# Trabajo Práctico Nro 7

# Ejercicio 1. Responder breve y claramente:

## a. ¿Por qué en la complejidad espacial se utilizan MT con una cinta de entrada de sólo lectura?

- **No contar el tamaño de la entrada como espacio ocupado**:
  Si se permitiera escribir en la cinta de entrada, esta podría ser utilizada como memoria auxiliar, lo que distorsionaría la verdadera medida del espacio **adicional** necesario para resolver el problema.
- **Permitir análisis más fino (espacio sub-lineal)**:
  Si se cuenta solo el espacio utilizado **más allá de la entrada**, es posible definir y estudiar clases como **LOGSPACE** (O(log n)) o **PSPACE** (poly(n)). Estas serían imposibles si la entrada ya contara como espacio usado.
- **Modelo robusto y estandarizado**:
  Este enfoque permite comparaciones justas entre algoritmos y garantiza que el análisis se enfoque solo en la memoria "de trabajo", sin contaminar la métrica con el tamaño del input.

## b. ¿Por qué si una MT tarda tiempo poly(n) entonces ocupa espacio poly(n), y si ocupa espacio poly(n) puede llegar a tardar tiempo exp(n)?

- Una MT **no puede usar más espacio del que le da tiempo a visitar**.
- En cada paso del cómputo, como mucho puede **mover su cabezal una celda** (por cinta).
  Por lo tanto, si **el número total de pasos es acotado por un polinomio T(n)**, entonces la MT **no puede visitar más de T(n) celdas**.
- Aunque el espacio sea **S(n) = poly(n)**, la MT puede:
  Explorar distintas combinaciones de contenido en esas celdas.
  Cambiar estado muchas veces.
  Visitar combinaciones distintas en un **espacio de configuraciones** enorme. Exponencial.

## c. ¿Por qué los lenguajes de la clase LOGSPACE son tratables?

De antes: espacio S(n) implica tiempo c^S(n) , con c constante
En particular: espacio log2n implica tiempo c^log2n , con c constante
Pero: c log2n = n log2c , con c constante, es decir poly(n)
Por lo tanto: espacio log2n implica tiempo poly(n)

Extracto de la teoría, es decir el mayor tiempo posible para un espacio logarítmico es una constante elevado al logaritmo, hacemos unos truquitos y nos queda n elevado a una constante lo cual nos da polinomial.

# Ejercicio 2. Describir la idea general de una MT M que decida el lenguaje L = {a^nb^n | n >= 1} en espacio logarítmico. Ayuda: basarse en el ejemplo mostrado en clase.

Es una maquina con 4 cintas + cinta de entrada:

1. Cinta 1 hacemos i = 1
2. Cinta 2 hacemos j = n, si es impar rechaza.
3. Copia el símbolo i de w en la cinta 3.
4. Copia símbolo de j en la cinta 4.
5. Si i = j-1: Si los símbolos son distintos acepta, sino rechaza.
   - Si i != j si los símbolos son iguales rechaza.
6. Hace i++.
7. j--
8. Vuelve paso 3.
   El espacio es logarítmico, puesto que los contadores i y j en el peor caso llegan a ser n, y en binario miden O(log2(n)).

# Ejercicio 3. Describir la idea general de una MT M que decida el lenguaje SAT en espacio polinomial. Ayuda: la generación y la evaluación de una asignación de valores de verdad se pueden efectuar en tiempo polinomial.

Una MT que decide SAT:

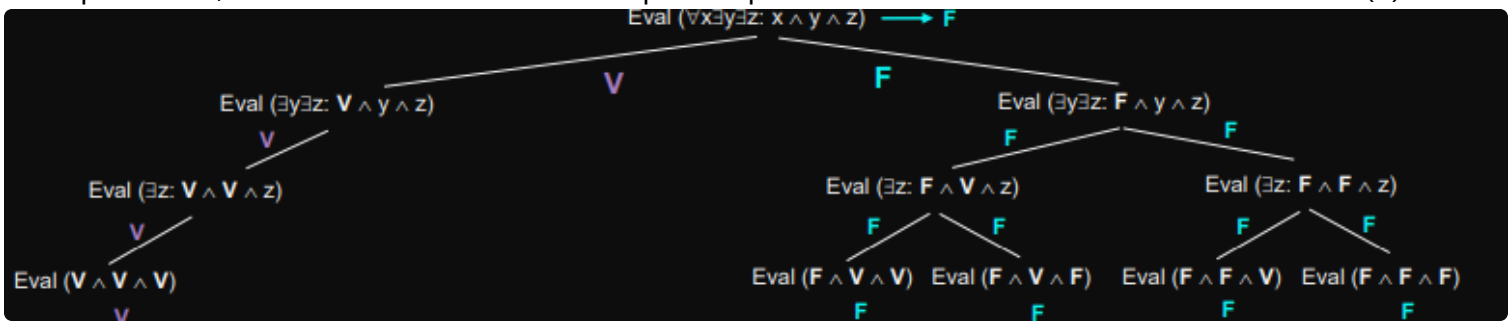
- 2^N posibles asignaciones de valores de las variables.
- Simulamos cada posible combinación.
- La longitud de esta combinación es n (cantidad de variables de SAT)
- Si simulamos cada una de estas combinaciones, en su propia cinta o reutilizamos una cinta y simulamos uno por 1, el máximo espacio que va a ocupar es n.
  MT:

1. i = 1
2. Generamos la i-esima asignación para las n variables de w en una cinta, en tiempo polinomial por tanto ocupa espacio polinomial.
3. Verificamos la formula es verdadera, se hace en tiempo polinomial, por tanto ocupa espacio polinomial.
   1. Si es verdadera MT para y acepta.
   2. Si no es verdadera, aumenta contador y se reutiliza el espacio, y volvemos al punto 2.

3. Si no es satisfactoria e i = 2^n la mt para y rechaza.
El contador binario, que estaría en su propia cinta ocuparía como máximo O(log2(2^n)) = O(n) y la asignación de variables tiene O(n). Por lo tanto SAT ∈ PSPACE.

# Ejercicio 4. Justificar por qué el lenguaje QSAT no pertenecería a P ni a NP. Ayuda: ¿qué forma tienen los certificados asociados a QSAT?

QSAT∈ PSPACE, QSAT = {φ | φ es una fórmula booleana con cuantificadores, no tiene variables libres, y es verdadera}.
Por ejemplo:
(∀x∃y∃z: x ^ y ^ z) -> Es una formula falsa.
La prueba de porque QSAT ∈ PSPACE y por tanto no a P ni NP es la función eval:
En el peor caso, cada rama de la recursión requerida para evaluar todas las rutas es de tamaño O(n):




Como vemos, el tamaño de máximo de las ramas coincide con la entrada:

- Podemos reutilizar ramas, por tanto el tamaño máximo no es exp(n).
- El tamaño de cada instancia, es O(n) -> datos necesarios como valores asignados, y otras cosas.
- Por tanto el orden O(n^2).
  Los certificados por otro lado no son sucintos (son arboles), así que ni estaría en NP.

# Ejercicio 5. Probar que NP ⊆ PSPACE. Ayuda: Si L pertenece a NP, entonces existe una MT M1 capaz de verificar en tiempo poly(|w|) si una cadena w pertenece a L, con la ayuda de un certificado x de tamaño poly(|w|). De esta manera, existe también una MT M2 que decide L en espacio poly(|w|), sin la ayuda de ningún certificado.

NP es subconjunto de PSPACE:

- Cualquier problema de NP se puede resolver en tiempo poly(|w|) con una entrada del problema y un certificado con tamaño poly(|w|).
- Todos los posibles certificados del lenguaje L que pueden ser chequeados por M1 son k^(p(|w|) (K siendo el tamaño del alfabeto)

- MT 2 entonces lo que es:
  1. Genero certificado en orden.
  2. Lo verifico simulando M1 en el certificado
     1. Si falla aumento algún contador y vuelvo a generar el certificado.
     2. Si es correcto termine.
     3. Si falla y el contador = k^(p|w|)
- Si cada vez que generamos un certificado reutilizamos el espacio del anterior, el espacio máximo ocupado esta en O(poly|w|) porque el tamaño máximo del certificado es poly(|w|).
- En conclusión, NP ⊆ PSPACE porque existe una MT2 que genera todos los certificados uno por uno y los verifica, la tarea solo requiere en el peor caso O(poly|w|) para el espacio si reutilizamos el espacio ya usado.

## Ejercicio 6. Supongamos que existe una MT M de tiempo polinomial que, dado un grafo G, devuelve un circuito de Hamilton de G si existe o responde no si no existe. Describir la idea general de una MT M´ que, utilizando M, decida en tiempo polinomial si un grafo G tiene un circuito de Hamilton. Ayuda: basarse en el ejemplo mostrado en clase con FSAT y SAT.

- CH problema de decisión
- FCH problema de búsqueda
- Ambos CH y FCH le entra un grafo
- Tenemos una MT M que resuelve FCH
- M' entonces hace lo siguiente:
  - Recibe un grafo G
  - Ejecuta M sobre G
    - Si devuelve un circuito M' acepta
    - Si devuelve no M' rechaza
- M es polinomial, porque M' también lo es, la verificación es trivial.

## Ejercicio 7. Sea la MTP M que definimos en clase para decidir probabilísticamente el lenguaje MAYSAT = {φ | φ es una fórmula booleana satisfactible por más de la mitad de las posibles asignaciones de verdad}. Hemos indicado que para toda φ, si φ ∈ MAYSAT entonces M la acepta con probabilidad > 1/2, y si φ ∉ MAYSAT entonces M la rechaza con probabilidad >= 1/2. Precisando más la primera probabilidad: asumiendo que M tarda

## p(n), si φ ∈ MAYSAT entonces M la acepta con probabilidad >= 1/2 + 1/2p(n). Explicar por qué. Ayuda: en tiempo p(n), M puede producir 2p(n) computaciones posibles, y entonces, ¿cuántas son de aceptación como mínimo si φ ∈ MAYSAT?

1. **Lenguaje MAYSAT**:
   - Es el conjunto de fórmulas booleanas ϕ que son satisfechas por **más de la mitad** de las posibles asignaciones de verdad.
   - Ejemplo: Si una fórmula tiene n variables, hay 2^n asignaciones posibles. Si más de 2^(n−1) la satisfacen, entonces ϕ∈MAYSAT.
   - Maquina MTP M la resuelve con alta prob si la cadena esta en MAYSAT.
   - M se ejecuta a lo sumo en p(n) tiempo.
   - M puede generar hasta 2^p(n) ramas computacionales.
2. Debemos explicar: Por que si se tarda poly(n) en resolver, porque cambia la posibilidad de aceptar si la cadena pertenece:
   1. **Número de ramas computacionales**:
      - La máquina M ejecuta como máximo p(n) pasos
      - En cada paso puede bifurcarse en 2 opciones
      - Total de ramas posibles: 2^p(n)
   2. **Caso φ ∈ MAYSAT**:
      - Más de la mitad de las asignaciones satisfacen φ
      - Por lo tanto, más de la mitad de las ramas deben aceptar
      - El mínimo número de ramas de aceptación es: 2^{p(n)-1} + 1
        Probabilidad de aceptación = (N° ramas que aceptan) / (Total ramas)
        ≥ (2^{p(n)-1} + 1) / 2^{p(n)}
        = 1/2 + 1/2^{p(n)}

# Ejercicio 8. Considerando el ejemplo de computación cuántica mostrado en clase, indicar los resultados posibles cuando en lugar de arrancar con el estado inicial 00, la computación arranca con:

a. El estado inicial 01.
Puerta de hadamard sobre el primer cúbit-> 11 | 01
Puerta CNOT sobre los 2 cubits -> 10 | 01
Lectura del registro -> 10 | 01 estado final

b. El estado inicial 10.
Puerta de hadamard sobre el primer cúbit-> 10 | 00

Puerta CNOT sobre los 2 cubits -> 11 | 00
Lectura del registro -> 11 | 00 estado final

c. El estado inicial 11.
Puerta de hadamard sobre el primer cúbit-> 11 | 01
Puerta CNOT sobre los 2 cubits -> 10 | 01
Lectura del registro -> 10 | 01 estado final