Trabajo Práctico Nro 11 Lógica de Predicados - Semántica

Ejercicio 1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de $x1, x2, x3$ en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde C = {c}, F = {f,g} , y P ={A}, con f de aridad 1; g de aridad 2, A de aridad 2. Determinar cual es una fbf abierta y cual es cerrada.

I. $\forall x_1 ((\exists x_2 A(x_1, f(x_2, x_3))) \rightarrow (\forall x_3 A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3)))$
II. $(\forall x_1 (\exists x_2 A(x_1, f(x_2, x_3)))) \rightarrow (\forall x_3 A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3))$

Las formulas anteriores fueron modificadas con respecto a como estaban escritas antes ya que era medio confusa, en la primera el alcance del cuantificador es toda la formula y en la segunda es solo la primer parte, entonces:
I. x1 esta ligada en toda la formula por el ∀x1
x2 está ligada por ∃x2.
x3 esta ligada en el lado derecho y no el izquierdo, por tanto la formula es abierta.
II. x1 y x2 esta ligados en lado izquierdo.
x3 esta ligada en la parte derecha y libre en la parte izquierda
x1 esta libre en la derecha
También es abierta esta formula.

Ejercicio 2. Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje.

¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de *A* en *I*? Fundamentar.

No, no es posible decidir el acerca del valor de verdad de A en I ya que faltaría una valoración de las variables libres para evaluar la formula.

Ejercicio 3. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

I. $(\forall x)P(x)$ $(\exists x)P(x)$

Imposible que sean lógicamente equivalentes porque una plantea que P es verdadera para todos los elementos del dominio y P para al menos uno.
Contraejemplo:
Sea el dominio U = {1,2} con:
I(P) = {1} -> P solo es verdadera para 1.
Entonces:

- ∀x P(x) es **falsa** (porque P(2) es falsa)
- ∃x P(x) es **verdadera** (porque P(1) es verdadera)
  Por tanto, **no son lógicamente equivalentes**.
  Domado

II. $(\exists x)(\exists y)Q(x, y)$ $(\exists y)(\exists x)Q(x, y)$

Si, son lógicamente equivalentes a simple vista ya que estos cuantificadores no están anidados y son conmutativos (Propiedad de los cuantificadores existenciales).

III. $(\exists x)(\forall y)R(x, y)$ $(\forall y)(\exists x)R(x, y)$

Por contra ejemplo tomando una interpretación I del dominio de los naturales:

- I(R(x,y)) = "x > y"
- Podemos ver que en esta interpretación no son lógicamente equivalentes, la primera sería falsa, y la segunda sería verdadera.

IV. $(\exists x)(S(x) \wedge T(x))$ $(\exists x)S(x) \wedge (\exists x)T(x)$

I(S(x)) = "x es par"
I(T(x)) = "x es impar"
Dominio de los naturales, la primera es falsa y la segunda es verdadera, no son lógicamente equivalentes.
No se cumple que haya un numero x que cumpla ambas condiciones pero si se cumple que hay al menos un x que cumple la primera y al menos otro que cumple la segunda.

V. $(\exists x)(S(x) \vee T(x))$ $(\exists x)S(x) \vee (\exists x)T(x)$

Los cuantificadores existenciales son distributivos en el or.

VI. $(\forall x)(S(x) \vee T(x))$ $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)T(x)$

I(S(x)) = "x es par"
I(T(x)) = "x es impar"
Dominio de los naturales.
Por contraejemplo, la primera formula es verdadera y la segunda no.

Ejercicio 4. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

- Conjunto de constantes: $C = \{c, u\}$
- Sin símbolos de función: $F = \varnothing$
- Conjunto de símbolos de predicado: $P = \{A\}$.

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(c) = 0$
- $I(u) = 1$
- $I(A(x, y)) =$ "$x \leq y$"

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Justificar las respuestas.

● $A(c, x)$ es satisfactible en I.
Si es satisfactible, ya que si valoras x con cualquier valor de x es verdadero.
● $A(u, x)$ es satisfactible en I.
Si es satisfactible, ya que si valoras x con 2 se hace verdadero, por tanto ya es satisfactible.
● $(\forall x)\ A(c, x)$ es satisfactible en I.
Si es satisfactible, ya que si valoras x con cualquier valor de x es verdadero.
● $(\forall x)\ A(u, x)$ es satisfactible en I.
No es satisfactible porque no siempre $A(u, x)$ es satisfactibles con cualquier valor de x.
● $A(c, x)$ es verdadera en I.
Si, se cumple para toda valoración dentro de la interpretación.
● $(\forall x)A(c, x)$ es lógicamente válida.
No, si nosotros tenemos una valoración que la haga falsa como $I(A(x, y)) = x >= y$, entonces esta interpretación no es verdadera.
● $A(u, c) \wedge \neg A(u, c)$ es contradictoria.
Si, tiene forma de una contradicción (p ^ ¬p)

Ejercicio 5. Ofrecer una interpretación donde las siguientes fórmulas sean todas verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

I. $(\forall x)\ P(x, x)$

- I(P(x, x)) = "x = x" esta interpretación es verdadera, "Para todo x, x es igual a x".

- I(P(x, x)) = "$x \neq$ x" esta interpretación es falsa, "Para todo x, x es distinto a x".

II. $\neg((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)))$

- I(P(x, y)) = "x = y", esta interpretación es falsa, "No es cierto que para todo x y para todo y, si x = y entonces y = x".
- I(P(x, y)) = "x > y", esta interpretación verdadera, "No es cierto que para todo x y para todo y, si x > y entonces y > x".

III. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(x, y) \land P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$

- I(P(x,y)) = "x > y", esta interpretación es verdadera, "Para todo x, y, z, si x es mayor que e y es mayor que z entonces x es mayor que z".
- I(P(x, y)) = "x ≠ y", esta interpretación es falsa, "Para todo x, y, z, si x es distinto de y e y es distinto de z entonces x es distinto de z".

IV. $(\forall x)P(c, x)$

- I(c) = 0
- I(P(c,x)) = "c <= x", esta interpretación es verdadera, "para todo x, 0 es menor igual que x"
- I(P(c,x)) = "c < x", esta interpretación es falsa, "para todo x, 0 es menor que x"

V. $(\forall x)P(x, f(x))$

- I(P(x,y)) = "x = u"
- I(f(x)) = "el sucesor de x" y esta interpretación es falsa, "Para todo x, x es igual sucesor de x".
- I(f(x)) = "x" y esta interpretación es verdadera, "Para todo x, x es igual a x".

Ejercicio 6. Determinar para cada una de las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden si son satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación, falsas en alguna interpretación, lógicamente válidas o contradictorias. Fundamentar

I. $(\forall x)P(x)$

Satisfactibles. Por ejemplo el dominio de los naturales, si P(x) = "x es par", es falsa. Pero si tu P(x) = "x es un numero".

II. $((\forall x)(\forall y)Q(x, y)) \rightarrow Q(x, y)$

Es lógicamente valida por su sintaxis, siempre que $((\forall x)(\forall y)Q(x, y))$ se satisface entonces $Q(x, y)$ también lo hace, o si $((\forall x)(\forall y)Q(x, y))$ no se satisface entonces la segunda parte no importa. En cualquier interpretación. Por consecuencia es satisfactibles y verdadera en todas interpretaciones.

III. $(\exists x)(\exists y)Q(x, y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)Q(x, y)$

Lógicamente valida, como antes se vio que son equivalentes en el punto 3, ambas formulas tendrán el mismo valor de verdad, o sea si una parte se satisface la otra también y por tanto siempre se satisface el completo.

IV. $Q(x) \rightarrow Q(x)$

Es lógicamente valido por su sintaxis, es una tautología lo que lo hace ser lógicamente valida (no siempre siendo lógicamente valida son tautologias pero si al revés).

V. $(\exists x)(\neg P(x)) \vee (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

Es lógicamente válido, el Q(x) esta de adorno, Si la primera parte no es satisfactibles entonces lo es la segunda parte.

Ejercicio 7. Determinar si las siguientes fbfs son (o no) lógicamente válidas o contradictorias.

Fundamentar en cada caso.

I. $((\forall x)\ (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow ((\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)\ Q(x))$

No es ningún caso, ni valida ni contradictoria. No porque todas las x de una interpretación cumplan P o Q, todas cumplen P o todas cumplen Q, puede ser que ocurra pero no siempre.

- Satisfactibles
  Dominio: {1, 2}
  P(1) = verdadero, Q(1) = verdadero
  P(2) = verdadero, Q(2) = falso
- No se satisface
  Dominio: {1, 2}
  P(1) = verdadero, Q(1) = falso
  P(2) = falso, Q(2) = verdadero

II. $P(x, y) \rightarrow P(x, y)$

Lógicamente valida, puesto que es una tautologia, por sintaxis.

III. $P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)\ (P(x, y))$

No es ningún caso, ni valida ni contradictoria, la primera parte puede ser satisfactibles, pero no necesariamente para todo x y para todo y, o si.

- Satisfactibles:
  Dominio: {1, 2}
  P(1,1) = verdadero
  P(1,2) = verdadero
  P(2,1) = verdadero
  P(2,2) = verdadero
- No se satisface:
  Dominio: {1, 2}
  P(1,1) = verdadero
  P(1,2) = falso
  P(2,1) = falso
  P(2,2) = falso

Ejercicio 8. Si la fbf $P(x)$ es satisfactible, ¿entonces la fbf $(\exists x)\ P(x)$ es lógicamente válida?.

Fundamentar.
No, por contra ejemplo, si la fbf P(x) no necesariamente se cumple que la fbf $(\exists x)\ P(x)$ es lógicamente valida:

- $P(x)$ = "x es par".
- Satisfactibles
- $P(x)$ = "x < 0". No se satisface nunca. No es lógicamente valida.