

Base teórica

Para la realización de la optimización con algoritmos genéticos se tiene que tener como base teórica dos ecuaciones fundamentales, a las cuales se llegó mediante la derivación de la Función de Transferencia en el primer capítulo del trabajo:

1. Ecuación de movimiento del carro:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

2. Ecuación de movimiento angular del péndulo:

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

- M: Masa del carro
- m: Masa del péndulo
- l: Longitud desde el punto de pivote al centro de gravedad
- θ : Ángulo del péndulo con la vertical
- u: Fuerza de control

Ecuación del controlador PID

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- $u(t)$: Es la señal de control, que se aplica al sistema (en este caso, la fuerza u que mueve el carro del péndulo)
- K_p : Es la ganancia proporcional. Determina cuánto responde el sistema proporcionalmente al error actual $e(t)$
- K_i : Es la ganancia integral. Compensa errores acumulados en el tiempo calculando la integral del error $e(t)$
- K_d : Es la ganancia derivativa. Anticipa futuros errores basándose en la tasa de cambio del error $e(t)$
- $e(t) = r(t) - y(t)$: Es el error, definido como la diferencia entre la señal de referencia $r(t)$ (la salida deseada) y la salida real del sistema $y(t)$

En el caso ejemplar del péndulo invertido la salida del sistema $y(t)$ podría ser el ángulo θ o la posición x del carro. Se va a buscar mantener $\theta = 0$ (péndulo vertical) y/o estabilizar x, es decir, el carro en la posición deseada.

Por eso, se usa el controlador PID para calcular la fuerza $u(t)$ que estabilice el sistema, considerando las dinámicas no lineales del péndulo.

Ajustar estos parámetros manualmente tiene un grado de complejidad regular, especialmente en sistemas complejos como el péndulo invertido, que presenta:

- Dinámicas no lineales.
- Alta sensibilidad a pequeños cambios en los parámetros.
- Inestabilidad inherente.

El objetivo es encontrar valores óptimos de K_p , K_i y K_d que minimicen un criterio de desempeño, como el error cuadrático medio (ECM) entre la salida real y la deseada. Para ello será necesario aplicar algoritmos genéticos. Estos son una técnica de optimización

inspirada en el proceso de selección natural. Utiliza principios biológicos como la evolución, mutación y recombinación para buscar soluciones óptimas en espacios de búsqueda grandes y complejos (en este caso, son todas las posibles combinaciones de K_p , K_i y K_d).

El Algoritmo Genético consta de 7 pasos, los cuales -como previamente se mencionó- simulan la evolución biológica, y la adaptan al proceso al cual se le busca la solución. Se procederá a enumerar los 7 pasos:

1. Inicialización
2. Evaluación de Aptitud
3. Selección
4. Cruce
5. Mutación
6. Actualización
7. Iteración

Aplicación del Algoritmo Genético

1. Inicialización

Se genera una población inicial de soluciones posibles. Cada solución representa un conjunto de parámetros PID (K_p , K_i y K_d) que deben optimizarse.

1.1. Representación de las soluciones

Cada solución simula ser un cromosoma, en este caso se le llamará vector

$$C_i = \begin{bmatrix} K_{p_i} & K_{i_i} & K_{d_i} \end{bmatrix}$$

i : Índice del cromosoma en la población inicial

1.2. Rango de búsqueda

Los valores iniciales de K_p , K_i y K_d se generan aleatoriamente dentro de un rango definido

$$K_{p_i} \in \begin{bmatrix} K_{p_{min}} & K_{p_{max}} \end{bmatrix}$$

$$K_{i_i} \in \begin{bmatrix} K_{i_{min}} & K_{i_{max}} \end{bmatrix}$$

$$K_{d_i} \in \begin{bmatrix} K_{d_{min}} & K_{d_{max}} \end{bmatrix}$$

1.3. Tamaño de la población

Una población típica puede contener entre 20 y 100 cromosomas. Esto balancea entre eficiencia computacional y diversidad de soluciones. Se utiliza una distribución aleatoria para generar los valores iniciales, donde $rand()$ genera un número aleatorio uniforme entre 0 y 1.

$$K_{p_i} = K_{p_{min}} + rand() * (K_{p_{max}} - K_{p_{min}})$$

$$K_{i_i} = K_{i_{min}} + rand() * (K_{i_{max}} - K_{i_{min}})$$

$$K_{d_i} = K_{d_{min}} + rand() * (K_{d_{max}} - K_{d_{min}})$$

2. Evaluación de Aptitud

Cada cromosoma se evalúa en función de qué tan bien cumple con el objetivo. En este caso, el objetivo es minimizar un criterio de desempeño, como el error cuadrático medio (ECM) entre la salida del sistema $y(t)$ y la referencia deseada $r(t)$

$$J(C_i) = \frac{1}{T} \int_0^T (r(t) - y(t))^2 dt$$

- $r(t)$: Señal deseada
- $y(t)$: Salida del sistema obtenida con K_p , K_i y K_d
- T: Duración de la simulación

3. Selección

Se seleccionan los cromosomas más aptos para formar la siguiente generación. Hay varios métodos de selección, pero uno común es la ruleta de selección

3.1. Proporcionalidad a la Evaluación de Aptitud

Cada cromosoma tiene una probabilidad de ser seleccionado proporcional a su aptitud

$$P(C_i) = \frac{J_{mejor} - J(C_i)}{\sum_{j=1}^N [J_{mejor} - J(C_j)]}$$

J_{mejor} : La mejor evaluación de aptitud de la población actual

3.2. Método de ruleta

Con este método lo que se busca son las mejores soluciones las cuales tendrán una mayor posibilidad de ser seleccionadas, sin descartar a las que son menos aptas.

Se genera una distribución acumulativa y se elige aleatoriamente en base a ella.

4. Cruce

El cruce combina pares de cromosomas para generar unos nuevos, a los que se les llamará “hijos”, para así explorar nuevas áreas del espacio de soluciones.

4.1. Operación de cruce

En un cruce de punto los cromosomas se dividen en una posición aleatoria y se combinan. Se puede tomar el siguiente ejemplo:

$$C_{hijo_1} = \begin{bmatrix} K_{p_{padre_1}}, K_{i_{padre_2}}, K_{d_{padre_2}} \end{bmatrix}$$

$$C_{hijo_2} = \begin{bmatrix} K_{p_{padre_2}}, K_{i_{padre_1}}, K_{d_{padre_1}} \end{bmatrix}$$

4.2. Posibilidad de cruce

Se define una posibilidad para que un par de cromosomas sea seleccionado para cruzarse.

$$p_{crossover} = 80\%$$

5. Mutación

5.1. Mutación aleatoria

Cada parámetro tiene una probabilidad de mutación ($p_{mutación}$ por ejemplo, 5%). Si ocurre, se altera el valor ligeramente:

$$K_{p_i} \leftarrow K_{p_i} + \Delta K_p$$

ΔK_p : Valor pequeño generado aleatoriamente

5.2. Rango restringido

Asegurarse de que los nuevos valores permanezcan dentro del rango permitido (K_{min}, K_{max}).

6. Actualización

La nueva generación reemplaza a la población actual. Esto puede hacerse de diferentes maneras:

- **Reemplazo total:** Toda la población se sustituye por los nuevos cromosomas
- **Elitismo:** Se conservan algunos de los mejores cromosomas de la generación anterior

7. Iteración

Se repiten los pasos 2 a 6 durante varias generaciones, hasta que se cumpla un criterio de parada, como:

- Número máximo de generaciones
- Error menor a un valor deseado ($J < J_{tolerancia}$)