Trabajo Práctico Nro 9

Sistema Formal L – Cheatsheet

Axiomas del sistema L

- **L1:** `A → (B → A)`
- **L2:** `(A → (B → C)) → ((A → B) → (A → C))`
- **L3:** `((¬A → ¬B) → (B → A))`

Regla de Inferencia

- **Modus Ponens (MP)**
  Si `A` y `A → B`, entonces `B`.

Teoremas Utilizables

- **Silogismo Hipotético (SH)**
  De `A → B` y `B → C`, se deduce `A → C`.
- **Metateorema de la Deducción**
  Si `Γ ∪ {A} ⊢L B`, entonces `Γ ⊢L (A → B)`.

Ejercicio 1. Dada la siguiente demostración sintáctica válida en L:

1. $(((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p))$
2. $((\neg p) \to (\neg(q \to r)))$
3. $((q \to r) \to p)$

a) Identificar el conjunto Γ con menor cantidad de fórmulas bien formadas (fbfs) y la fórmula A tal que Γ⊦ . Indicar, si es posible, que axioma, hipótesis o regla de L A inferencia fue aplicado en cada paso de la demostración.

1. $(((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p))$
   Axioma en mi opinión

- `A := p`
- `B := (q → r)`

- L3: `((¬A) → (¬B)) → (B → A)`
  Literalmente un paso, lo usa para modus poens en el paso 3.

2. $((\neg p) \to (\neg(q \to r)))$
   Acá habría que sumar una FBF porque tiene que ser una hipótesis.
3. $((q \to r) \to p)$ modus poens, el paso 2 es A y el paso 1 es B en el modus poens.

b) ¿Es A un teorema de L? Justificar.

A priori no porque se uso una hipótesis en la demostración no es un teorema.

c) ¿Es A tautología? Justificar.

No. Como A no es un teorema entonces no es una tautologia.

Ejercicio 2. Sean A, B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

Ayuda: es posible utilizar, si es necesario, propiedades ya demostradas en el libro de Hamilton, como por ejemplo, metateorema de la Deducción, silogismo hipotético (SH), y otros teoremas ya demostrados en el libro (ver prop 2.11a y prop 2.11b).

I. $\vdash L\ (((\neg A) \to A) \to A)$

Es un ejemplo del libro 2.11b y ya esta demostrado. Usando el meta teorema de la deducción.
Pero los pasos para hacerlo son:

Demostración: ((*a*) apareció en el ejemplo 2.7, pero lo incluimos aquí para ilustrar la simplificación resultante del uso de la nueva regla *SH*.)

Ad (*a*):

(1)	$(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B}))$	(L1)
(2)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$	(L3)
(3)	$(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$	(1), (2) *SH*

Ad (*b*):

(1)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$	hipótesis
(2)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\sim\mathscr{A}))$	(L1)
(3)	$(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\sim\mathscr{A})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$	(L3)
(4)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})))$	(2), (3) *SH*
(5)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})))\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow$ $(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})))$	(L2)
(6)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$	(4), (5) *MP*
(7)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$	(1), (6) *MP*
(8)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$	(L3)
(9)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A}$	(7), (8) *MP*
(10)	$\mathscr{A}$	(1), (9) *MP*

Entonces se prueba que $(\neg A) \rightarrow A) \vdash L\ A$ y por teorema de la deducción $\vdash L\ ((\neg A) \rightarrow A)\text{->}A)$

II. $\vdash L\ (((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow (((\neg B) \rightarrow A) \rightarrow B))$

Paso	Resultado	Aplicación	
1	$((\neg B) \rightarrow (\neg A))$	Hipotesis	
2	(((¬B) → (¬A)) → (A → B))	Axioma L3	
3	(A → B)	MP 1 y 2	
4	$((\neg B) \rightarrow A)$	Hipotesis	
5	$((\neg B) \rightarrow$ B)	SH entre 3 y 4	
6	$(((\neg B)\text{->}B)\text{->}B)$	Teorema 2.11b	
7	B	MP 5 y 6	Objetivo 2

Explicación:

1. Hipótesis $((\neg B) \rightarrow (\neg A))$
   - *Agarramos el cachito que esta al lado izquierdo del entonces, suele ser algo util.*
2. L3 $(((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow B)))$
   - *Reescribimos el axioma para que B este en el lugar de A y viceversa, esto hacer que L3 tenga la hipótesis de (1) este al inicio*
3. MP entre 1 y 2, $A \rightarrow B$

- *Modus ponens, tomamos que $A = ((\neg B) \to (\neg A))$ y $A \to B = (((\neg B) \to (\neg A)) \to ((A \to B)))$.*

4. Hipótesis $((\neg B) \to A)$
   - *Acá no podes hacer nada más así que tomas la siguiente parte a la izquierda del entonces pero de la derecha.*
5. Silogismo entre 4 y 3, $(\neg B) \to B$
   - *Si de $(\neg B) \to A$ y de $A \to B$ entonces $(\neg B) \to B$*
6. Propiedad libro **((¬B → B) → B)**
   - *Los teoremas ya probados son instanciados como los axiomas.*
7. MP entre 5 y 6, B
   - *A=$(\neg B) \to B$ y A->B=**((¬B → B) → B)***
   Con esto nos queda $\{((\neg B) \to (\neg A)), ((\neg B) \to A)\} L$ B
   Aplicamos 2 veces Teorema de la deducción y queda el resultado pedido

III. $\{((A \to B) \to C), B\} \vdash L\ (A \to C)$

Paso	Resultado	Aplicación	
1	B	Hipotesis	Ya que la tengo la pongo
2	$((A \to B) \to C)$	Hipótesis	Ya que la tengo la pongo
3	A	Hipótesis	Después la saco con teorema de deducción
4	(B → (A → B))	L1	L1 pero con B y A intercambiados
5	(A → B)	MP 4 y 1	Como tengo B por hipotesis, tengo A ->B por el L1 reescrito
6	C	MP 5 y 2	Como tengo $(A \to B)$ y $((A \to B) \to C)$ entonces por MP C se consigue
7	(A → C)	Teorema	Teorema de la deducción

Ejercicio 3. Sea Γ un conjunto de fbfs del sistema formal . Se sabe que Γ$\vdash A$ ¿Es cierto que para todo Γi tal que Γ $i \subset$ Γ;Γ $i \vdash L\ A$?. Fundar.

No es cierto, por contra ejemplo:

- Γ = {P → Q, P}
- A = Q
  No se puede probar A, ya que para hacer modus poens con P -> Q necesito P, y viceversa.

Ejercicio 4. Sea A una fbf y Γ un conjunto de fbfs. Si se cumple Γ$\vdash L\ A$, ¿Es cierto que vale $\vdash L\ A$ para todo A y

para todo Γ? Justificar.

Si se cumple que Γ$\vdash L$ A eso no implica que $\vdash L$ A (que sea teorema), contra ejemplo:
Si Γ= P entonces se cumple por identidad Γ⊢LP, sin embargo
Γ={} y ⊢LP no se cumple porque no hay información, no es teorema.

Ejercicio 5. Determinar si las siguientes afirmaciones son válidas o no en el sistema formal L. Justificar en cada caso.

I. $\{q\} \vdash L\ (p \rightarrow q)$

Paso	Resultado	Aplicación
1	q	Hipotesis
2	p	Hipotesis
3	(q -> (p -> q))	L1
4	p -> q	MP 1 y 3
5	q	MP 2 y 4
6	p -> q	Teorema de la deducción

II. $\{p \rightarrow q\} \vdash L\ (q)$

Por intuición no se puede resolver porque no hay con que hacer MP a simple vista para sacar q, falta p en las hipótesis.

Ejercicio 6. Sean A, B y C fbfs del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que Γ ∪ $\{A, B\} \vdash$ L C y también se sabe que . Γ$\vdash L$ A.

I. ¿Es cierto que Γ$\vdash L\ (C \rightarrow B)$? Justificar.

Si aplicamos teorema de la deducción entonces sacaremos que Γ$\vdash L\ (C \rightarrow B)$ es equivalente a {C} ∪ Γ$\vdash L\ (B)$, como esto no es equivalente a Γ ∪ $\{A, B\} \vdash$ L C o a Γ$\vdash L$ A no podemos afirmar que es cierto.
Lo anterior es una suposición así q vamos a probarlo con un contra ejemplo:
Información:

- Γ$\vdash L$ A
- Γ ∪ $\{A, B\} \vdash$ L C = Γ ⊦ L (A→(B→C)) = Γ ⊦ L (B→(A→C))
  En base a esta supongamos que tenemos un gamma que si SABEMOS que contiene la información anterior:

$\{(A \to (B \to C)), (B \to (A \to C)), A\} \vdash L\ (C \to B)$

Esencialmente nos preguntamos si con la información que sabemos que es cierta si C→B se puede deducir.

Por meta teorema de la deducción:

$\vdash L\ (A \to ((A \to (B \to C)) \to ((B \to (A \to C)) \to (C \to B))))$

Suponiendo que A = p y B = q y que C = r:

p	q	r	(p → ((p → (q → r)) → ((q → (p → r)) → (r → q))))
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Dado que la formula no es un tautología, esto es un contraejemplo de donde no se cumple lo que nos piden justificar y por tanto no hay información suficiente para decir que $\Gamma \vdash L\ (C \to B)$.

II. ¿Es cierto que ⊢(A) ? Justificar.

No se podría afirmar porque no sabemos si el $\Gamma \vdash L$ A se refiere a conjunto vacío, si Γ fuera conjunto vacío ahí entonces si sería cierto ⊢(A). Probado el en punto 4.

Ejercicio 7. ¿Es el sistema formal L decidible? Justificar. Ayuda: si es decidible, debería ser posible determinar (decidir) para cada fbf, si es o no teorema de L.

El sistema formal L es decidible:

- Decidible en cuanto a si una formula es teorema o no.
- Si una formula es teorema entonces es tautologia.
- Usando tablas de verdad, podemos en una cantidad limitada de pasos y siempre terminar resolviendo de una fórmula es una tautologia y por lo tanto un teorema del sistema.
  Por otro lado:
- No sé si se puede aplicar lo de hacer axiomas y eso de forma mecánica en una serie de pasos, eso se ve más difícil.