

Cadeias de Markov com Python

Material disponível em <https://medium.com/@leandrocruvinel/cadeias-de-markov-com-python-ef27b3f21fc7>

Cadeias de Markov são modelos que descrevem uma sequência de eventos dos quais a probabilidade da ocorrência de cada evento, depende apenas da ocorrência anterior e não de toda sequência. A seguir veremos um famoso exemplo que ilustra bem este processo.

Na verdade, cadeias de Markov são processos um pouco mais gerais. Neste tutorial, por simplicidade, trabalharemos apenas as Cadeias de Markov de ordem 1.

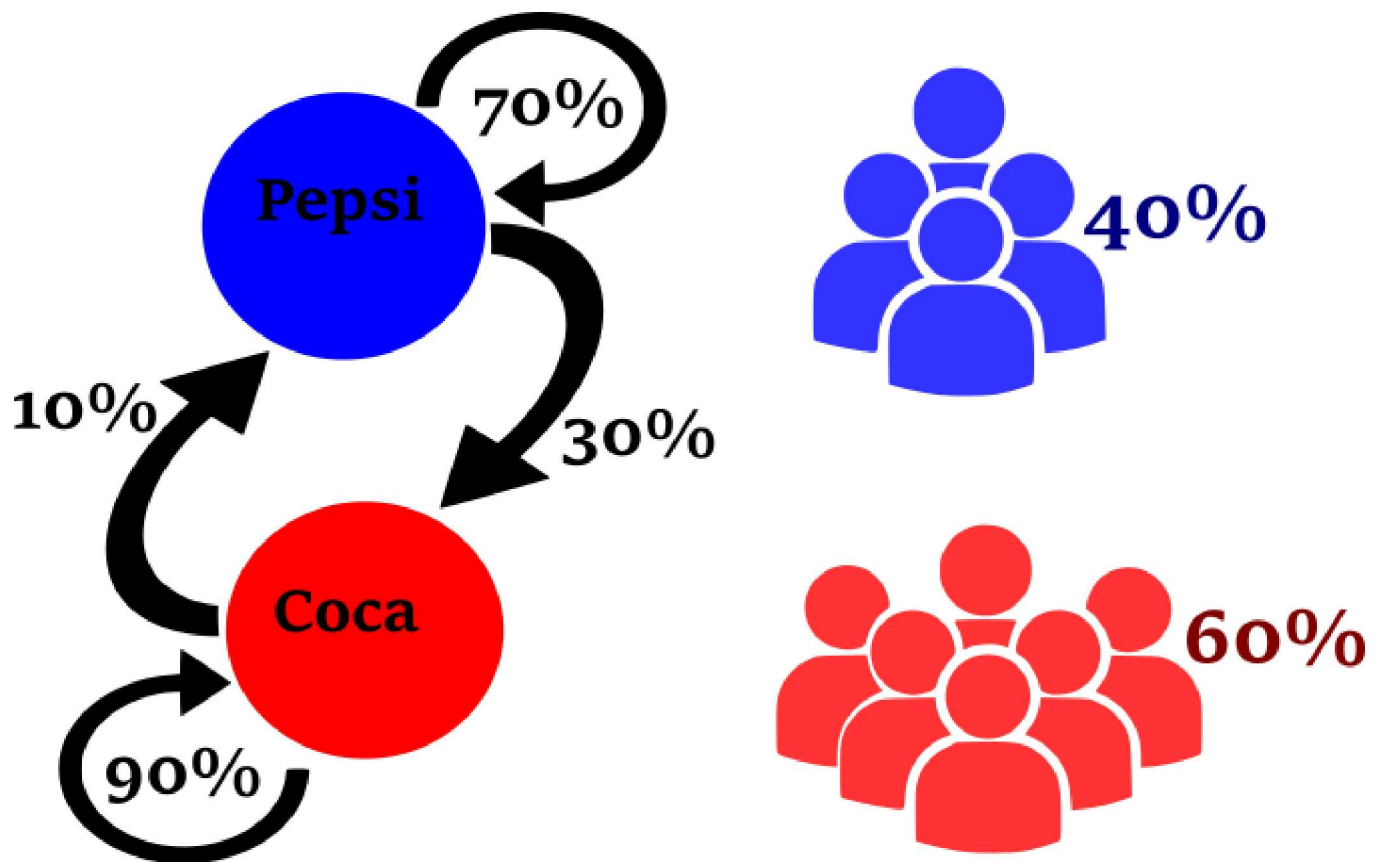
▼ Coca vs Pepsi

Suponha que determinada pessoa, ou um grupo de pessoas, só bebe Coca ou só bebe Pepsi numa determinada semana, além de seguir as seguintes regras:

- Bebe apenas uma lata por semana.
- Se bebeu Pepsi em uma determinada semana, na próxima semana beberá Pepsi com probabilidade de 70% ou beberá Coca com probabilidade de 30%. Essas probabilidades são fixas na sequência de eventos.
- Se bebeu Coca em uma determinada semana, na próxima semana ele beberá Pepsi com probabilidade de 10% ou beberá Coca com probabilidade de 90%. Essas probabilidades também são fixas.

Os números nesse exemplo são fictícios. Além disso, as probabilidades no mundo real são alteradas por campanhas de marketing e outros eventos. O exemplo acima é simplesmente para entender como as cadeias de Markov funcionam. Considere a seguinte pergunta:

Supondo que, nessa semana, 40% de um grupo de pessoas bebem Pepsi e 60% bebem Coca. Qual a porcentagem provável de pessoas, desse mesmo grupo, que beberão Coca na semana seguinte?



Em forma matricial, podemos representar esse processo do seguinte modo:

		Semana atual		Grupo na semana atual
		Pepsi	Coca	
Próxima Semana	Pepsi	0.7	0.1	0.4
	Coca	0.3	0.9	0.6

Denotando por P_i e C_i os eventos de pessoas bebendo Pepsi e Coca na semana i , respectivamente.

$$p(P_{i+1} | P_i) = 0.7$$

$$p(C_{i+1} | P_i) = 0.3$$

$$p(P_{i+1} | C_i) = 0.1$$

$$p(C_{i+1} | C_i) = 0.9$$

Então, temos as seguintes propriedades:

Pelo Teorema de Bayes, temos:

$$p(P_{i+1}) = p(P_{i+1} | P_i)p(P_i) + p(P_{i+1} | C_i)p(C_i)$$

$$p(C_{i+1}) = p(C_{i+1} | P_i)p(P_i) + p(C_{i+1} | C_i)p(C_i)$$

Para o nosso exemplo, supondo que essa semana seja a semana 1 e a semana seguinte seja a

$$\begin{aligned} p(P_2) &= p(P_2 | P_1)p(P_1) + p(P_2 | C_1)p(C_1) \\ &= 0.7 * 0.4 + 0.1 * 0.6 \\ &= 0.34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(C_2) &= p(C_2 | P_1)p(P_1) + p(C_2 | C_1)p(C_1) \\ &= 0.3 * 0.4 + 0.9 * 0.6 \\ &= 0.66 \end{aligned}$$

semana 2:

Logo, é provável que 66% das pessoas no grupo tomem Coca na semana seguinte. Observe a segunda igualdade de cada uma das expressões acima. Elas são obtidas da multiplicação da matriz de probabilidades pelo vetor de porcentagens do grupo na semana atual:

		Semana atual		*	Grupo na semana atual	=	Grupo na semana seguinte
		Pepsi	Coca				
Próxima Semana	Pepsi	0.7	0.1		0.4 0.6		0.34 0.66
	Coca	0.3	0.9				

Isso quer dizer que, para encontrar as porcentagens após duas semanas, basta multiplicar a matriz de probabilidades duas vezes!

		Semana 2		*	Grupo na semana 2	=	Grupo na semana 3
		Pepsi	Coca				
Semana 3	Pepsi	0.7	0.1		0.34 0.66		0.304 0.696
	Coca	0.3	0.9				

Para conferir as contas acima, usaremos Python e a biblioteca numpy:

```
# importando numpy
import numpy as np

# definindo a matriz
# probabilidades semana 1

M1 = np.array([
    [0.7, 0.1],
    [0.3, 0.9]
])

# calculando a matriz
# probabilidades semana 2

M2 = np.linalg.matrix_power(M1, 2)

# definindo grupo
# semana 1
grupo_semana1 = np.array([
    [0.4],
    [0.6]
])
```

```
# calculando grupo
# semana 3
grupo_semana3 = np.matmul(M2, grupo_semana1)
print(grupo_semana3)
```

```
[[0.304]
 [0.696]]
```

De forma geral, para descobrirmos como estará a preferência dos usuários na 11ª semana, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

O código nesse caso fica:

```
# importando numpy
import numpy as np

# definindo a matriz
# probabilidades semana 1

M1 = np.array([
    [0.7, 0.1],
    [0.3, 0.9]
])

# calculando a matriz
# probabilidades semana 10

M10 = np.linalg.matrix_power(M1, 10)

# definindo grupo
# semana 1
grupo_semana1 = np.array([
    [0.4],
    [0.6]
])

# calculando grupo
# semana 11
grupo_semana11 = np.matmul(M10, grupo_semana1)
```

```
print(grupo_semana11)
```

```
[[0.25090699]  
 [0.74909301]]
```

E temos nossa resposta:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Caso queria saber a probabilidade de um único indivíduo beber Coca na 11ª semana, dado que nessa semana (semana 1) ele bebeu Pepsi, basta considerar o grupo com um só indivíduo e trocar (0.4, 0.6) por (1,0).