Practica 3 FTC Indecibilidad

Ejercicio 1. ¿Qué es una MT universal?

- **Definición**: Una **MTU** es una máquina de Turing capaz de simular cualquier otra máquina de Turing (**M**) dada su descripción codificada y una entrada **w**.
- **Funcionamiento**:
  - Recibe como entrada (**〈M〉, w**), donde **〈M〉** es la codificación de **M** y **w** es la cadena de entrada.
  - Simula paso a paso el comportamiento de **M** sobre **w** usando cintas de trabajo.
  - Acepta o rechaza según lo haría **M** con **w**.
- **Codificación**:
  - Tanto las MT como las cadenas se representan en un formato estandarizado (ej., binario).
  - La codificación incluye estados, transiciones, símbolos y movimientos (D, I, E).
- **Enumeración de MT**:
  - Las MT pueden ordenarse canónicamente (por longitud de código y orden alfanumérico).
  - Existe una MT que, dado un índice **i**, genera la codificación de la **i-ésima MT (〈M_i〉)**.
- **Importancia**:
  - Base para demostrar la **indecidibilidad** de problemas (ej., el problema de la parada).
  - Precursora del concepto de **programa almacenado** en computación.

Ejercicio 2. Explicar cómo enumeraría los números naturales pares, los números enteros, los números racionales (o fraccionarios), y las cadenas de Σ* siendo Σ = {0, 1}.

Para enumerar cada uno de estos (que es posible) lo haremos de la siguiente forma:

- *Naturales pares*: Arrancamos con i = 0, y en cada paso para mostrar el par sumamos 2.
- *Números enteros*: Arrancamos con i = 0, cada paso aumenta en 1 el i, y a partir de 1 mostramos el numero con el símbolo negativo y luego el valor absoluto de i, por ejemplo 0, -1, 1, -2, 2, ...
- *Números racionales*: En este caso deberemos llevar 2 números contadores (cadenas), i y j por ejemplo:
  - Caso especial 0, no podemos plantear 0/0 así que lo ponemos.

  1. j, el denominador arranca 1.
  2. Ponemos i en 1.
  3. Si mínimo común divisor entre ambos es = 1 entonces ponemos i /j e -i/j. (Medio trampa esto porque en una MT como haces?)
  4. Incrementamos i en 1, si es menor que j, hacemos paso 3.

5. Sino incrementamos j en 1 y volvemos al paso 2.
   - Esto funciona porque al chequear el mcd sacamos si es una fracción irreducible, por tanto garantizamos unicidad de los números que ponemos.

- Σ^* siendo Σ = {0, 1}*:
  1. i = 0
  2. Escribo en una cinta una cantidad de ceros igual a i (enunciamos el 0 con i dígitos)
  3. j = 0
  4. Sumo 1 a la cadena binaria: arrancando del lado derecho, si encuentro un 1, lo cambio por un 0 y voy hacia la izquierda cambiando todos los 1 por 0 hasta llegar un 0 y lo cambio por un 1 (Suma binaria).
  5. j++, si j < i^2 entonces repito el paso 4, sino i++ y vuelvo al paso 2.
     - En este caso no hay repetidos porque hay que escribir todo el lenguaje y aunque 0 = 00 en binario no calienta. No hay que manejar overflow porque cuando llega todos 1 corta dado que seria la i^2 combinación.

Ejercicio 3. Dar la idea general de cómo sería una MT que, teniendo como cadena de entrada un número natural i, genera la i-ésima fórmula booleana satisfactible según el orden canónico. Comentario: asumir que existen una MT M1 que determina si una cadena es una fórmula booleana, y una MT M2 que determina si una fórmula booleana es satisfactible.

Este problema requiere primero que la formulas booleanas sean enumerables, ordenables de mayor a menor y según orden alfanumérico para desempatar. Suponiendo que logramos codificar las formulas booleanas en binario, podemos hacer lo siguiente:
• La siguiente MT M obtiene la combinación i-ésima (Formula i) según el orden canónico.
Dado i, la MT M hace:

1. Hace n := 0.
2. Genera la siguiente cadena v según el orden canónico.
3. Aplica M1, y luego M2. Si alguna rechaza vuelve al paso 2.
4. Si n = i, devuelve v y para. Si n ≠ i, hace n := n + 1 y vuelve al paso 2.
   Es lo mismo que crear una maquina de turing que enumere maquinas de turing.

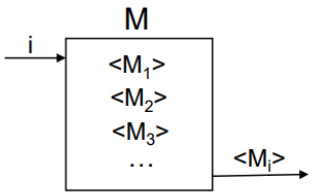
Enumeración de las máquinas de Turing

- Codificar las máquinas de Turing permite enumerarlas, por ejemplo en el **orden canónico**:
  1) Los códigos se ordenan de menor a mayor longitud.
  2) Los códigos con longitudes iguales se ordenan según el orden alfanumérico.

- Por ejemplo, las primeras cadenas según el orden canónico, con ceros, unos, paréntesis y comas, son:

λ														
0	1	(	)	,										
00	01	0(	0)	0,	10	11	1(	1)	1,	(0	(1	((	…	
000	001	00(	00)	00,	010	011	01(	01)	01,	0(0	0(1	0((	…	etc.

- La siguiente MT M obtiene la MT i-ésima (MT M_i) según el orden canónico. Dado i, la MT M hace:
  1. Hace n := 0.
  2. Genera la siguiente cadena v según el orden canónico.
  3. Valida que v sea el código de una MT. Si no lo es, vuelve al paso 2.
  4. Si n = i, devuelve v **(v es el código de la MT M_i)** y para.
     Si n ≠ i, hace n := n + 1 y vuelve al paso 2.



07

Ejercicio 4. Sea M1 una MT que genera en su cinta de salida todas las cadenas de un lenguaje L. Dar la idea general de cómo sería una MT M2 que, usando M1, acepte una cadena w sii w ∈ L.

Dado que w tiene una longitud x, y M1 generara todas las cadenas en orden canónico, lo qué hace M2 es:

1. i = 0
2. Si i > x rechaza
3. Simula M1 y genera la siguiente cadena v de longitud x en la cinta.
4. Si v = w entonces se acepta
5. Si quedan cadenas de longitud x vuelve a paso 3, sino i++ y vuelve a paso 2

Ejercicio 5. El lenguaje LU = {(M, w) | M acepta w} se conoce como lenguaje universal, y representa el problema general de aceptación. Probar que LU ∈ RE. Ayuda: construir una MT que acepte LU.

Esencialmente me esta pidiendo que haga la maquina universal, obviamente vamos saltarnos como simulas cada maquina específicamente y asumimos que se puede hacer:

1. Separamos el la maquina en su cinta y luego la entrada en otra cinta.

2. Simulamos el siguiente paso de M sobre w, si acepta aceptamos, si rechaza rechazamos y si no para seguimos ejecutando pasos.
   MTU esta en RE entonces:

- **Acepta correctamente**: U acepta (M,w) si y solo si M acepta w, por lo que U reconoce LU.
- **No decide LU**: Si M no se detiene con w, U tampoco se detiene, lo que significa que U no es un **decidor** para LU (no resuelve el problema de la parada). Por lo tanto, LU es **RE** pero no **recursivo** (no está en **R**).
  En este caso MTU semidecide LU, ya que todo depende de la maquina de entrada, si la maquina de entrada es R entonces seria R, pero como puede entrar cualquier M y w esta en RE.

Ejercicio 6. Una función f : A → B es total computable sii existe una MT Mf que la computa para todo elemento a A. Sea la función f01 : Σ* → {0, 1} tal que: f01(v) = 1, si v = (, w) y M para a partir de w. f01(v) = 0, si v = (, w) y M no para a partir de w o bien v ≠ (, w). Probar que f01 no es total computable. Ayuda: ¿con qué problema se relaciona dicha función?

En este caso se relaciona con el HP porque:

- f: A -> B se aplica a una función f01 que recibe cualquier cadena "v" y retorna 0 o 1, donde 0 y 1 se mapea a terminar o no la ejecución de una MT si la entrada es (`<M>`, w).
- Sabemos que esto es imposible ya que el HP falla, pero para rechazarlo imaginemos una maquina P que puede computar f01, luego la encapsulamos dentro de un maquina que le lleva la contra (invierte la salida) de f01, si f01 retorna 1 no para, si retorna 0 entonces para.
  - Lo anterior se puede llevar a una paradoja si introducimos el código de la maquina (`<P>`,`<P>`) como entrada a P, puesto que si f01 retorna 1 dice que P para pero P no parara y viceversa.

Ejercicio 7. Responder breve y claramente cada uno de los siguientes incisos (en todos los casos, las MT mencionadas tienen una sola cinta):

a. Probar que se puede decidir si una MT M, a partir de la cadena vacía λ, escribe alguna vez un símbolo no blanco. Ayuda: ¿Cuántos pasos puede hacer M antes de entrar en un loop?

Depende de la cantidad de estados, técnicamente seria `n*2` donde n es la cantidad de estados es n y 2 porque es la cantidad de posibles "símbolos" (blanco y no blanco). En este caso NO nos importa la longitud de la cinta puesto que estaríamos trabajando implícitamente con un solo lugar.

b. Probar que se puede decidir si una MT M que sólo se mueve a la derecha, a partir de una cadena w, para, Ayuda: ¿Cuántos pasos puede hacer M antes de entrar en un loop?

Es decidible, el hecho que no pueda volver a lugares anteriores evita loops, hace máximo p pasos donde p es la longitud de la cadena w y al llegar a p+1 loopea.

c. Probar que se puede decidir si dada una MT M, existe una cadena w a partir de la cual M para en a lo sumo 10 pasos. Ayuda: ¿Hasta qué tamaño de cadenas hay que chequear?

Si hay una cadena w a partir de la cual M para en a lo sumo 10 pasos esto representa que hay un máximo de pasos, 10.

d. ¿Se puede decidir si dada una MT M, existe una cadena w de a lo sumo 10 símbolos a partir de la cual M para? Justificar la respuesta.

Es decidible, si aplicamos formulas sabremos que para cada w de tamaño K tendremos máximo de `K.N1.N2^K` pasos para completarla antes de que se detecte un loop, en este caso basta con generar uno por una cada cadena y ejecutarla durante la cantidad de pasos máxima, si se pasa vamos a la siguiente, si acepta aceptamos, y si genera todas rechazamos.
Es como la versión acotada del HP.