

微积分习题课

9 月 23 日

徐金华

数学科学学院, 浙江大学



1 重点内容回顾

- 集合与函数
- 图像与函数图像
- 反函数与反函数图像
- 函数图像的平移、拉伸与对称

2 课后习题

- 反函数
- 数学归纳法
- 建模

3 练习题

- 函数
- 函数奇偶性
- 周期函数



集合是具有某种特定性质，具体或抽象的对象汇成的全体¹
常见的表示方法有枚举法与描述法

¹陈纪修等编著. 数学分析 上 [M]. 北京: 高等教育出版社. 2004. 06: 2.



- {红, 黄, 蓝}
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$
- $\mathbb{B} = \{x : x^2 = 2\}$
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{q}{p}, \text{其中 } p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{Z}\}$
- $S_1 = \{x : x \notin x\}$, 罗素悖论、理发师悖论²

²杜国平. 罗素悖论研究进展 [J]. 湖北大学学报 (哲学社会科学版), 2012, 39(5): 1-6. 2012.05.001.

设 D 、 B 是两个非空实数集，如果存在一个对应法则 f ，使得对 D 中任何一个实数 x ，在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则称对应法则 f 是 D 上的函数，记为

$$f: x \mapsto y \quad \text{或者} \quad f: D \rightarrow B$$

y 称为 x 对应的函数值，记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 叫自变量， y 叫因变量

图像是二维平面 \mathbb{R}^2 的子集，是满足某些具有特定性质的点的集合，记为

$$D = \{(x, y) : x \text{ 和 } y \text{ 满足的性质}\}$$

例如单位圆：

$$O = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$



函数图像只需要把 x 和 y 满足的性质换成 x 与 y 之间的函数关系

$$D = \{(x, y) : \text{满足 } y = f(x), x \in D\}$$

例如正弦函数图像：

$$\{(x, y) : y = \sin(x), x \in \mathbb{R}\}$$

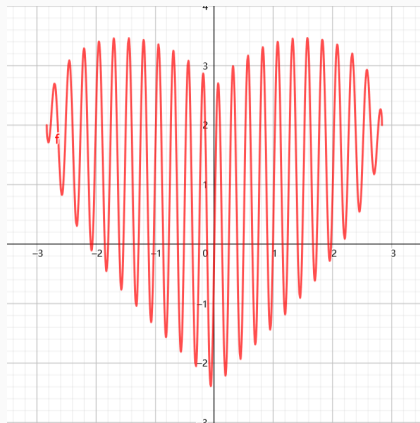


Figure: $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 0.9\sqrt{8-x^2}\sin(25x)$



设 $y = f(x), x \in D$. 若对 $R(f)$ 中每一个 y , 都有唯一确定且满足 $y = f(x)$ 的 x 与之对应, 则按照此对应法则就能得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数, 称这个函数为 f 的反函数, 记作

$$f^{-1} : R(f) \rightarrow D \quad \text{或} \quad x = f^{-1}(y), \quad y \in R(f)$$

由于习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量, 所以常把上述反函数改写成

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in f(D)$$



对于给定函数 $y = f(x), x \in D$, 考虑一下几个函数

- $y = f(x + a), x + a \in D, a$ 为常数
- $y = f(x) + a, a$ 为常数
- $y = af(x), a$ 为常数
- $y = f(ax), ax \in D, a$ 为常数
- $y = f(-x), -x \in D$
- $y = -f(x)$



求下列函数的反函数

$$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

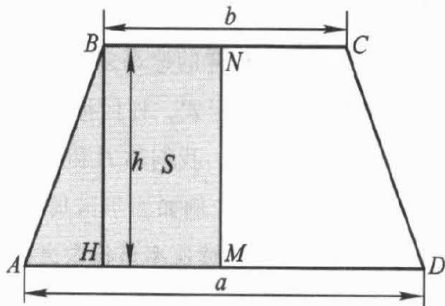


设 $f_n(x) = f\{f[\dots f(x)\dots]\}$ (n 个 f), 若

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

求设 f_n

在等腰梯形 $ABCD$ 中 (第 10 题图), 底 $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$), 高 $HB = h$. 引直线 $MN \parallel BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM = x$, 把图中阴影部分的面积 S 表示为变量 x 的函数并作出函数 $S = S(x)$ 的图形



第 10 题图



设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 严增, f^{-1} 为其反函数, x_1 是 $f(x) + x = a$ 的根, x_2 是 $f^{-1}(x) + x = a$ 的根. 试求 $x_1 + x_2$ 的值



若 f^{-1} 为 f 的反函数, $y = f^{-1}(-x)$ 是 $y = f(-x)$ 的反函数, 试证 $f(x)$ 为奇函数

设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的有界实函数, 且有

$$f(x+h) = \frac{f(x+2h) + f(x)}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

其中 h 为某一确定的正数

证明: h 必是函数 f 的周期