✓例 1.1.1　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 严增，f^{-1} 是其反函数，x_1 是 $f(x)+x=a$ 的根，x_2 是 $f^{-1}(x)+x=a$ 的根. 试求 x_1+x_2 的值.

解　因 $f(x_1)+x_1=a$，$f^{-1}\circ f$ 是恒等变换，知 $f(x_1)+f^{-1}[f(x_1)]=a$. 此即表明 $f(x_1)$ 是方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 的根. 但由于 f 严增，可知 $f^{-1}(x)+x$ 也严增，方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 有根必唯一. 故 $f(x_1)=x_2$，因而 $x_1+x_2=x_1+f(x_1)=a$.

注　讨论反函数，与所讨论的范围有密切关系. 例 $f(x)=\sqrt{x}$，$g=x^2$，当用它们定义函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 时，则 f 不是满射，g 不是单射. 但作为函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 二者都是双射，且互为反函数.

例 1.1.5 试证:设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的有界实函数,且有

$$f(x+h)=\frac{f(x+2h)+f(x)}{2} \quad (\forall x \in \mathbf{R}), \tag{1}$$

其中 h 为某一正数,则 h 必是函数 f 的周期.

证 根据式(1),有

$$f(x+2h)-f(x+h)=f(x+h)-f(x)\qquad(\forall x\in\mathbf{R}).$$

令 $F(x)=f(x+h)-f(x)$,上式即为 $F(x+h)=F(x)(\forall x\in\mathbf{R})$,于是

$$\begin{aligned}f(x+nh)&=[f(x+nh)-f(x+(n-1)h)]+[f(x+(n-1)h)\\&\quad-f(x+(n-2)h)]+\cdots+[f(x+h)-f(x)]+f(x)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}F(x+kh)+f(x)=nF(x)+f(x).\end{aligned}$$

若 $F(x)\neq 0$,当 $n\to+\infty$ 时,有 $nF(x)\to+\infty$,与函数 f 有界矛盾,所以 $F(x)=0$.即 $f(x+h)=f(x)(\forall x\in\mathbf{R})$,故 h 是函数 f 的周期.

注 1°显然,正实数 h 是函数 f 的周期,则条件(1)必成立.本例说明:

若函数 f 在数轴上是有界函数,则条件(1)是 f 以 h 为周期的充分必要条件.

2° "有界"条件不可忽略,例如 $f(x)=x$,不是周期函数,但是式(1)总成立.

例 1.1.3 若 f^{-1} 为 f 的反函数，$y=f^{-1}(-x)$ 是 $y=f(-x)$ 的反函数，试证 $f(x)$ 是奇函数.

证 Ⅰ $y=f^{-1}(-x)$ 实为 f^{-1} 与 $g(x)\equiv -x$ 的复合函数. 即

$$f^{-1}(-x)=f^{-1}(g(x))=(f^{-1}\circ g)(x), \tag{1}$$

同理

$$f(-x)=f(g(x))=(f\circ g)(x). \tag{2}$$

按题设条件，$f^{-1}\circ g$ 与 $f\circ g$ 互为反函数，因此

$$f\circ g=(f^{-1}\circ g)^{-1}\xlongequal{(B)}g^{-1}\circ f, \tag{3}$$

即 $\forall x\in(-l,l)$ 有 $f(-x)\xlongequal{(2)}(f\circ g)(x)\xlongequal{(3)}(g^{-1}\circ f)(x)=-f(x)$.

所以 f 是奇函数.

证 Ⅱ 由 $y=f^{-1}(-x)$ 可得 $f(y)=-x$，即 $x=-f(y)$. 这表明，像点 $y=f^{-1}(-x)$ 找出它的原像是 $x=-f(y)$. 即 $y=-f(x)$ 是 $y=f^{-1}(-x)$ 的反函数. 但题中告诉我们 $y=f^{-1}(-x)$ 是 $y=f(-x)$ 的反函数，故应有 $f(-x)=-f(x)$，$\forall x\in(-l,l)$，f 是奇函数.

证 Ⅲ 已知 $y=f^{-1}(-x)$ 是 $y=f(-x)$ 的反函数，表明 $y=f(-x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(-y)$. 因此 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)=f(f^{-1}(-y))=-y=-f(-x)$. 所以 f 为奇函数.

注 用类似方法也可先证明 $f^{-1}(x)$ 是奇函数，然后利用例 1.1.2 的结果，推知 $f(x)$ 是奇函数.