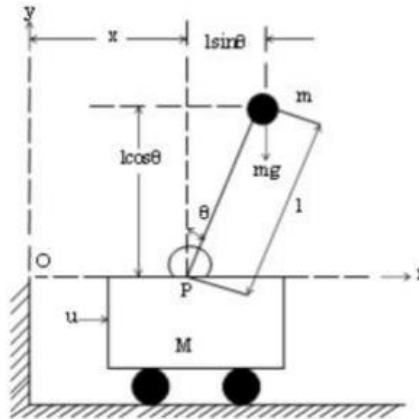


Análisis del modelo matemático:

Fuente:

<https://ingenierovizcaino.com/material/libros/sd/ingenieria-de-control-moderna-ogata-5ed.pdf>
<https://www.youtube.com/watch?v=RX71O3QF3uM>

-Ecuación de movimiento



Un péndulo invertido montado en un carroejado por un motor aparece en la figura. Aquí se considera sólo un problema en dos dimensiones, en el cual el péndulo sólo se mueve en el plano de la página. Se aplica al carro la fuerza de control u . Supóngase que el centro de gravedad de la barra del péndulo está en su centro geométrico.

A partir del gráfico se generará un modelo matemático para el sistema.

Sea θ el ángulo de inclinación de la barra.

Sean además las coordenadas (x, y) del centro de gravedad de la barra del péndulo (x_G, y_G). De este modo, podemos definir

I = Momento de inercia

$\ddot{\theta}$ = *aceleración angular (segunda derivada de θ)*

El movimiento rotacional de la barra del péndulo alrededor de su centro de gravedad es:

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta$$

El movimiento horizontal del centro de gravedad de la barra del péndulo se obtiene con

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H$$

El movimiento vertical del centro de gravedad de la barra del péndulo es

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \cos \theta) = V - mg$$

El movimiento horizontal del carro se describe mediante

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (a)$$

Al mantener el péndulo invertido de manera vertical se supone que theta es pequeña, para efectos prácticos igual a 0. De esta manera podemos realizar la alineación.

Reemplazando tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= Vl - Hl \\ m(\ddot{u} + l\ddot{\theta}) &= H \\ 0 &= V - mg \end{aligned} \quad (b)$$

De (a) y (b) obtenemos

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (x)$$

Reemplazamos en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\ &= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} &= mgl\theta \end{aligned} \quad (y)$$

Las ecuaciones (x) , (y) definen el movimiento del sistema del péndulo invertido, sin embargo en el ejercicio mostrado la masa se encuentra en lo alto de la varilla, es decir el centro de gravedad es la bola del péndulo. Podemos afirmar que el momento de Inercia es pequeño ($I=0$). Reemplazamos y obtenemos.

$$\begin{aligned} I &= 0 \\ (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} &= mgl\theta \end{aligned}$$

(estas son las mismas ecuaciones del documento)