Применение фильтра Калмана в макроэкономике

Модель с ненаблюдаемыми компонентами (1)

Типичное применение модели с ненаблюдаемыми компонентами (Unobserved-components model) - декомпозиция логарифма реального ВВП на две независимых компоненты: стохастический тренд и цикл.

$$y_t = y_{1t} + y_{2t} \tag{1}$$

$$y_{1t} = \delta + y_{1,t-1} + e_{1t} \tag{2}$$

$$y_{2t} = \phi_1 y_{2,t-1} + \phi_2 y_{2,t-2} + e_{2t} \tag{3}$$

$$e_{it} \sim N(0, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2$$

$$E[e_{1t} e_{2s}] = 0 \quad \text{для всех } t \text{ и } s$$

где корни уравнения $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = 0$ лежат вне единичного круга.

Модель с ненаблюдаемыми компонентами (2)

Обычно существует несколько вариантов, как именно возможно записать динамическую систему в виде модели пространства состояний. В данном случае в зависимости от того, какая из переменных (y_{1t}, y_{2t} или обе) рассматривается как переменная состояния, мы получаем три различных представления.

- Представление 1: y_{1t} является переменной состояния
- Представление 2: y_{2t} является переменной состояния
- Представление 3: y_{1t} и y_{2t} являются переменными состояния

- **Представление 1.** Рассматриваем y_{2t} как ненаблюдаемую переменную. Нужно трансформировать модель так, чтобы исключить y_{1t}. Для этого возьмем первую разность в уравнении 1 и построим уравнения измерения и перехода на базе трансформированной модели:

Модель с ненаблюдаемыми компонентами (3)

$$\Delta y_t = \Delta y_{1t} + \Delta y_{2t} \Rightarrow \Delta y_t = \delta + \Delta y_{2t} + e_{1t} \tag{4}$$

Measurement equation

$$\Delta y_t = \delta + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + e_{1t} \tag{5}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{2,t-1} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

- **Представление 2.** Предположим, мы считаем y_{1t} ненаблюдаемой переменной состояния. В этом случае мы модифицируем базовую модель таким образом, чтобы исключить y_{2t}. Для этого домножим 1 на $(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)$:

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)y_t=(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)y_{1t}+$$
$$+(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)y_{2t}\Rightarrow$$
$$y_t=(\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+(y_{1t}-\phi_1 y_{1,t-1}-\phi_2 y_{1,t-2})+e_{2t}$$

Модель с ненаблюдаемыми компонентами (5)

Measurement equation

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{1,t-2} \end{bmatrix} + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + e_{2t} \tag{7}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{1,t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{1,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Модель с ненаблюдаемыми компонентами (6)

- **Представление 3.** Предположим, мы считаем обе переменные y_{1t} и y_{2t} ненаблюдаемыми переменными состояния. В этом случае мы включаем обе переменные в вектор состояния.

Measurement equation

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2,t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Из Nelson and Plosser (1982) следует, что большая часть дисперсии годового реального ВНП приходится на нестационарный тренд и лишь маленькая часть - на стационарную циклическую компоненту. Clark(1987) применяет UCM для оценки важности стохастического тренда и стационарной циклической компоненты в экономической активности.Проанализируем модель Clark (1987) для более новых данных. Данные: реальный ВВП поквартально (со 2 кв. 1947 по 3 кв. 1995).

Декомпозиция реального ВВП и уровня безработицы(2)

$$\begin{aligned} y_t &= n_t + x_t \\ n_t &= g_{t-1} + n_{t-1} + \upsilon_t \\ g_t &= g_{t-1} + \omega_t \\ x_t &= \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + e_t \end{aligned} \tag{11}$$

$$\upsilon_t \sim N(0, \sigma_\upsilon^2) \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2) \quad e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$$

где y_t -логарифм реального ВВП, n_t-стохастический тренд, n_t-стационарная циклическая компонента

Существует, как минимум, три возможных представления системы в виде модели пространства состояний. Выберем Представление 3.

Measurement equation

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_t \\ x_t \\ x_{t-1} \\ g_t \end{bmatrix} \tag{12}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} n_t \\ x_t \\ x_{t-1} \\ g_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{t-1} \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ g_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_t \\ e_t \\ 0 \\ \omega_t \end{bmatrix} \tag{13}$$

Предположим, что безработица также имеет нестационарную и стационарную компоненты:

$$\begin{aligned} u_t &= l_t + c_t \\ l_t &= l_{t-1} + \nu_t \\ c_t &= \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \epsilon_t \\ \nu_t &\sim N(0, \sigma_\nu^2) \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2), \end{aligned} \tag{14}$$

где l_t - тренд, c_t - стационарная компонента, по предположению, являющаяся функцией текущей и прошлой случайной компоненты реального выпуска. Комбинирование систем 11 и 14 дает следующую модель пространства состояний:

Measurement equation

$$\begin{bmatrix} y_t \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_t \\ x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ g_t \\ l_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_t \end{bmatrix} \tag{15}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} n_t \\ x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ g_t \\ l_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{t-1} \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ x_{t-3} \\ g_{t-1} \\ l_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_t \\ e_t \\ 0 \\ 0 \\ \omega_t \\ \nu_t \end{bmatrix} \tag{16}$$

Оценка модели с ненаблюдаемыми компонентами

- Результаты оценки в одномерной и двумерной UC-моделях

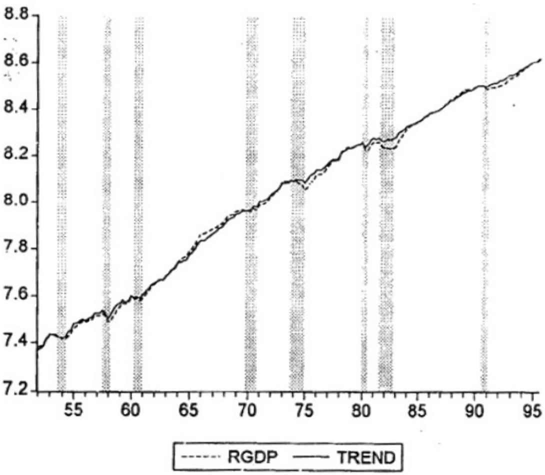
Table 3.1
Estimates of the unobserved components model of real GDP (1952:I–1995:III)

Parameters	Univariate model		Bivariate model	
σ_v	0.0056	(0.0013)	0.0049	(0.0006)
σ_e	0.0061	(0.0013)	0.0067	(0.0006)
σ_w	0.0002	(0.0002)	0.0003	(0.0002)
ϕ_1	1.5346	(0.1501)	1.4386	(0.0791)
ϕ_2	−0.5888	(0.1155)	−0.5174	(0.0569)
α_0	—		−0.3368	(0.0497)
α_1	—		−0.1635	(0.0310)
α_2	—		−0.0720	(0.0054)
$\sigma_{v\ell}$	—		0.0015	(0.0003)
σ_{ec}	—		0.0003	(0.0003)
Log likelihood	578.52		1566.99	

Note: Standard errors are in parentheses.

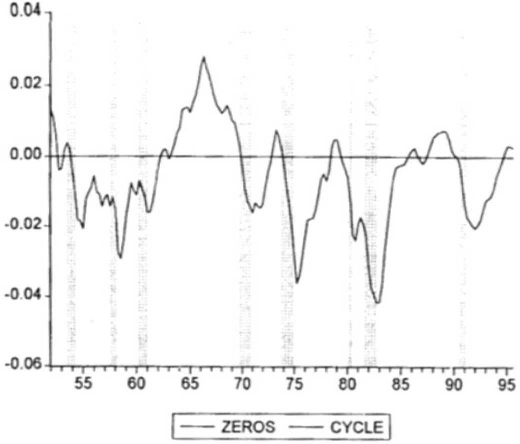
Реальный ВВП и его тренд (1)

- Одномерная UC-модель

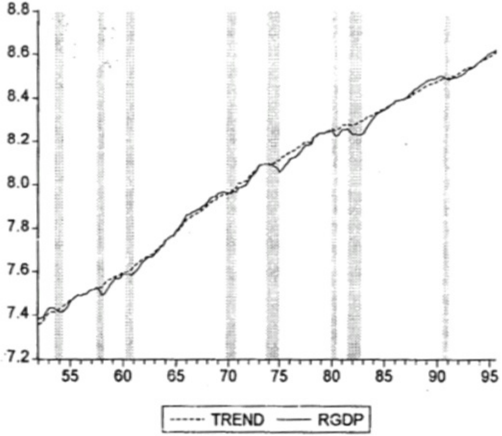


Циклическая компонента реального ВВП (1)

- Одномерная UC-модель

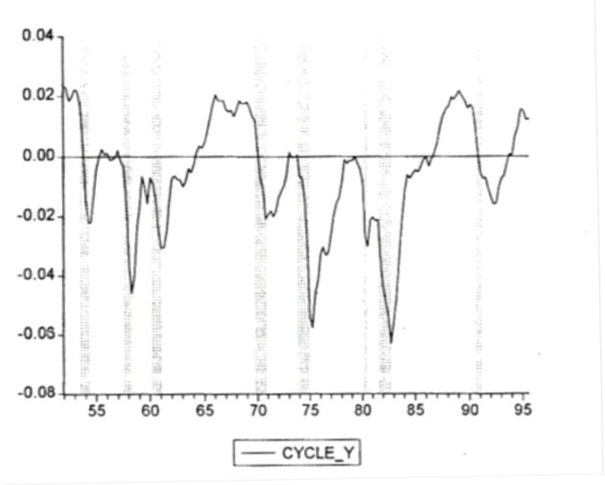


- Двумерная UC-модель



Циклическая компонента реального ВВП (2)

- Двумерная UC-модель



Безработица и ее тренд

- Двумерная UC-модель

Модель с изменяющимися параметрами (TVPM)

В этом случае в уравнении измерения $y_t = S\alpha_t + \epsilon_t$ (см. уравнение (10) в предыдущей лекции) матрица S заменяется матрицей экзогенных или предетерминированных переменных. Пример:

$$y_t = \beta_{1,t}x_{1,t} + \beta_{2,t}x_{2,t} + \ldots + \beta_{k,t}x_{k,t} + e_t, \tag{17}$$

$$(\beta_{i,t} - \delta_i) = \phi_i(\beta_{i,t-1} - \delta_i) + \upsilon_{it} \tag{18}$$

$$e_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \upsilon_t \sim N(0, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2 \ldots, k \tag{19}$$

$$E(e_t\upsilon_{i,s}) = 0 \quad \text{для всех } t \text{ и } s,\ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{20}$$

где $x_{it}, i = 1, 2, \ldots, k$ - предетерминированные или экзогенные переменные

Measurement equation

$$y_t = \begin{bmatrix} x_1 t & x_2 t \dots x_k t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ beta_{2,t} \\ \vdots \\ \beta_{k,t} \end{bmatrix} + e_t \tag{21}$$

$$(y_t = x_t \beta_t + e_t)$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \vdots \\ \beta_{k,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1^\star \\ \delta_2^\star \\ \vdots \\ \delta_k^\star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t-1} \\ \beta_{2,t-1} \\ \vdots \\ \beta_{k,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_{1,t} \\ \upsilon_{2,t} \\ \vdots \\ \upsilon_{k,t} \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$(\beta_t = \delta^\star + F\beta_{t-1} + \upsilon_t),$$

где $\delta_i^\star = \delta_i(1 - \phi_i), i = 1, 2, \dots, k$

TVPM для функции денежного предложения(1)

Kim and Nelson (1989):

$$\Delta M_t = \beta_{0t} + \beta_{1t}\Delta i_{t-1} + \beta_{2t} INF_{t-1} + \beta_{3t} SURP_{t-1} + \beta_4 \Delta M_{t-1} + e_t \tag{23}$$

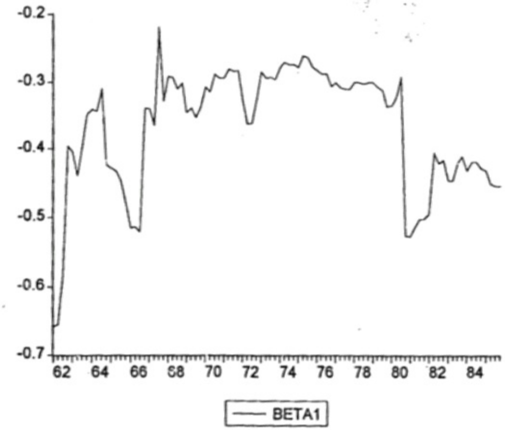
$$\beta_{it} = \beta_{i,t-1} + \upsilon_{it} \tag{24}$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_e^2) \quad \upsilon_{it} \sim N(0, \sigma_\upsilon^2), \quad i = 0, 1, \ldots, 4 \tag{25}$$

где ΔM - темп прироста M1, Δi - изменения процентной ставки (3-месячные T-bills), INF - инфляция, измеренная по ИПЦ, $SURP$ - профицит бюджета в условиях полной занятости (за исключением тренда).
Квартальные данные с 1 кв. 1964 по 4 кв. 1985

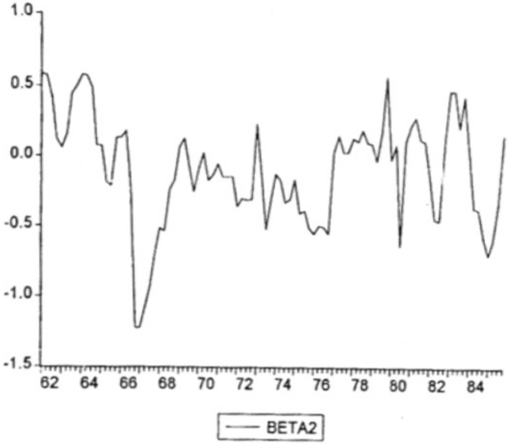
TVPM для к функции денежного предложения (2)

- β_1



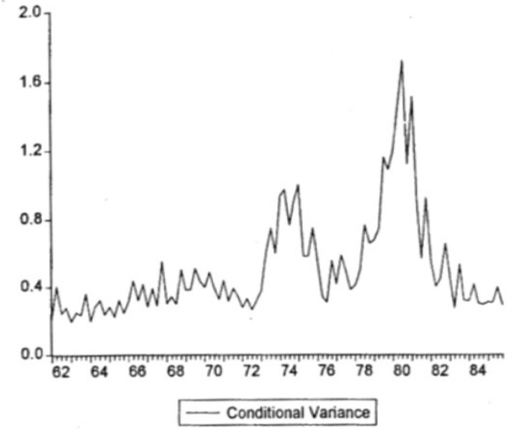
TVPM для функции денежного предложения (3)

- β_2



TVPM для функции денежного предложения (4)

- Условная дисперсия ошибки прогноза



Динамическая факторная модель (DFM)

Предположим, что имеем две стационарных переменных, y_{1t} и y_{2t} с общей компонентой c_t:

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= \gamma_1 c_t + z_{1t} \\
y_{2t} &= \gamma_2 c_t + z_{2t} \\
c_t &= \phi_1 c_{t-1} + \upsilon_t \\
z_{it} &= \alpha_i z_{i,t-1} + e_{it}
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\upsilon_t \sim N(0,1) \quad e_{it} \sim N(0,\sigma_i^2), \tag{27}
$$

Stock and Watson (1991) использовали обобщенную версию модели динамических факторов для извлечения общей компоненты четырех экономических переменных.

Динамическая факторная модель (2)

Measurement equation

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$(y_t = H_t \beta_t) \tag{29}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} c_t \\ z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{t-1} \\ z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_t \\ e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$(\beta_t = F\beta_{t-1} + \upsilon_t) \tag{31}$$

DFM одновременных экономических индикаторов (1)

Burns and Mitchell(1946): деловой цикл как одновременная сходная динамика многих макроэкономических переменных.
Index of coincident economic indicators (DOC) - отражение данного стилизованного факта.
Stock and Watson (1991): вероятностная модель одновременных экономических индикаторов, основанная на идее о том, что общий элемент может быть описан одной ненаблюдаемой переменной.

Пусть Y_{1t}, Y_{2t}, Y_{3t} и Y_{4t} - логарифмы переменных, используемых для создания одновременного индекса (coincident index, CI): Y_{1t} - промышленное производство, Y_{2t} - личный доход за исключением трансфертов, Y_{3t} - общие продажи в промышленности и торговле и Y_{4t} - наемные работники, занятые не в сельскохозяйственном секторе. В соответствии с проведенными тестами ряды нестационарны, коинтеграции нет. Рассматривается модель в разностях:

$$\Delta Y_{it} = D_i + \gamma_i \Delta C_t + e_{it}, i = 1, \ldots, 4 \tag{32}$$

$$(\Delta C_t - \delta) = \phi(\Delta C_{t-1} - \delta) + \phi_2(\Delta C_{t-2} - \delta) + \omega_t \tag{33}$$

$$e_{it} = \psi_{i1} e_{i,t-1} + \psi_{i2} e_{i,t-2} + \epsilon_{it} \tag{34}$$

$$\omega_t \sim N(0, \sigma_w^2) \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_i^2), i = 1, 2, 3, 4. \tag{35}$$

где ΔC_t - общая компонента,σ_ω^2 нормализовано к единице, корни $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = 0$ и $(1 - \psi_{i1} L - \psi_{i2} L^2) = 0, i = 1, \ldots, 4$ лежат вне единичного круга, шоки независимы.
Заметим, что:

$$E(\Delta Y_{it}) = D_i + \gamma_i \delta \tag{36}$$

На основе выборочного первого момента параметры D_i и δ не идентифицируются независимо друг от друга, поэтому модель записывается в отклонениях от среднего.

DFM одновременных экономических индикаторов(4)

$$\Delta y_{it}\gamma_i\Delta c_t + e_{it}, i = 1, \dots, 4 \tag{37}$$

$$\Delta c_t = \phi\Delta c_{t-1} + \phi_2\Delta c_{t-2} + \omega_t \tag{38}$$

$$e_{it} = \psi_{i1}e_{i,t-1} + \psi_{i2}e_{i,t-2} + \epsilon_{it} \tag{39}$$

$$\omega_t \sim N(0, \sigma_w^2) \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_i^2), i = 1, 2, 3, 4. \tag{40}$$

где $\Delta y_{it} = \Delta Y_{it} - \Delta\bar{Y}_i$ и $\Delta c_t = \Delta C_t - \delta$

DFM одновременных экономических индикаторов(5)

Measurement equation

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \\ \Delta y_{3t} \\ \Delta y_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_t \\ \Delta c_{t-1} \\ e_{1t} \\ e_{1,t-1} \\ e_{2t} \\ e_{2,t-1} e_{3t} \\ e_{3,t-1} \\ e_{4t} \\ e_{4,t-1} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$(\Delta y_t = H\beta_t) \tag{42}$$

Transition equation

$$\begin{bmatrix} \Delta c_t \\ \Delta c_{t-1} \\ e_{1t} \\ e_{1,t-1} \\ e_{2t} \\ e_{2,t-1} e_{3t} \\ e_{3,t-1} \\ e_{4t} \\ e_{4,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \psi_{41} & \psi_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_{t-1} \\ \Delta c_{t-2} \\ e_{1,t-1} \\ e_{1,t-2} \\ e_{2,t-1} \\ e_{2,t-2} \\ e_{3,t-1} \\ e_{3,t-2} \\ e_{4,t-1} \\ e_{4,t-2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \omega_t & 0 & \epsilon_{1t} & 0 & \epsilon_{2t} & 0 & \epsilon_{3t} & 0 & \epsilon_{4t} & 0 \end{bmatrix}'$$

$$(\beta_t = F\beta_{t-1} + \upsilon_t)$$

DFM: эмпирические результаты

$$\Delta y_{4t} = \gamma_{40}\Delta c_t + \gamma_{41}\Delta c_{t-1} + \gamma_{42}\Delta c_{t-2} + \gamma_{43}\Delta c_{t-3} + e_{4t} \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{40} & \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_t \\ \Delta c_{t-1} \\ e_{1t} \\ e_{1,t-1} \\ e_{2t} \\ e_{2,t-1} e_{3t} \\ e_{3,t-1} \\ e_{4t} \\ e_{4,t-1} \end{bmatrix} \tag{44}$$

- SW index vs DOC index