Trabajo Práctico Nro 8 Lógica Proposicional

Ejercicio 1. Dada la siguiente información:

"Si el unicornio es mítico, entonces es inmortal, pero si no es mítico, entonces es un mamífero mortal. Si el unicornio es o inmortal o un mamífero, entonces tiene un cuerno. El unicornio es mágico sí tiene un cuerno." Simbolizar en el Cálculo de Enunciados y responder:

Descomposición de proposiciones:
Unicornio es mítico. p
Unicornio es inmortal. s
Unicornio es mamífero. r
Unicornio tiene un cuerno. t
Unicornio es mágico. o
Premisas:
A1: p -> s {Si es mítico entonces es inmortal}
A2: (¬p) -> (r ∧ (¬ s)) {Si no es mítico entonces es un mamífero mortal}
A3: (s ∨ r) -> t {Si es inmortal o mamífero entonces tiene cuerno}
A4: t -> o {Si tiene cuerno es mágico}

I. El unicornio es mítico?. Fundamentar.

Nuestra conclusión es: p.
si p es falsa, podemos crear una distribución de valores de verdad para el resto de proposiciones que nos de verdadera en todas las premisas.

p -> s	(¬p) -> (r ∧ (¬ s))	(s ∨ r) -> t	t -> o	p
F F	V -> V V	F V -> V	V V	F
V	V	V	V	

O sea si p es falso y: s= F, r= V, t = V, y o = V entonces las premisas se cumplen y falla la conclusión.
No se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio es mítico

II. El unicornio no es mítico?. Fundamentar.

Conclusión: ¬p

p -> s	(¬p) -> (r ∧ (¬ s))	(s ∨ r) -> t	t -> o	¬p
V -> V	F ->F ∧ F	V ∨ F -> V	V V	F
V	V	V	V	

No se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio no es mítico

III. El unicornio es mágico?. Fundamentar.

Conclusión: o

p -> s	(¬p) -> (r ∧ (¬ s))	(s ∨ r) -> t	t -> o	o
F -> F	V -> V ∧ V	F ∨ V -> V	V -> F	F
V	V	V	F	

El enunciado parecería valido ya que es si F es válido no puedo encontrar una asignación de variables que haga verdadera todas las premisas y mientras la conclusión es falsa.

Por lo tanto, se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio es mágico.

Sabiendo ahora que el unicornio es inmortal, responder:

4. El unicornio no es mágico?. Fundamentar.

Sabiendo que s = V:

p -> s	(¬p) -> (r ∧ (¬ s))	(s ∨ r) -> t	t -> o	¬o
V -> V	F -> V ∧ F	V ∨ V -> V	V -> V	F
V	V	V	V	

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que A1, ..., A4 tomen el valor V y A tome el valor F. Por lo tanto, no se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio no es mágico sabiendo que el unicornio es inmortal.

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes argumentaciones, escribir una forma argumentativa que se corresponda con ella y determinar si es válida o inválida.

I. Si la función f no es continua, entonces la función g no es diferenciable. g es diferenciable. Por lo tanto, f no es continua.

c: función f es continua
d: función g es diferenciable

A1: ¬f -> ¬g
A2: g

A: ¬f
No hay pruebas suficientes para garantizar que f no es continua:

¬f -> ¬g	g	¬f
F -> F	V	F
V	V	F

II. Sí Juan ha instalado la calefacción central, entonces ha vendido su coche o ha pedido dinero prestado al banco. Juan no ha vendido su coche ni ha pedido dinero prestado al banco. Por lo tanto, Juan no ha instalado la calefacción central.

c: Juan ha instalado calefacción central
v: Juan ha vendido su coche
p: Juan ha pedido dinero prestado al banco

A1: c -> v ∨ p
A2: ¬v ∧ ¬p

A: ¬c

c -> v ∨ p	¬v ∧ ¬p	¬c
V -> F V F	V ∧ V	F
F	V	F

o

c -> v ∨ p	¬v ∧ ¬p	¬c
V -> F V V	V ∧ F	F
V -> V	F	
V	F	F

Mismo caso si v = V, esto quiere decir que la forma argumentativa es válida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que alguna A1, A2 tome el valor F y A tome el valor F. Por lo tanto, se presentan pruebas suficientes para garantizar que Juan no ha instalado la calefacción central.

Ejercicio 3. Una fórmula booleana es satisfactible si existe al menos una combinación de valores de verdad (una asignación de verdadero o falso a las variables) que hace que la fórmula sea verdadera. Dados los siguientes enunciados, determinar cuales son verdaderos y cuáles son falsos. Justificar en cada caso.

I. Una fórmula que es una tautología es satisfactible.

I. **Verdadero**. Una tautología siempre es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad (página 4: "siempre toma el valor de verdad V"). Por lo tanto, existe al menos una combinación (de hecho, todas) que la hace verdadera, cumpliendo la definición de satisfactible.

II. Una fórmula que es satisfactible es una tautología.

II. **Falso**. Una fórmula satisfactible solo requiere que *alguna* asignación la haga verdadera (página 4), pero no necesariamente todas (como exige una tautología). Por ejemplo, p∨qp∨q es satisfactible (ejemplo en página 4: "no es ni tautología ni contradicción"), pero no es tautología.

III. Una fórmula que no es satisfactibles es una contradicción.

III. **Verdadero**. Una fórmula no satisfactible siempre es falsa para todas las asignaciones (página 4: "contradicción... siempre toma el valor de verdad F"). Esto coincide con la definición de contradicción.

IV. Una fórmula que es una contradicción no puede ser satisfactibles.

IV. **Verdadero**. Una contradicción nunca es verdadera (página 4: "siempre toma el valor de verdad F"), por lo que no existe asignación que la satisfaga.

Ejercicio 4. Un conjunto de fórmulas es satisfactible si existe al menos una asignación de valores de verdad (una interpretación) que hace que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas al mismo tiempo. Determinar si los siguientes conjuntos son satisfactibles:

I. {p, (p→q), r}
Si, ya que si p, q y r tienen asignados valor V, entonces todas las formulas son verdaderas.
II. {p, q, (p ∧ ¬p)}
No, es imposible satisfacer el conjunto, ya que es imposible satisfacer (p ∧ ¬p) con cualquier asignación de p.

Ejercicio 5. Sean A, B fbfs que cumplen que (¬A ∨ B) es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuales contradicciones. Justificar las respuestas.

(¬A ∨ B) -> Todas las posibles asignaciones de valores de verdad siempre dan verdaderos para esa formula, no sabemos que es A ni B. C no sabemos que es, en resumen hay que poder traducir combinaciones de A y B a la forma (¬A ∨ B) y además verificar si C afectaría para que sea una Taut o Nosat.

I. ((¬(A → B))→ C)

¬A∨B es **lógicamente equivalente** a A→B, es decir en esta formula hay una tautologia negada que siempre es falso.
Entonces te queda falso -> C, siempre es verdadero.

II. (C → ((¬A) ∨ B))

C -> Taut, siempre es verdadero.

III. ((¬A) → B)

Esto **no** es equivalente a la fórmula original, pero vamos a analizarla.

No sabemos nada nuevo sobre esta fórmula, pero veamos si **es una tautología, contradicción o depende.**

- (A→B) es tautología.
- Pero eso no implica que ($\neg A \to B$) sea tautología.
  No sabemos que es.

Ejercicio 6 Responder y justificar:

I. ¿"(p → q)" es lógicamente equivalente a "(p ∨ ¬q)" ? }

p	q	p→q	p∨¬q
V	V	V	V
V	F	F	V ❌
F	V	V	F ❌
F	F	V	T ❌

No es.

II. ¿“(p ↔ q)” es lógicamente equivalente a “((p → q) ∧ (q → p))” ?

Sí, esta es una equivalencia fundamental de la lógica proposicional.

p↔q≡(p→q)∧(q→p)
Esto se cumple porque:

- La bicondicional es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor.
- Y eso ocurre exactamente cuando q→p y p→q son verdaderas al mismo tiempo.

✅ Sí son lógicamente equivalentes.

III. ¿“(¬(p ∧ q))” es lógicamente equivalente a "(¬p ∨ ¬q)” ?

Si, por ley de De Morgan.

IV. ¿“(¬(p ∨ q))” es lógicamente equivalente a “(p ∧ q)” ?

No no es equivalente, por ley de De Morgan te quedaría ¬p ∧ ¬q.

Ejercicio 7. Sea # el operador binario definido como p#q = (p ∧ ¬q) ∨ (¬p ∧ q).

Tablas de verdad para probar las propiedades del operador (#)

I. Asociatividad:

$$(x\#(y\#z) \equiv (x\#y)\#z)$$

Construimos la tabla considerando las 8 combinaciones posibles de (x, y, z) (V/F):

(x)	(y)	(z)	(y # z)	(x # (y # z))	(x # y)	((x # y) # z)
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

Las columnas **(x # (y # z))** y **((x # y) # z)** son idénticas, lo que prueba que (#) es asociativo.

II. Conmutatividad:

$$y \# z \equiv z \# y$$

Tabla para las 4 combinaciones de (y) y (z):

(y)	(z)	(y # z)	(z # y)
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Conclusión:
Ambas tablas confirman que (#) es asociativo y conmutativo.

Ejercicio 8. ¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aun así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. En caso de responder positivamente, dar un ejemplo y justificar. En caso de responder negativamente, justificar.

Sí, en el Cálculo de Enunciados pueden existir dos fórmulas bien formadas (fbfs) con diferentes letras proposicionales que sean lógicamente equivalentes.

Ejemplo y justificación

- **Fórmula 1:**

$$A \lor \neg A$$

- **Fórmula 2:**

$$B \lor \neg B$$

  Equivalencia lógica:
  Ambas fórmulas son tautologías (siempre verdaderas, como se muestra en las tablas de verdad para la disyunción y negación en las páginas 12–15 del documento). Por lo tanto, (A \lor \lnot A \equiv B \lor \lnot B), pese a usar letras proposicionales distintas.

Explicación:

- La equivalencia lógica depende de la **estructura** de las fbfs, no de las letras específicas.

El ejemplo muestra que dos fbfs con letras proposicionales diferentes pueden ser equivalentes si comparten la misma estructura lógica.

Ejercicio 9. Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf (A ∧ B). Fundamentar.

Nota: Diremos que "A implica lógicamente a B" o que "B es consecuencia lógica de A" (lo denotaremos con A ⇒ B) si la forma enunciativa A → B es una tautología. Y diremos que "A es lógicamente equivalente a B" (lo denotaremos con A □ B) si la forma enunciativa A ↔ B es una tautología. Por ejemplo:

I. A

(A ∧ B) -> A
Esto es una tautologia a simple vista:

A	B	(A^B) -> A	A^B
V	F	V	F
V	V	V	V
F	F	V	F
F	V	V	F

II. A ↔ B

(A^B) -> (A<->B)

A	B	A^B	A<->B	(A^B) -> (A<->B)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

Tautología, entonces si es implicado.

III. ¬B → ¬A

A	B	A^B	¬B → ¬A	¬B	¬A	(A ∧ B) → (¬B→¬A)
V	V	V	V	F	F	V

A	B	A^B	¬B → ¬A	¬B	¬A	(A ∧ B) → (¬B→¬A)
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V

IV. A → B

A	B	A^B	A->B	(A ∧ B) → (¬B→¬A)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Todos son implicados lógicamente por (A ∧ B)

Ejercicio 10. Dada la siguiente tabla de verdad, encontrar tres fbfs para cada una que las tenga por tablas de verdad:

I. una fbf (sin restricciones de conectivos).

p # q (XOR)

II. una fbf en FNC (forma normal conjuntiva)

(¬p ∨ ¬q) ∧ (p ∨ q)

III. una fbf en FND (forma normal disyuntiva)

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejercicio 11. Explicar porque el siguiente conjunto no es un conjunto adecuado de conectivas {∧, ∨}.

El conjunto `{∧, ∨}` **no es adecuado** porque no puede expresar todas las funciones lógicas posibles. Aquí el porqué:

1. **Falta de completitud funcional:**
   - Con solo `∧` (AND) y `∨` (OR) **no puedes expresar la negación (¬)**.
   - Ejemplo: No hay forma de construir `¬p` usando solo `p ∧ q` o `p ∨ q`.
   - Esto se demuestra en el documento (páginas 12-16), donde la negación requiere explícitamente el conectivo `¬`.
2. **Imposibilidad de expresar tautologías/contradicciones:**
   - Una fórmula como `p ∨ ¬p` (tautología) **no puede construirse** sin `¬`.
   - Tampoco puedes expresar `p ∧ ¬p` (contradicción).
3. **Demostración en el documento:**
   - En la **página 7** se prueba que fórmulas con solo `∧` y `∨` **pueden ser falsas** (ejemplo: `(p ∧ ¬p)` es siempre falso, pero no puedes construirlo sin `¬`).
   - Esto confirma que el conjunto `{∧, ∨}` no es funcionalmente completo.

Ejercicio 12.¿Es cierto que si una fbf A es satisfactible entonces A es una tautología".

No, una tautologia implica que una fbf en todos sus asignaciones de valores el resultado es verdadero, no meramente satisfactibles que implica al menos uno.
Contra ejemplo:
Formula satisfactibles no tautologia:

p ^ q
V
F
F
F

p^q es una formula booleana que es satisfactibles en al menos una asignación de valores de verdad donde p = V y q = V. Pero el resto ed asignación de verdad son falsas, no es una tautologia.

Ejercicio 13. Sea A una fbf donde aparecen solo los conectivos ∧, ∨, ¬ . Sea A *la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ∧ por ∨ y cada ∨ por ∧. Si A es una tautología, A* ¿también lo es? Justificar.

Contra ejemplo:

p ∨ ¬p	p	¬p
V	V	F
V	F	V

Siempre es verdadero, pero si nosotros cambiamos a:

p ^ ¬p	p	¬p
F	V	F
F	F	V

Siempre es falso, o sea una contradicción, NO en todos los casos que apliquemos esto de acá nos tiene porque dar una contradicción, pero no siempre que lo apliquemos nos va a dar una Tautologia.

Ejercicio 14. Demostrar utilizando la técnica del absurdo que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y A → B son tautologías entonces B también lo es.

Planteo inicial:
Hipótesis:
i. A es taut.
ii. (A->B) es taut.

Conclusión falsa:

iii. B no es taut.

Demostración:

iv. Por iii, existe una valuación v tal que v(B)=F

v. Por i, v(A)=V

vi. Por ii, v(A->B)=V

vi. Por definición de valoración y por v y vi, v(B)= V sino v((A->B))!=V, contradicción con iv.

Ejercicio 15. Demostrar utilizando la técnica del absurdo que (p∧¬p)→q es una tautología.

Hipótesis:

1. v(p ^ ¬p) = F cualesquiera valores de p, es una contradicción
   Conclusión falsa:
2. (p∧¬p)→q no es una tautología.
   Demostración:
3. Existe un valoración v(q) que haga falsa la ecuación (p∧¬p)→q
4. Por tabla de verdad sabemos que si (A -> B) y v(A) = F entonces v(A->B) = V
5. Por definición de la valoración y por (4) y (1), v(p ^ ¬p)=F entonces v((p ^ ¬p)->q) =V siempre, contradicción con (3)

   1. Supongamos que $(p \land \neg p) \to q$ **no es tautología**.
   2. Entonces, existe valuación v con $v((p \land \neg p) \to q) = F$.
   3. Por tabla de $\to$, esto implica $v(p \land \neg p) = V$ y $v(q) = F$.
   4. Pero $p \land \neg p$ es contradicción (siempre F, página 13).
   5. **Absurdo**: No existe v tal que $v(p \land \neg p) = V$.
   6. Por tanto, $(p \land \neg p) \to q$ es tautología.

Ejercicio 16. Sea A una fbf donde aparecen solo los conectivos ∧, ¬. Sea A *la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ∧ por ∨ y cada letra de proposición por su negación (o sea, cada p por ¬p, cada q por ¬q, etc.). Probar, utilizando la técnica de inducción que A* es lógicamente equivalente a ¬A.

Caso base. N=0:

- **Fórmula atómica (sin conectivos):**

- Sea A=p (donde p es una variable proposicional).
- A∗=¬p (por definición, se niega la variable).
- ¬A=¬p.
- **Resultado:** A∗≡¬A.
  Verificación:

p	A∗=¬p	¬A=¬p
V	F	F
F	V	V

Hipótesis Inductiva (HI)

Toda FBF B de n o menos conectivos que sean ^, ¬cumple con B∗≡¬B.

Paso de inducción n+1

- Caso 1, la A de la forma ~B. (Lo agrego porque el libro lo menciona, pero ya se prueba por la hipótesis de una)
  - Tiene n conectivas, por hipótesis es B* es lógicamente equivalente a ~B.
- Caso 2: A=es B∧C
  - B y C son fbf con n conectivos así que se cumple la hipótesis y entonces son equivalentes a B *y C* y por tanto a a ¬B y ¬C
  - Entonces A∗=(∗B∨∗C)=(¬B∨¬C)=¬(B^C)=¬A

Ejercicio 17. Demostrar utilizando la técnica de inducción que cualquier fórmula bien formada A que contenga sólo los conectivos {∨, ∧} puede tomar el valor F.

Sea v una valuación, que asigna el valor Falso a todas las letras. O sea v(pi)=F para todo i. En esa valuación la Fbf A también va a tomar el valor falso, o sea v(A)=F.
Caso base N=0
Hablamos de una fórmula sin conectivos es decir atómica.
Entonces:

- A=p
- v(p)=F por lo tanto v(A)=f
  HI: asumimos que para toda Fbf A que contiene sólo conjunción y disyunción, con N o menos conectivos v(A)=F
  CASO N+1
  Usando HI podemos probar que v(A)=F donde tiene N+1 conectivos.
  Casos:
- (B ∨ C)

- (B ∧ C)

  Ambos B o C tiene N o menos conectivos y entonces vale la HI de que v(B)=F y v(C)=F.

  Por defincion del ∨ y el ∧, tanto el caso de 1 y 2 v(A)=F

  Con esto hemos demostrado que v(A)=F, para cualquier fbf (que contenga sólo ∨ y ∧).