f(3,2) = 1$

surjektiv:
Sei $f(n_1, n_2) = z$
$\forall z \epsilon \mathbb{Z} \exists (n_1, n_2) n_1, n_2 \epsilon \mathbb{N} : f(n_1, n_2) = n_1, n_2 = z$

nicht bijektiv

(D) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$

injektiv:
$\forall x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
da $\sqrt[3]{}$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$ f injektiv

surjektiv:
$\forall y \epsilon \mathbb{R} \exists x \epsilon \mathbb{R} : f(x) = y$

bijektiv
Umkehrfunktion:
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(y) = y^3$

(E) $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, wobei die sogenannte Gauß-Klammer $\lfloor x \rfloor$ von x die größte ganze Zahl kleiner gleich x liefert

nicht injektiv:
Gegenbeispiel:

$2,3 \neq 3,3$
$f(2,3) = f(3,3) = 0,3$

nicht surjektiv:
$\nexists x : f(x) = 1$

nicht bijektiv

(F) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $f(k,n) = \dfrac{k}{n}$

nicht injektiv:
Gegenbeispiel:
$(1,3) \neq (2,6)$
$f(1,3) = f(2,6) = \dfrac{1}{3}$
surjektiv:
nach Definition: $\forall q \epsilon \mathbb{Q} : q = \dfrac{a}{b}$
$a \epsilon \mathbb{Z}$, $b \epsilon \mathbb{Z}$
Fall 1: $b < 0$
() Fall 2: $b > 0$

nicht bijektiv

AUFGABE 3 Zeigen Sie, dass die Summe $S(x) = A(x) + B(x)$ und das Produkt $P(x) = A(x) * B(x)$ zweier Polynome A(x) und B(x) wieder Polynome sind und dass

$$Grad(S(x)) \leq max\{Grad(A(x)), Grad(B(x))\}$$
$$Grad(P(s)) = Grad(A(x)) + Grad(B(x))$$

Beh:
Zeige $S(x) = A(x) + B(x)$ und $P(x) = A(x) * B(x)$ sind Polynome und
1.) $Grad(S(x)) \leq max\{Grad(A(x)), Grad(B(x))\}$
2.) $Grad(P(s)) = Grad(A(x)) + Grad(B(x))$

Beweis:

Fall 1: (ohne Einschränkung)
B(x) = Nullpolynom
$\Rightarrow S(x) = A(x) \bigwedge P(x) = 0$
$\Rightarrow Beh.$

Fall 2: Definiere $A(x) := \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \bigwedge B(x) := \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ mit $Grad(A) = m$, $Grad(B) = n$ und $m, n \epsilon \mathbb{N}$

Wissen: $a_m \neq 0 \bigwedge b_n \neq 0$

Sei ohne Einschränkung $m \geq n$

$S(x) = A(x) + B(x)$
$= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$
$= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i x^i$

$P(x) = A(x) * B(x)$
$= (\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j)$
$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$
$= \sum_{k=0}^{m+n} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k$
es gilt $0 \leq i \leq m$ und $0 \leq j \leq n$
da $\sum_{i+j=m+n} = a_m b_n \neq 0$
$\Rightarrow$ 2.)

$\square$

AUFGABE 4 Es gilt folgendes Lemma (ohne Beweis):
Seien A(x) und B(x) Polynome, wobei B(x) ungleich dem Nullpolynom ist. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome Q(x) und R(x) mit

$$A(x) = Q(x) * B(x) + R(x) \text{ und } Grad(R(x)) < Grad(B(x)).$$

Anmerkung: Der Grad des Nullpolynoms ist $-\infty$. Sie dürfen Aufgabe 3 verwenden, auch wenn Sie diese nicht gelöst haben.

Zeigen Sie, dass...

(A) ... $a\epsilon\mathbb{R}$ genau dann Nullstelle eines Polynoms A(x) ist, wenn $A(x) = (x-a)$. B(x) für ein Polynom B(x) gilt.

Beh:
$a\epsilon\mathbb{R}$ Nullstelle von A(x) $\Leftrightarrow$ $A(x) = (x-a) * B(x)$

Beweis:
"$\Rightarrow$"
Sei $A(x) = (x-a) * B(x)$
$\overrightarrow{x=a} A(a) = (a-a) * B(a) = 0$

"$\Leftarrow$"
Sei a Nullstelle von A(x)
$\overrightarrow{Lemma} A(x) = (x-a)Q(x) + R(x) \bigwedge Grad(R(x)) < 1$

Fall 1: R(x) Nullpolynom $\rightsquigarrow A(x) = (x-a)Q(x)$
Fall 2: $R(x) = c(+0)$, da $A(a) = (a-a)Q(a) + c$ (Widerspruch)

(B) ... ein Polynom vom Grad n (mit $n \epsilon \mathbb{N}_0$) höchstens n verschiedene Nullstellen besitzt.

Beh:
Polynom P (Grad(P) = $n \epsilon \mathbb{N}_0$ hat max. n verschiedene Nullstellen

Beweis: Induktion über $n \epsilon \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang: n=0
Sei A(x) Polynom mit Grad(A(x))=n
$c \neq 0 \Rightarrow A(x) = c$ und A(x) hat keine Nullstelle

Induktionsschritt: $n \to n+1$
A(x) Polynom mit Grad(A(x))=n+1 und n+2 Nullstellen
Sei $a \epsilon \mathbb{R}$ eine der n+2 Nullstellen
$\Rightarrow A(x) = (x-a) * B(x)$, B Polynom
$\Rightarrow Grad(B(x))' = u$
A(x) hat n+1 verschieden Nullstellen ungleich a sind, da (x-a)=0
$\Leftrightarrow x = a$ müssen diese Nullstellen auch Nullstellen von B(x) sein (Widerspruch)

(C) ... zwei Polynome vom Grad $n_1 \leq n$ bzw. $n_2 \leq n$ (mit $n \epsilon \mathbb{N}_0$), die an (n+1) verschiedenen Stellen den gleichen Wert annehmen, übereinstimmen.

Beweis:
A,B Polynome
$A = A(x)$, $B = B(x) \Rightarrow A - B$ Polynome
$Grad(A-B) \leqslant n$
$\Rightarrow A - B$ hat n+1 Nullstellen
$\Rightarrow A - B = 0$
$\Rightarrow A = B$

□

3 Blatt 03

AUFGABE 1 Bestimmen Sie für die folgenden Zuordnungsvorschriften den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq /mathbbR$ /den größtmöglichen Bereich $D \subseteq /mathbbR$, sodass für ein $x \epsilon D$ die Zuordnungsvorschrift sinnvoll ist) und den zugehörigen Bildbereich $f(D) = \{f(x) : x \epsilon D\}$. Sind die entstandenen Funktionen $f : D \to f(D)$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie falls möglich ihre Umkehrfunktionen. Geben Sie auch den Definitionsbereich und Bildbereich der Umkehrfunktion an.

A) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R} \backslash \{1\}$
z.z. Injektivität
$x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R} \backslash \{1\} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Beweis:
$f(x_1) = f(x_2)$

$\dfrac{x_1+1}{x_1-1} = \dfrac{x_2+1}{x_2-1}$
$\Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$
$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_2x_1 - x_2 + x_1 - 1$
$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 - (x_2x_1 - x_2 + x_1 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow 2x_2 - 2x_1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x_2 = 2x_1$
$\Leftrightarrow x_2 = x_1$

z.z. Surjektivität
Sei $f(x) = y$, dann gilt $\forall y \epsilon Y \exists x \epsilon X : f(x) = y$

Beweis:
$y = \dfrac{x+1}{x-1}$
$\Leftrightarrow y * (x-1) = x+1$
$\Leftrightarrow yx - y = x+1$
$\Leftrightarrow -y = x + 1 - yx$
$\Leftrightarrow -y - 1 = x - yx$
$\Leftrightarrow -y - 1 = x(1-y)$
$\Leftrightarrow \dfrac{-y-1}{1-y} = x$

z.z. Bijektivität
Funktion f ist injektiv und surjektiv, d.h. auch bijektiv und es existiert eine Umkehrfunktion.

Umkehrfunktion:

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$

B) $f(x) = ln(ln(x))$

$f :]1, \infty[\to \mathbb{R}$

z.z. Injektivität
$x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}\backslash\{1\} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Beweis:
$f(x_1) = f(x_2)$

$ln(ln(x_1)) = ln(ln(x_2))$
$\Leftrightarrow ln(x_1) = ln(x_2)$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

z.z. Surjektivität
Sei $f(x) = y$, dann gilt $\forall y \epsilon Y \exists x \epsilon X : f(x) = y$

Beweis:
$ln(ln(x)) = y$
$\Leftrightarrow ln(x) = e^y$
$\Leftrightarrow x = e^{e^y}$

z.z.Bijektivität Funktion f ist injektiv und surjektiv, d.h. auch bijektiv und es existiert eine Umkehrfunktion.

Umkehrfunktion:
$f^{-1}(x) = e^{e^x}$ $f^{-1} : \mathbb{R} \to]1, \infty[$

AUFGABE 2 Es gelte $a, b, x > 0$ mit $x > a$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

A) $\frac{1}{2} ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) - \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right) + ln(\sqrt{a})$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{\frac{x}{1} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}}\right) + \frac{1}{2} ln(a)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) * \left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right) + \frac{1}{2} ln(a)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2}) * (x-\sqrt{x^2-a^2})\right) + \frac{1}{2} ln(a)$$
$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{a}(x^2-(\sqrt{x^{2-a^2}})^2)\right) + \frac{1}{2} ln(a)$$
$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{a}(x^2-x^2+a^2)\right) + \frac{1}{2} ln(a)$$
$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{a^2}{a}\right) + \frac{1}{2} ln(a)$$
$$= \frac{1}{2} ln(a) + \frac{1}{2} ln(a)$$
$$= ln(a)$$

B) $e^{log_2(b) log_b(512^{ln(2)})} * e^{ln((-1)^{14})}$
$$= e^{log_2(b)*log_b(512^{ln(2)})} * (-1)^{14}$$
$$= e^{\frac{ln(b)}{ln(2)} * ln(2) * \frac{ln(512)}{ln(b)}} * 1$$
$$= e^{ln(512)}$$
$$= 512$$

C) $log_b\left(a^{\frac{log_2(e^x)}{log_b(a)}}\right) - x log_2(e)$
$$= \frac{log_2(e^x)}{log_b(a)} * log_b(a) - x log_2(e)$$
$$= \frac{\frac{ln(e^x)}{ln(2)}}{\frac{ln(a)}{ln(b)}} * \frac{ln(a)}{ln(b)} - log_2(e^x)$$
$$= \frac{ln(e^x)}{ln(2)} - \frac{ln(e^x)}{ln(2)}$$
$$= 0$$

AUFGABE 3 Lösen Sie folgende Gleichungen für $x\epsilon/mathbbR$:

A) $log_4(x+2) - log_4(x-2) = \frac{1}{2}$
$$\Leftrightarrow log_4\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}{ln(4)} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{1}{2} ln(4)$$

$\Leftrightarrow e^{ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)} = \frac{1}{2}e^{ln(4)}$
$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{2}$
$\Leftrightarrow x+2 = 2(x-2)$
$\Leftrightarrow x+2 = 2x-4$
$\Leftrightarrow x-2x = -4-2$
$\Leftrightarrow -x = -6$
$\Leftrightarrow x = 6$

B) $2^{3-x} * 3^{x-1} = 6^{2x-3}$
$\Leftrightarrow 2^{3-x} * 3^{x-1} = (2*3)^{2x-3}$
$\Leftrightarrow log(2^{3-x} * 3^{x-1}) = log((2*3)^{2x-3})$
$\Leftrightarrow log(2^{3-x}) + log(3^{x-1}) = log(2^{2x-3}) + log(3^{2x-3})$
$\Leftrightarrow (3-x)log(2) + (x-1)log(3) = (2x-3)(log(2)+log(3))$
$\Leftrightarrow (3-x)log(2) - (2x-3)log(2) = (2x-3)log(3) - (x-1)log(3)$
$\Leftrightarrow (3-x-2x+3)log(2) = (2x-3-x+1)log(3)$
$\Leftrightarrow (-3x+6)log(2) = (x-2)log(3)$
$\Leftrightarrow (-3x+6)log(2) - (x-2)log(3) = 0$
$\Leftrightarrow (-3)(x-2)log(2) - (x-2)log(3) = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(-3log(2) - log(3)) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$, weil $x-2 = 0$

C) $4^x + 4 = 2^{x+2} + 2^x$
$\Leftrightarrow 2^x * 2^2 + 2^2 = 2^{x+1} + 2^x$
$\Leftrightarrow 2^{x+2} + 2^2 = 2^{x+2} + 2^x$
$\Leftrightarrow 2^2 = 2^x$
$\Leftrightarrow x = 2$ und $x = 0$

AUFGABE 4 Ein radioaktives Präparat zerfällt nach einem exponentiellen Zerfallsgesetz

$$y(t) = y(0) * a^t,\ t \geq =,$$

wobei t die Zeitdauer in Tagen seit Beginn des Zerfallsprozesses misst und y(t) die zum Zeitpunkt t vorhandene Substanz in mg bezeichnet. Wie lange dauert es, bis noch 1 mg der ursprünglichen Substanz vorhanden ist, wenn die vorhandene Substanz nach jeweils 7 Tagen auf ein Fünftel zurückgeht und zu Beginn des Zerfallsprozesses 15 mg der Substanz vorhanden sind?

t: Zeitdauer in Tagen
$y(t)$: Subtanz in mg zum Zeitpunkt t
$y(0) = 15$mg

nach jeweils 7 Tagen: Substanz auf ein Fünftel

t	y(t) in mg
0	15
7	3
14	0,6

$y(7) = 15 * a^7 = 3$
$\Leftrightarrow a^7 = \frac{3}{15}$
$\Leftrightarrow a = \sqrt[7]{\frac{3}{15}}$

Formel: $y(t) = 15 * (\sqrt[7]{\frac{3}{15}})^t$

$y(t) = 1$
$\Leftrightarrow 15 * (\sqrt[7]{\frac{3}{15}})^t = 1$
$\Leftrightarrow (\sqrt[7]{\frac{3}{15}})^t = \frac{1}{15}$
$\Leftrightarrow t * log\left((\sqrt[7]{\frac{3}{15}})\right) = log(1) - log(15) = -log(15)$
$\Leftrightarrow t = \frac{-log(15)}{\frac{1}{7}log\left(\frac{3}{15}\right)}$
$\Leftrightarrow t \approx 11,778$

Es dauert ungefähr 11,8 Tage bis 1 mg der Substanz vorhanden ist.

Aufgabe 5

A) Beweisen Sie folgende Ungleichungen:
Für $n\epsilon\mathbb{N}$ und $a\epsilon\mathbb{R}$ mit $a \geq -1$ gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Induktionsanfang: $n = 1$
$(1+a)^1 = 1 + a \geq 1 + a = 1 + 1a$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Induktionsvoraussetzung: $(1+a)^n \geq 1 + na$
Induktionsbehauptung: $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

Beweis:
$(1+a)^{n+1}$
$=(1+a)^n*(1+a)^1$
$=(1+a)^n*(1+a)$
$\geq^{I.V.}(1+na)*(1+a)$
$\geq 1+na+a+na^2$
$\geq 1+(n+1)a$

$\square$

B) Zeigen Sie, dass $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$$

streng monoton wachsend ist, d.h. es gilt $f(n+1)>f(n)$ für alle $n\epsilon\mathbb{N}$.
Hinweis: Zeigen Sie

$$f(n+1)>f(n)\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n>1-\frac{1}{n+2}$$

und verwenden Sie die Ungleichungen aus A).
z.z. $f(n+1)>f(n)\Rightarrow\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n>1-\frac{1}{n+2}$

Beweis:
$f(n+1)>f(n)$
$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n*\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^1>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n>\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$
$\Leftrightarrow\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)}$
$\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} > \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n * \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n > \left(\frac{n+1+1-1}{n+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n > \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

z.z. $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n+2}\right)$

Beweis:
$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$
$$\geq^{A)} 1+n\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$\geq^{A)} 1-\frac{n}{n^2+2n+1}$$
$$> 1-\frac{n}{n^2+2n}$$
$$> 1-\frac{1}{n+2}$$

□

AUFGABE 6 Zeigen Sie folgende Gleichheiten, wobei $x \epsilon \mathbb{R}$ beliebig ist:

A) z.z. $sin(x+\pi) = -sin(x)$

Beweis:
$$sin(x+\pi)$$
$$= sin(x) * cos(\pi) + cos(x) * sin(\pi)$$
$$= sin(x) * (-1) + cos(x) * 0$$
$$= -sin(x)$$

B) z.z. $cos(x+\pi) = -cos(x)$

Beweis:
$cos(x+\pi)$
$= cos(x) * cos(\pi) + sin(x) * sin(\pi)$
$= cos(x) * (-1) + sin(x) * 0$
$= -cos(x)$

4 BLATT 04

AUFGABE 1 Zeigen Sie das Additionstheorem für den Tangens Hyperbolicus: für alle $x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}$ gilt

$$tanh(x_1 \mp x_2) = \frac{tanh(x_1 \mp tanh(x_2))}{1 \mp tanh(x_1) tanh(x_2)}$$

Additionstheoreme:
$sinh(x \pm y) = sinh(x) cosh(y) \pm sinh(y) cosh(x)$
$cosh(x \pm y) = cosh(x) cosh(y) \pm sinh(x) sinh(y)$

Beweis:
$tanh(x \pm y)$
$= \frac{sinh(x \pm y)}{cosh(x \pm y)}$
$= \frac{sinh(x) cosh(y) \pm sinh(y) cosh(x)}{cosh(x) cosh(y) \pm sinh(x) sinh(y)}$
$= \frac{\frac{sinh(x) cosh(y)}{cosh(x) cosh(y)} \pm \frac{sinh(y) cosh(x)}{cosh(x) cosh(y)}}{\frac{cosh(x) cosh(y)}{cosh(x) cosh(y)} \pm \frac{sinh(x) sinh(y)}{cosh(x) cosh(y)}}$
$= \frac{\frac{sinh(x)}{cosh(x)} \pm \frac{sinh(y)}{cosh(y)}}{1 \pm \frac{sinh(x) sinh(y)}{cosh(x) cosh(y)}}$
$= \frac{tanh(x) \pm tanh(y)}{1 \pm tanh(x) tanh(y)}$

□

AUFGABE 2 Die reelle Folge $(a_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n > 2.$$

Ist die Folge $(a_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ ...

A) ... monoton steigend ober ab einem gewissen Index sogar streng monoton steigend?
Behauptung:
- monoton steigend bei $n \leq 2$
- streng monoton steigend ab $n > 2$

Beweis:
$a_1 \leq a_2$
$= 1 \leq 1$

Induktionsanfang: n=2
$a_2 < a_3$
$= 1 < 2$

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $a_n > a_{n-1}$ $\forall a_n$ mit $n \epsilon \mathbb{N}$ und $n > 2$
Beweis:
a_{n+1}
$= a_n + a_{n-1} >^{I.V.} a_n$
$= a_{n-1} > 0$

$\square$

B) ... beschränkt?
Behauptung:
reelle Folge (a_n) nach unten beschränkt

Beweis:
es existiert kein Folgeglied, dessen Wert kleiner ist als 1, da die Startwerte $a_1 = a_2 = 1$ beginnen und die Funktion, ab dem Index $n = 3$ streng monoton steigend ist, d.h. es existiert eine untere Schranke bei 1.

C) ... alternierend?
Behauptung:
Folge (a_n) ist nicht alternierend
Beweis:
es existieren keine negativen Werte
(siehe Auswertung der Teilaufgaben A) und B))

AUFGABE 3 Sei $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen Sie folgende Aussage:
Es ist $a \epsilon \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Folge genau dann, wenn die Folge eine Teilfolge besitzt, die gegen a konvergiert.
Behauptung:
a HP von $(a_n) n\epsilon\mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n) n\epsilon\mathbb{N}$ besitzt Teilfolge, die gegen a konvergiert

Beweis:

"$\Rightarrow$:"
$\forall \varepsilon \epsilon \mathbb{R}, \forall N \epsilon \mathbb{N} \exists n \epsilon \mathbb{N} : n > N |a_n - a| \leq \varepsilon$
Sei $(\varepsilon_k) k \epsilon \mathbb{N}$ eine Folge
$\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ und definiere $(n_k) k \epsilon \mathbb{N}$

$n_1 = 1$
$n_k = \{n \epsilon \mathbb{N}, n > n_{k-1}, 1|a_n - a| < \varepsilon, k > l\}$
$\exists n$ mit Eigenschaft als Definition von $(n_k) k \epsilon \mathbb{N}$
Es gilt $n_{k+1} > n_k$
weil $|a_n - a| < \dfrac{1}{k} \forall k \geq 2$ gilt nach Satz 3.4.
$\Rightarrow |a_n - a| \to 0$ und damit $a_{nk} \to a$

"$\Leftarrow$:"
Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a
Sei U beliebige Umgebung von a
au Definition von Konvergenz folgt: fast alle Folgeglieder der Teilfolge liegen in U
es folgt: fast alle Folgeglieder der Teilfolge sind unendlich viele Folgeglieder der ursprünglich vielen Folgeglieder der ursprünglichen Folge
in U liegen unendlich viele Folgeglieder

$\square$

AUFGABE 4 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte und Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, sofern solche existieren. Begründen Sie Ihre Antworten. Dabei können Sie auf alle aus der Vorlesung bekannten Resultate sowie auf Aufgabe 3 zurückgreifen.

A) $a_n = n^4 - n^3$ für $n \geq 1$
$= n^3(-1) \geq n^3$

a_1 unbeschränkt und nicht konvergent nach 3.3
als Produkt zweier streng monotoner wachsender Folgen
a_n streng monoton wachsend
jede Teilfolge unbeschränkt
$\nexists$ Häufungspunkt

B) $a_n = \begin{cases} 1 & n \leq 10, \\ \dfrac{1024}{log_2(n)} & n > 10 \end{cases}$

Behauptung: $a_n \to 0$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig
$|\dfrac{1024}{log_2(n)} - 0| = \dfrac{1024}{log_2(n)} < \varepsilon$ für $n > 2^{\dfrac{1024}{\varepsilon}}$
konvergiert gegen 0

C) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ für $n \geq 1$
$= \frac{n^2+2n+1}{2n^2}$
$= \frac{1}{2}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})$
$lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

$lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$
$lim_{n\to\infty} a_n + lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

falls $lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $lim_{n\to\infty} b_n = b$

D) $a_n = \frac{e^n}{2^n} + \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 1$
$a_n \geq \frac{e^n}{2^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^n$
$|\frac{e}{2}| > 1 \Rightarrow$ divergent
$\left(\frac{e}{2}\right)^n$ streng monoton wachsend
$\Rightarrow$ jede Teilfolge unbeschränkt
$\Rightarrow$ kein Häufungspunkt

E) $a_n = cos(n * \pi)$ für $n \geq 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für gerade n}-1 \\ \text{für ungerade n} & \end{cases}$$

Häufungspunkte liegen bei 1 und -1

F) $a_n = n^2 * sin(n * \frac{\pi}{2})$ für $n \geq 1$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2kn^2 \\ n = 4k+1-n^2 & n = 4k+3 \end{cases} \quad k\epsilon\mathbb{N} \cup \{0\}$$

Häufungpunkt bei 0
$a_n unbeschränkt$
sonst keine weiteren Häufungspunkte

G) $a_n = \begin{cases} 2^n & n \leq 17, \frac{2n}{n+2} \\ n > 17 \end{cases}$

a_n
$= 2\frac{n}{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$= 2\frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$lim_{n\to\infty} a_n = 2$

H) $a_n = \frac{sin(n)}{n}$ für $n \geq 1$
$|a_n| \leq \frac{1}{n}$
$\forall n lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$lim_{n\to\infty} a_n = 0$

AUFGABE 5 Gibt es eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ mit unendlich vielen Häufungspunkten? Begründen Sie Ihre Antwort.
Beispiel einer Folge (a_n) mit Beschränkung im Intervall $]0,1]$

$\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}...$

5 BLATT 05

AUFGABE 1 Die reelle Folge $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ sie gegeben durch

$$a_n = n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1),\ n\epsilon\mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$? Falls ja, geben Sie ihren Grenzwert an.
Beweis:
$lim_{n\to\infty} a_n$
$= lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)*n$
$= lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)*n$
$= lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n)}$
$= lim_{n\to\infty}$
$\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)$

da $n\to\infty$, dann gilt $n>>1$

z.z $lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$

$(\sqrt{1+\frac{1}{n}})^2 = 1+\frac{1}{n}$
$\leq 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} = (1+\frac{1}{n})^2$
$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1$
$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1$

$lim_{n\to\infty} a_n$
$lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+1$
$= \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+1$
$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Daraus folgt, dass die Folge a_n gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}$ konvergiert.

AUFGABE 2 Bestimmen Sie für alle folgenden Beispiele, welche der folgenden vier Fälle vorliegen: $(f_n)\epsilon o(g_n)$, oder $(f_n)\epsilon O(g_n)$, oder $(g_n)\epsilon o(f_n)$, oder $(g_n)\epsilon O(f_n)$. Begründen Sie Ihre Antworten.

	$(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$	$(g_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$
A)	$nlog_2(n)$	n
B)	$10n^2+8n+100$	n^3
C)	$10*log_2(n)$	$log_2(n^2)$
D)	e^n	e^{n+1000}
E)	$n!$	2^n
F)	$(log_2(n))^{log_2(n)}$	$2^{((log_2(n))^2)}$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $lim_{n\to\infty}(\frac{log_2(n)}{n}) = 0$.

$(f_n)\epsilon O(g_n) \Leftrightarrow \frac{f_n}{g_n}$ ist beschränkt

$(f_n)\epsilon o(g_n) \Leftrightarrow \frac{f_n}{g_n}$ ist Nullfolge

A) $(g_n)\epsilon o(f_n)$ und $(g_n)\epsilon O(f_n)$

$$\frac{g_n}{f_n} = \frac{n}{nlog_2(n)}$$
$$= \frac{1}{log_2(n)} \longrightarrow 0$$

B) $(f_n)\epsilon o(g_n)$ und $(f_n)\epsilon O(g_n)$

$$\frac{f_n}{g_n} = \frac{10n^2+8n+100}{n^3} \longrightarrow 0$$

C) $(g_n)\epsilon O(f_n)$ und $(f_n)\epsilon O(g_n)$

$$\frac{g_n}{f_n} = \frac{log_2(n^2)}{10log_2(n)}$$
$$= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{f_n}{g_n} = 5$$

D) $(g_n)\epsilon O(f_n)$ und $(f_n)\epsilon O(g_n)$

$$\frac{g_n}{f_n} = \frac{e^n}{e^{n+1000}} = \frac{1}{e^{1000}}$$
$$\frac{f_n}{g_n} = e^{1000}$$

E) $(g_n)\epsilon o(f_n)$ und $(g_n)\epsilon O(f_n)$

$$\frac{g_n}{f_n} = \frac{2^n}{n!}$$
$$= \frac{2*2*2...*2*2}{n*(n-1)*(n-2)...2*1}$$
$$\leq \frac{4}{n} \longrightarrow 0$$

F) $(f_n)\epsilon o(g_n)$ und $(f_n)\epsilon O(g_n)$

$$\frac{f_n}{g_n} = \frac{(log_2(n))^{log_2(n)}}{n^{log_2(n)}} \longrightarrow 0$$

AUFGABE 3 Die reelle Folge $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass ...

A) ... $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ für alle $n\epsilon\mathbb{N}$ gilt.

Beweis:
Induktionsanfang $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} \leq a_1 \leq 1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$

IV: für alle feste, aber beliebige $n\epsilon\mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$

IB: es gelte $n\epsilon\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1$

Beweis:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \text{ und } \frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$$
dann gilt: $\frac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq 2$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{a_n} \leq 2$$
$$\Leftrightarrow^{IV.} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_n+1} \leq 1$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1$

$\square$

B) ... die Folge konvergiert.

Behauptung: $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ konvergiert, weil Cauchy Folge in $\mathbb{R}$

z.z: $a = lim_{n\to\infty} a_n$ $a \geq 0$, da $a_n > 0 \forall n$ gilt

Beweis:
es gelte $a < 0$

z.z. $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen a

$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n\epsilon\mathbb{N} \exists n_0 \geq n |a_{n_0} - a| > \varepsilon$

Sei $a < 0$ beliebig
wähle $\varepsilon_0 := -\frac{a}{2} > 0$

Sei $n\epsilon\mathbb{N}$ beliebig, dann setze $n_0 := n$
es gilt:
$|a_{n_0} - a| = |a_{n_0}| + |a| \geq |\frac{a}{2}| = \varepsilon_0$

also gilt: $lim_{n\to\infty} \geq 0$
$(a_n - a_{n+1})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ Nullfolge

Anwendung Grenzwertsätze
$lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$
$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty}(a_n - \frac{1}{1+a_n}) = 0$
$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} a_n - \frac{lim_{n\to\infty} 1}{lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} a_n} = 0$
$\Leftrightarrow a - \frac{1}{1+a_n} = 0$
$\Leftrightarrow a * (1+a) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow a + a^2 = 1$

$a > 0$, a positive Lösung $\longrightarrow$ Grenzwert

C) ... der Grenzwert durch $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gegeben ist.

$x^2 + x = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$
$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ und $x_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

da $x_2 < 0$ folgt:

$lim_{n \to \infty} a_n = x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

6 Blatt 06

AUFGABE 1 Zeigen Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, dass $f : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x+1}$$

genau einen Fixpunkt hat.

AUFGABE 2 Entscheiden Sie für jede der folgenden Reihen, ob die Riehekonvergiert oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 * 2^{n+1}}{3^n}$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$

C) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^n$

E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

F) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

G) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls n gerade} \\ 3^{-n} & \text{falls n ungerade} \end{cases}$

H) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n}$ für ein $k \epsilon \mathbb{N}$

AUFGABE 3 Sei $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n > 0$ für alle $n\epsilon\mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

AUFGABE 4 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $lim_{n\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

A) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} (2-\frac{1}{n})^n x^n$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n x^n$

7 BLATT 07

AUFGABE 1 Bestimmen Sie die Grenzwerte $lim_{x\to\infty} f(x)$ für die folgenden Angaben von $x_0 \epsilon \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

A) $x_0 = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 10x$$

B) $x_0 = 2$, $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x}{x - 2}$$

C) $x_0 = -\infty$, $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

D) $x_0 = 5$, $f : [1, 5[\bigcup]5, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$$

E) $x_0 = 1$, $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

F) $x_0 = \infty$, $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2-x}{1+x}$$

AUFGABE 2 Sei $D =]a, b[\setminus\{x_0\}$, wobei $a, b \epsilon \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ und $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$. Sie $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $c \epsilon \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann gegen c bei x_0 existieren und gleich c sind.

AUFGABE 3 Begründen Sie Ihre Antworten.

A) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & x < -1 \\ |x - 2| + x^2 & x \geq -1 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = -1$ stetig?

B) Bestimmen Sie $a, b \epsilon \mathbb{R}$, sodass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -ax & x < 1 \\ x^2 + b & x \geq 1 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt.

AUFGABE 4 Sind die folgenden Funktionen stetig? Begründen Sie Ihre Antworten.

A) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{|sin(x^2 - 8x + 2)|} * exp(x - 1)$$

B) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ cos(x) & -\frac{\pi}{2} < x < \pi \\ -sin(x - \frac{\pi}{2}) & x \geq \pi \end{cases}$$

C) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{|x|}} & x \leq -4 \\ x^{2+3x-6} & -4 < x < 0 \\ 3^{\frac{x}{2}} & x \geq 0 \end{cases}$$

AUFGABE 5 Sei $a, b \epsilon \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Die Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ sei stetig auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt, d.h es existiert $x_0 \epsilon [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

8 BLATT 08

AUFGABE 1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

A) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$

B) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$

C) $f :]0, 10] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$

D) $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$

AUFGABE 2 Entscheiden Sie, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

A) $f(x) = x * |x|$

B) $f(x) = \begin{cases} sin(x+1) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & x \leq 2 \\ exp(x-2) & x > 2 \end{cases}$

AUFGABE 3 Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x$ differenzierbar ist und $f'(x) = x^x(1 + ln(x))$ gilt.

AUFGABE 4 Bestimmen Sie die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ für die folgenden Angaben von $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

A) $f :]0, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (cos(x))^{sin(x)}$

B) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (cos(x))^5 * sin(x^4) * x^3$

C) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{e^x}$

D) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = log_3(e^{2x+1})$

E) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x * ln(x) - x$

F) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ln(x^{3x})$

9 BLATT 09

AUFGABE 1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die achsensymmetrisch zur y-Achse ist, d.h. es gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \epsilon \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zu $(0,0)$ ist, d.h. es gilt $f'(x) = -f'(-x)$ für alle $x \epsilon \mathbb{R}$

AUFGABE 2

A) Bestimmen Sie alle (lokalen und globalen) Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 5$, sofern solche existieren. Begründen Sie Ihre Antworten.

B) Bestimmen Sie alle globalen Minima der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{3}{4}x^4 - 10x^3 + 24x^2 + cos(2x - 16 + \pi)$. Begründen Sie Ihre Antworten.

AUFGABE 3 Sei $a \epsilon \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x + a$ höchstens eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ hat.

AUFGABE 4 Ein Auto fährt von Tübingen nach Stuttgart, ein anderes au der gleichen Strecke von Stuttgart nach Tübingen. Sie fahren beide zum gleichen Zeitpunkt T_0 los und treffen sich zu einem Zeitpunkt T_1 genau auf halber Strecke. Zeigen Sie, dass es einen Zeitpunkt T mit $T_0 < T < T_1$ gibt, an dem die beiden Autos exakt die gleiche Geschwindigkeit haben.

AUFGABE 5 Beweisen Sie, dass für jedes $n \epsilon \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x * e^{x-1}$ durch

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^{x-1}$$

gegeben ist.

10 Blatt 10

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgende Aussage:
Seien $a, b \epsilon \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf $[a, b]$ streng monoton steigend und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \epsilon]a, b[$ und es existiert kein Intervall $]e, f[$ mit $a \leq e < f \leq b$, sodass $f'(x) = 0$ für alle $x \epsilon]e, f[$ gilt.

Aufgabe 2 Ein Grundstück soll aus einem Rechteck und einem - an einer beliebigen Seite - bündig angrenzenden Halbkreis bestehen. Der Umfang des Grundstücks soll 500 Meter betragen, die Fläche des Grundstücks soll maximal sein. Wie groß müssen die Seitenlängen des Rechtecks und der Kreisradius gewählt werden?

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Antworten.

a)

$$lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{x}$$

b)

$$lim_{x \to 0} \frac{x}{tan(x)}$$

c)

$$lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x}$$

d)

$$lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + ln(x)}{x^2 - ln(x)}$$

e)

$$lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass

$$lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

gilt.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ um die Entwicklungsstelle $a = 1$. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe bei jedem $x \epsilon \mathbb{R}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

11 Blatt 11

Aufgabe 1 Für $k\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}$ bezeichne C^k die Menge aller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ mindestens k-mal stetig differenzierbar sind. Außerdem bezeichne C^∞ die Menge aller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass jede Inklusion in

$$C^\infty \subset ... \subset C^{k+1} \subset C^k \subset ... \subset C^0$$

echt ist, das heißt, dass für alle $k\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$C^{k+1} \neq C^k$$

gilt.
Hinweis: Wenn es Ihnen nicht gelingt, die Behauptung (1) für allgemeines $k\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}$ zu zeigen, dann zeigen Sie die Behauptung (1) zumindest für $k=1$ und $k=2$.

Aufgabe 2 Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

a) Wenn wenigstens eine der beiden Funktionen u=Ref(Realteil) und v=Imf(Imaginärteil) konstant ist, so ist f konstant.

b) Falls auch f* holomorph ist, so ist f konstant.

Aufgabe 3

a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen Riemann-intergrierbar sind. Begründen Sie Ihre Antworten.
(i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = cases 0 x \neq \frac{1}{2}$$

1 x = $\frac{1}{2}$
(ii) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = cases 0 x \leq \frac{1}{4}$$
$$1 \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$$

0 x $\geq \frac{3}{4}$
(iii) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = cases ln(-x^3+3x^2+9x+5) x \leq 1$$

3 x > 1
(iv) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^x g(y) dy,$$

wobei $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \epsilon [0,2]$ ist.

B) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \epsilon [a,b]$ und es gelte $\int_a^b f(x) dx = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \epsilon [a,b]$ gilt.

AUFGABE 4 Bestimmen Sie

$$lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} \int_{x^4}^{2x^4} cos(y^2) dy.$$

12 Blatt 12

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Integrale:
Nach Satz 7.5 der Vorlesung gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, falls F eine Stammfunktion von f ist.

a) $\int_1^3 x^2 - sin(x) + e^{3x} dx$

Stammfunktion: $\frac{1}{3}x^3 + cos(x) + \frac{1}{3}e^{3x}$
das folgt aus Tabelle 7.5, wegen $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$ und $\frac{d}{dx}f(k * x) = k * f'(kx)$ für $k\epsilon\mathbb{R}$

$\int_1^3 x^2 - sin(x) + e^{3x} dx$
$= 9 + cos(3) + \frac{1}{3}e^9 - \frac{1}{3} - cos(1) - \frac{1}{3}e^3$
$= \frac{26}{3} + cos(3) + \frac{1}{3}e^9 - cos(1) - \frac{1}{3}e^3$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 + (tan(x))^2 dx$

Stammfunktion: tan(x)
das folgt aus Tabelle 6.7 aus der Vorlesung

c) $\int_1^4 3ln(x) + 3dx$

Stammfunktion: $3xln(x)$
das folgt aus Tabelle 7.5 aus der Vorlesung, wegen $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{cos(x)}{sin(x)} dx$

Stammfunktion: $ln(sin(x))$
das folgt wegen $\frac{d}{dx} ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ auf Grund der Symmetrie des Sinus um $\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie $a, b\epsilon\mathbb{R}$, so dass für alle $x\epsilon\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ gilt:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

B) Verwenden Sie A), um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_2^7 \frac{1}{x^2-1} dx$$

AUFGABE 3 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

A)

$$\int_0^\pi x^2 cos(x) dx$$

B)

$$\int_1^3 (x^2+1) ln(x) dx$$

C)

$$\int_0^\pi (sin(x))^2 dx$$

D)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x) * cos(x) dx$$