例 1.2.3 设实数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n - x_{n-2} \to 0 \ (n \to \infty)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.（四川大学）

提示 记 $y_n = |x_n - x_{n-1}|$，则 $|x_n - x_{n-2}| \geqslant |y_n - y_{n-1}|$.

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| = \frac{y_n}{n} \leqslant \frac{|y_n - y_{n-1}| + |y_{n-1} - y_{n-2}| + \cdots + |y_{N+1} - y_N|}{n} + \frac{y_N}{n}.$$

2）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$（有限数），试证：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \mathrm{A}$.

（湖北大学，中国地质大学）

（当 $n>1$ 时）. 至此要 $|\alpha|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}+1$.

故令 $N=\dfrac{4}{\varepsilon^2}+1$，则 $n>N$ 时有 $|\sqrt[n]{n+1}-1|=|\alpha|<\varepsilon$.

2)（分步法）

当 A 为有限数时，$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-A\right|$$
$$\leqslant\frac{|x_1-A|+|x_2-A|+\cdots+|x_n-A|}{n}.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，故 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N_1>0$，$n>N_1$ 时，$|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\text{上式}\leqslant\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意这里 $|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|$ 已为定数，因而 $\exists\,N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，

$$\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

注 1° 本例第 2)小题对于 $A=+\infty$ 或 $A=-\infty$ 时结论仍成立，留作练习. 当 $A=\infty$ 命题结论不再成立. 例如数列 $0,1,-1,2,-2,\cdots$.

2° 第 2)小题表明 $\{x_n\}$ 收敛，则前 n 项的算术平均值必也收敛，且极限值不变. 此结论以后常用. 另外，此题用 Stolz 公式证明会变得十分简洁（见§1.4 节）.

§ 1.4 O. Stolz 公式 $\frac{x_n - x_{n-k}}{y_n - y_{n-k}} \sim \frac{x_n}{y_n}$

Stolz 公式　可以说是数列的 L'Hospital 法则. 它对求数列的极限很有用. 本节专门讨论 Stolz 公式及其应用.

一、数列的情况

定理 1　$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型 Stolz 公式}\right)$

设 $\{x_n\}$ 严格递增(即 $\forall\, n \in \mathbf{N}$ 有 $x_n < x_{n+1}$), 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

若

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\text{(有限数)},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a\text{;(中国人民大学)}$$

2) a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$,结论仍然成立.

注 (几何意义)把 (x_n,y_n) 看成是平面上的点 M_n(如图1.4.1所示),定理意义是,假设 M_n 的横坐标 $x_n\nearrow+\infty$,那么当 $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ 的斜率以有限数 a 为极限时,则 $\overrightarrow{OM_n}$ 的斜率也以 a 为极限.

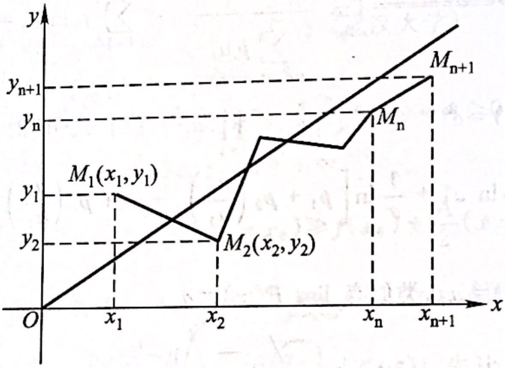

图 1.4.1

证 1° 目的在于证明:$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{y_n}{x_n}-a\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

记

$$\alpha_n\equiv\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}-a. \tag{2}$$

按已知条件有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,即 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N>0$,

当 $n \geqslant N$ 时,有 $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (3)

现在的目标在于从(3)推出(1). 为此从(2)解出 y_n 再代入(1). 由(2)得

$$
\begin{aligned}
y_n &= y_{n-1} + (\alpha_n + a)(x_n - x_{n-1}) \quad \text{(再迭代使用此式)} \\
&= y_{n-2} + (\alpha_{n-1} + a)(x_{n-1} - x_{n-2}) + (\alpha_n + a)(x_n - x_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= y_N + (\alpha_{N+1} + a)(x_{N+1} - x_N) + \cdots + (\alpha_n + a)(x_n - x_{n-1}) \\
&= y_N + \alpha_{N+1}(x_{N+1} - x_N) + \cdots + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + a(x_n - x_N).
\end{aligned}
$$

两边同时除以 x_n,再同时减去 a,得

为什么是 X_N 而不是 X_n?

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{y_n}{x_n} - a\right| &\leqslant \left|\frac{y_N - ax_N}{x_n}\right| + \frac{|\alpha_{N+1}||x_{N+1} - x_N| + \cdots + |\alpha_n||x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \\
&< \left|\frac{y_N - ax_N}{x_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{x_n - x_N}{x_n}\right| \\
&< \frac{|y_N - ax_N|}{x_n} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

将 n 再进一步增大,因 $x_n \to +\infty$,故 $\exists N_1 > N$,使得 $n > N_1$ 时有

$$\left|\frac{y_N - ax_N}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $\left|\dfrac{y_n}{x_n} - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

2° (极限为 $+\infty$ 的情况)因已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0$,利用 1° 中的结论只要证明 y_n 严$\nearrow +\infty$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = +\infty$(问题得证). 因 x_n 严$\nearrow$,要证 y_n 严$\nearrow$只要证 $\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} > 1$. 事实上, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$,所以对 $M = 1$,

$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有$\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}>1$,即

$$n>N\text{ 时},y_n-y_{n-1}>x_n-x_{n-1}>0. \tag{4}$$

所以当 $n>N$ 时,y_n 严↗.(4)式中令 $n=N+1,N+2,\cdots,k$,然后相加,可知

$$y_k-y_N>x_k-x_N.$$

令 $k\to\infty$,知 $y_k\to+\infty$.证毕.

3°(极限为 $-\infty$ 的情况)只要令 $y_n=-z_n$ 即可转化为 2°中的情况.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$,一般推不出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=\infty$.如令 $x_n=n$,$\{y_n\}=\{0,2^2,0,4^2,0,6^2,\cdots\}$.这时虽然$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$,但

$$\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}=\{0,2,0,4,0,6,\cdots\}\not\to\infty.$$

定理 2 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型 Stolz 公式}\right)$ 证明时向后展开到无穷项;

设 $n\to\infty$ 时 $y_n\to0$,x_n 严↘0(严格单调下降趋向零).若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$(其中 a 为有限数,$+\infty$或$-\infty$).

注 定理 1 其名为$\dfrac{\infty}{\infty}$型,其实只要求分母 $x_n\nearrow+\infty$(严格单调上升趋向无穷大),至于分子 y_n 是否趋向无穷大,无关紧要.定理 2 则是名副其实的$\dfrac{0}{0}$型.因为定理条件要求分子、分母都以 0 为极限.

Stolz 公式,对于求序列的极限十分有用,例 1.2.1(2),如果应用 Stolz 公式,变得非常明显.因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1}=a$.又如