

Forecasting with Medium BVAR using Russian data and BVAR Mapping

я и Боря

25 августа 2015 г.

1 Введение для Карты BVAR

Значение точных прогнозов для проведения макроэкономической политики трудно переоценить. Существование лагов политики приводит к тому, что решения, принятые сегодня, повлияют на экономику только через некоторое время, поэтому фискальным и монетарным властям при принятии решений приходится ориентироваться не на текущие, а на ожидаемые показатели. Точный прогноз макроэкономических показателей, таким образом, является одним из ключевых факторов успешной политики.

В настоящее время основной моделью для прогнозирования макроэкономических временных рядов является модель векторной авторегрессии (VAR) и ее модификации. Использование векторных авторегрессий в макроэкономическом анализе явилось следствием критики активно использовавшихся прежде традиционных эконометрических моделей. В частности, **sims_1980** обратил внимание на необоснованность ограничений, вводимых в рамках традиционных моделей,¹ и предложил использовать более простую по построению динамическую модель, основанную на разложении Вольда и не требующую введения никаких ограничений на взаимную динамику переменных - VAR. Модели этого класса стали широко использоваться как для прогнозирования, так и для структурного анализа благодаря своей логичности и относительной простоте. Однако для того чтобы правильно отражать динамику фактических временных рядов, VAR часто требуется большое количество лагов, что, в свою очередь, может снизить эффективность оценивания(?) на коротких выборках и привести к высоким ошибкам/высокой неопределенности прогноза. Проблема усугубляется тем, что в реальности при проведении политики центральные банки развитых стран ориентируются на большое количество показателей, и VAR малой размерности не может отразить всей информации, доступной центральным банкам. При этом увеличение числа переменных в VAR приводит к тому, что

¹Под традиционными моделями имеются в виду модели, построенные в рамках подхода комиссии Коулза. Их прогнозная способность резко ухудшилась в начале 1970-х годов, т. е. примерно тогда же, когда «исчезла» базовая кривая Филлипса (подробнее об этом см. **favero_2001** и **malakhovskaya_pekarsky_2012**)

количество оцениваемых параметров, растет нелинейно. Это усугубляет проблему неэффективности оценивания и высоких ошибок прогноза. Одним из решений этой проблемы стало использование априорной информации относительно распределения параметров и ковариационной матрицы ошибок, т. е. переход от обычных² VAR к Байесовским (Bayesian VAR, BVAR).

Исследователи выделяют два преимущества BVAR по отношению к обычным. Во-первых, этот класс моделей предлагает решение проблемы избыточной параметризации и благодаря этому позволяет включать в модель большее количество переменных. При этом априорные веры позволяют снизить неопределенность в распределении параметров модели и улучшить ее прогнозные способности. Во-вторых, распространенные в настоящее время априорные распределения отражают современные представления о долгосрочной динамике переменных, не проявляющиеся в коротких выборках, обычно используемых для анализа. Это, в свою очередь, также улучшает точность полученных прогнозов. Нельзя также не отметить, что современные компьютеры осуществляют симуляции настолько быстро, что исследователи более не ограничены необходимостью использования только сопряженных распределений, позволяющих получить явное аналитическое решение, что, безусловно, увеличивает привлекательность байесовского подхода и способствует его быстрому распространению, в частности, в макроэкономическом анализе (**karlsson_2012**).

Наиболее часто цитируемый недостаток байесовского подхода – субъективность, с нашей точки зрения, не является существенным. Действительно, изменение априорного распределения влияет на результаты анализа³. Однако обычная небайесовская VAR (как и любая другая эконометрическая модель) является в неменьшей степени отражением субъективных представлений исследователя. Выбор весьма ограниченного набора переменных в модели, разделение их на эндогенные и экзогенные, определение числа лагов в модели⁴ и т.д. в любом случае отражают собственные представления исследователя о правильной спецификации модели. К сожалению, несмотря на широкое распространение BVAR в академических статьях, количество практических обзоров этого метода весьма ограничено. Существующие обзоры **karlsson_2012 delnegro_schorfheide_2011** и изложение в учебнике **canova_2007** сильно математизированы и едва ли доступны для новичков без специальной математической подготовки. При этом ни в одном из них не содержится достаточно подробной классификации априорных распределений и ни к одному из них не прилагаются инструкции для реализации предложенных методов в эконометрическом пакете. Исключениями являются обзоры **koop_korobilis_2010** и **blake_mumtaz_2012**

²В англоязычной литературе обычные VAR (без наложения априорных распределений) называются частотными — frequentist.

³Т.к. плотность апостериорного распределения представляет собой комбинацию плотности априорного распределения и функции правдоподобия. Этот вопрос подробно освещен в следующем разделе.

⁴На практике для определения количества лагов в частотной VAR, как правило, исследователи ориентируются на информационные критерии. Однако довольно часто разные информационные критерии дают противоречивые результаты. В этом случае предпочтение определенного критерия всем остальным – есть тоже субъективное решение.

Однако **koop_korobilis_2010** не рассматривают ставший весьма популярным метод задания априорного распределения через добавление дополнительных наблюдений, в т. ч. априорное распределение суммы коэффициентов (sum-of-coefficients prior) и априорное распределение начального наблюдения (initial observation prior). **blake_mumtaz_2012** используют терминологию, несколько отличающуюся от других работ, а код фактически содержит только пример построения BVAR только с одним типом распределения. Кроме того, сам обзор не лишен опечаток. При этом ни в одном из указанных обзоров не рассмотрен достаточно подробно вопрос о прогнозировании с помощью BVAR (а именно это и является обычно целью их построения, по крайней мере, BVAR в сокращенной форме). На русском языке обзоров BVAR на данный момент, насколько нам известно, вообще нет.

стоит ли
это пи-
сать? мо-
жем ли
мы быть
увере-
ны, что
наш —
лишен??

Данный обзор нацелен на новичков в Байесовском анализе и содержит подробную классификацию априорных распределений, наиболее популярных при проведении макроэкономических исследований. Кроме того, к обзору прилагается код в R, в котором используются те же обозначения, что и в тексте работы, и который может быть использован как в учебных, так и в научных целях.

Мы оставляем за рамками данного обзора построение структурных BVAR (SBVAR), BVAR с меняющимися параметрами (TVP-BVAR), BVAR со стохастической волатильностью, а также проблемы выбора переменных при построении BVAR. К этим вопросам мы вернемся в своих будущих работах. План обзора следующий: ...

2 Введение Прогнозирование с помощью BVAR средней размерности

Построение точных макроэкономических прогнозов является ключевым условием проведения верной политики центральными банками. Их решения, принятые сегодня смогут повлиять на экономику только спустя какое-то время из-за лагов, характерных для любой политики. Стоит заметить, что на важность точных прогнозов для проведения политики первым обратил внимание Theil(1958) (нужно найти его работу и посмотреть, есть ли там эти пункты. На данный момент они взяты из Wieland). В частности, он писал, что власти должны (1) предсказать будущее состояние экономики (2) оценить эффект изменения инструмента политики (3) на базе полученных прогнозов разработать план действий. Отсюда становится ясно, что точное построение прогнозов является одним из ключевых условий проведения успешной политики, что обуславливает интерес экономистов к исследованиям в данной области. Сбор обширной информации позволяет политикам ориентироваться на большое число макроиндикаторов при проведении политики, что они в реальности и делают (см. **beckner_1996 bernanke_boivin_2003**). В современном макроэкономическом анализе основным инструментом прогнозирования является модель векторной авторегрессии, предложенная К. Симсом (**sims_1980**) и ее модификации.

нужно
ли это
вообще?

При этом обычная⁵ векторно-авторегрессионная модель, ставшая наиболее часто встречающимся инструментом для построения прогнозов, не может учесть большое количество переменных, так как количество параметров, подлежащих оценке, растет нелинейно с увеличением числа уравнений. При этом неучтенная при построении VAR информация может приводить к смещенным оценкам и неверным выводам как относительно прогнозируемых значений, так и относительно функций импульсных откликов. До недавнего времени для прогнозирования и структурного анализа на больших выборках использовались либо модели с динамическими факторами (**forni_al_2000** и **stock_watson_2002**), либо на данных с панельной структурой — панельные или глобальные VAR (PVAR и GVAR соответственно; см., например, **pesaran_al_2004** и **dees_guntner_2014**).⁶ Следует отметить, что при этом использование байесовских VAR (BVAR) на данных с высокой размерностью было существенно ограничено, так как считалось, что регуляризации, обеспечиваемой наложением априорных распределений, оказывается недостаточно для решения проблемы избыточной параметризации. Однако в работе **demol_al_2008** было показано, что наложение более жестких априорных распределений с увеличением числа входящих в выборку переменных позволяет успешно применять байесовский метод in data-rich environment.

Цель данной работы состоит в прогнозировании макроиндикаторов для российской экономики с помощью BVAR средней размерности. Использование других методов, упомянутых выше, является затруднительным из-за отсутствия необходимой статистической информации. Модели DF и FAVAR строятся обычно для выборок с количеством переменных, превышающих 100, и в России такого количество достаточно длинных временных рядов просто не существует. PVAR и GVAR требуют панельной структуры данных и, следовательно, подходят, скорее, для анализа данных нескольких стран одновременно.

Наши результаты состоят в следующем...

План работы таков. Параграф 2 посвящен обзору литературы, в параграфе 3 кратко рассказывается о методе BVAR и априорных распределениях, которые мы накладываем. Параграф 4 посвящен описанию выборки и преобразованию переменных. В Параграфе 5 изложены полученные результаты, и в последнем разделе приведены выводы работы и направления дальнейших исследований.

⁵В англоязычной литературе обычные VAR (без наложения априорных распределений) называются частотными — frequentist.

⁶Модели динамических факторов (DF) основаны на извлечении нескольких т. н. общих факторов, динамика которых описывает весь набор данных. Далее они становятся переменными VAR либо отдельно, либо в рамках дополненной факторами VAR (FAVAR) совместно с несколькими переменными исходной выборки. В панельных и глобальных VAR для решения излишней параметризации используются дополнительные ограничения: ограничения исключения, гомогенности и экзогенности.

3 Обзор литературы Прогнозирование...

Векторные авторегрессии широко используются как для прогнозирования, так и для проведения структурного анализа благодаря своей логичности и относительной простоте. Однако для правильного отражения динамики фактических временных рядов, как правило, требуется большое количество лагов, что, при оценивании на коротких выборках, может снизить эффективность оценивания и привести к высокой неопределенности прогноза. Тот факт, что в реальности большое количество переменных могут зависеть друг от друга (а значит, правильно специфицированная модель должна это учитывать), — только усугубляет проблему, т.к. количество параметров модели нелинейно зависит от числа эндогенных переменных. В качестве решения этой проблемы **litterman_1979** предложил использовать ограничения на параметры модели в форме априорных распределений. Он показал, что использование байесовской регуляризации в BVAR с не менее чем шестью переменными улучшает прогнозную силу модели. Однако до последнего времени считалось, что при использовании достаточно большого числа временных рядов уточнения правдоподобия только с помощью априорного распределения недостаточно. Это приводило к необходимости задавать дополнительные ограничения; в итоге до 2008 г., когда была опубликована статья **demol_al_2008** сыгравшая ключевую роль в развитии подхода, работ посвященных байесовскому анализу данных большой размерности практически не было. В качестве исключений можно назвать работы **koop_potter_2004** и **wright_2009**⁷, в которых применяется байесовского усреднения моделей. Однако в работе **koop_potter_2004** прогнозирование осуществлялось с помощью DF-модели, а в **wright_2009** одним из видов усредняемых моделей была регрессия, оцененная байесовским методом, но это была регрессия с единственной объясняемой переменной. **giacomini_white_2006** сравнивают прогнозную способность моделей снижения размерности путем байесовской регуляризации и путем выделения динамических факторов. Однако их байесовская модель не является VAR, т.к. содержала только лаги зависимой переменной и текущие значения переменных из информационного множества высокой размерности. Авторы сделали выводы в пользу байесовской регуляризации при предсказании реальных переменных (промышленное производство и личный доход) по сравнению с факторной. Однако **demol_al_2008** указывают на общность факторной и байесовской процедур снижения размерности. В этой работе авторы проверяют асимптотические свойства прогноза, построенного на основе байесовской многомерной регрессии при увеличении числа переменных и наблюдений. Ими было получено, что, если данные характеризуются факторной структурой, то сужение априорного распределения при увеличении количества переменных обеспечивает состоятельность прогноза. Другими словами, если данным свойственна высокая мультиколлинеарность (что характерно для выборок макрорядов большой размерности), то наложение более узких априорных распределений с увеличением размерности модели не приводит к потере важной информации, т.к. для описания данных достаточно небольшого количе-

⁷Препринт к этой работе датируется 2004г.

ства первых факторов. Эта точка зрения была подтверждена и развита в статье **banbura_al_2010** в которой авторы строят VAR модели для 3, 7, 20 и 131 переменных и показывают, что модели с большей размерностью демонстрируют лучшие прогнозные способности, чем модели малой размерности и даже FAVAR. Интересно отметить, что хорошая прогнозная способность достигается уже в модели с 20 переменными, поэтому как для прогнозирования, так и для структурного анализа достаточно сконцентрироваться на агрегированных данных. Подобный вывод о том, что 16-и временных рядов достаточно для построения хорошего прогноза делается в **beauchemin_zaman_2011** несмотря на иной способ определения жесткости априорного распределения. Аналогичная модель для Новой Зеландии была построена в работе **bloor_matheson_2010** в которой они использовали метод условного прогнозного оценивания (**waggoner_zha_1999**), что позволило им сравнить сценарии, основанные на различной условной информации. Авторы строят три модели (с 9, 13 и 35 переменными) и делают вывод, что BVAR обладает более высокой предсказательной способностью, чем AR и обычная VAR модель. Хотя результаты варьируют по разным переменным, в общем и целом, BVAR с большим числом переменных характеризуется более высокой точностью прогноза.

koop_2013 расширил результаты **banbura_al_2010** и показал, что BVAR с большой размерностью обладают хорошей прогнозной способностью по отношению факторным моделям. Отличительной чертой в работе является рассмотрение нескольких априорных распределений, однако в работе делается вывод, что использование более сложных априорных распределений не обязательно приводит к более точным прогнозам. **bloor_matheson_2010** также расширяют метод **banbura_al_2010** но в ином направлении. Во-первых, они учитывают не только априорное распределение суммы коэффициентов (sum-of-coefficients prior **sims_1992**), но и априорное распределение совместной персистентности ⁸**sims_1993**. Во-вторых, в работе накладываются ограничения на лаги, чтобы сделать модель более подходящей для структурного анализа. В отличие от указанных выше работ, оценка проводится по данным Новой Зеландии, а не США, что не меняет основного вывода о высоком качестве прогноза полученной с помощью BVAR. Несколько иную задачу ставят перед собой **carrero_al_2015**. Рассматривая различные модификации BVAR, способы преобразования данных и построения прогнозов, авторы отвечают на вопрос, какие характеристики модели приводят к более точным прогнозам. Все упомянутые выше статьи использовали один из двух существующих способов выбора жесткости априорного распределения (подробнее см. ниже). **giannone_al_2015** подчеркивают важность оптимального выбора этого показателя для точного прогноза и переходят к иерархической BVAR, что позволяет эндогенно определять гиперпараметры априорного распределения.

Тот же метод построения априорного распределения (естественно-сопряженная версия Миннесоты-распределения (**kadiyala_karlsson_1997** **sims_zha_1998**- проверить, они ли предложили?)), что в работах **banbura_al_2010**, **bloor_matheson_2010**

⁸В соответствии с альтернативной терминологией в данной работе это распределение называется распределением изначальных наблюдений: dummy initial-observation prior

и **koop_2013** был применен в работе **beauchemin_zaman_2011** Они показывают, что BVAR с 16 переменными может быть с успехом использована как для прогнозов, так и для структурного анализа (трансмиссии монетарного шока (?)/структурного анализа монетарной политики. Аналогичное построение априорного распределения используется в работе **alessandri_mumtaz_2014** где с помощью линейной и нелинейной BVAR (?) модели показано, что учет финансовых индикаторов позволяет улучшить прогноз выпуска и инфляции, в т. ч. в кризисные периоды.

4 Методология

4.1 Удобная табличка

Буква	Размер	Описание	Формула
p	скаляр	количество лагов	
m	скаляр	количество эндогенных переменных	
d	скаляр	количество экзогенных переменных	
k	скаляр	количество параметров в одном уравнении	$k = mp + d$
T	скаляр	количество наблюдений	
z_t	$d \times 1$	вектор экзогенных переменных (считая константу)	
y_t	$m \times 1$	вектор эндогенных переменных	$y_t = \Phi' x_t + \varepsilon_t$
x_t	$k \times 1$	вектор всех регрессоров	$x_t = [y'_{t-1} \dots y'_{t-p} z'_t]'$
ε_t	$m \times 1$	вектор случайных ошибок	
Y	$T \times m$	все эндогенные переменные	$Y = [y_1, y_2, \dots, y_T]'$
X	$T \times k$	матрица регрессоров	$X = [x_1, x_2, \dots, x_T]'$
E	$T \times m$	матрица ошибок	$E = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T]'$
y	$mT \times 1$	векторизация Y	$y = \text{vec}(Y)$
ε	$mT \times 1$	векторизация E	$\varepsilon = \text{vec}(E)$
Φ_1, \dots	$m \times m$	коэффициенты VAR	$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_{ex} z_t + \varepsilon_t$
Φ_{ex}	$m \times d$	коэффициенты при экзогенных переменных	
Φ	$k \times m$	упаковка матриц Φ_1, \dots	$\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_p \Phi_{ex}]'$
ϕ	$km \times 1$	вектор из матрицы Φ	$\phi = \text{vec } \Phi$
Ξ	$km \times km$	Априорная ковариационная матрица Φ	
$\underline{\Phi}$	$k \times m$	априорное математическое ожидание Φ	
$\underline{\phi}$	$km \times 1$	вектор из матрицы $\underline{\Phi}$	$\underline{\phi} = \text{vec } \underline{\Phi}$
$\bar{\Xi}$	$km \times km$	Апостериорная ковариационная матрица Φ	
$\bar{\Phi}$	$k \times m$	апостериорное математическое ожидание Φ	
$\bar{\phi}$	$km \times 1$	вектор из матрицы $\bar{\Phi}$	$\bar{\phi} = \text{vec } \bar{\Phi}$
$\underline{\nu}$	скаляр		
$\bar{\nu}$	скаляр		$\bar{\nu} = T + \underline{\nu}$
$\underline{\Omega}$	$k \times k$	Матрица априорных масштабирующих коэффициентов ковариационной матрицы Φ	$\Xi = \Sigma \otimes \underline{\Omega}$
$\bar{\Omega}$	$k \times k$	Матрица апостериорных масштабирующих коэффициентов ковариационной матрицы Φ	$\bar{\Omega} = (\underline{\Omega}^{-1} + X'X)^{-1}, \bar{\Xi} = \Sigma \otimes \bar{\Omega}$
Σ	$m \times m$	Ковариационная матрица ошибок	$\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_t' = \Sigma$

4.2 Байесовская VAR

Рассмотрим переменные y_{it} , объединенные в вектор $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})'$ размерности m . Векторная авторегрессия в сокращенной форме записывается в виде:

$$y_t = \Phi_{ex} + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (1)$$

где $\Phi_{ex} = (c_1, \dots, c_m)'$ — вектор констант размерности m , Φ_l — авторегрессионные матрицы размерности $m \times m$ при $l = 1, \dots, p$. Вектор ε_t — m -мерный вектор ошибок с ковариационной матрицей $\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_t' = \Sigma$, некоррелированный с объясняющими переменными. Группируя матрицы параметров в общую матрицу $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_p \Phi_{ex}]'$ и определяя новый вектор $x_t = [y_{t-1}' \dots y_{t-p}' 1]'$, получаем VAR записанную в более компактном виде:

$$y_t = \Phi' x_t + \varepsilon_t \quad (2)$$

Если же сгруппировать переменные и шоки следующим образом: $Y = [y_1, y_2, \dots, y_T]'$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_T]'$, $E = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T]'$ то VAR можно записать как:

$$Y = X\Phi + E \quad (3)$$

Эта же модель может быть записано в векторизованном виде⁹:

$$Y = X\Phi + E \quad (4)$$

$$\text{vec}(Y) = \text{vec}(X\Phi I) + \text{vec}(E) \Leftrightarrow \quad (5)$$

$$y = (I_M \otimes X)\phi + \varepsilon \quad (6)$$

где $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma \otimes I_T)$ и вектор $\phi = \text{vec} \Phi$ имеет размерность $km \times 1$.

Задача байесовского оценивания заключается в поиске апостериорных распределений параметров $p(\Phi, \Sigma|Y)$ с использованием функции максимального правдоподобия, $L(Y|\Phi, \Sigma)$, и заданного априорного распределения, $p(\Phi, \Sigma|Y)$. Для этого используется правило Байеса:

$$p(\Phi, \Sigma|Y) = \frac{p(\Phi, \Sigma)L(Y|\Phi, \Sigma)}{p(Y)} \quad (7)$$

Т.к. $p(Y)$ не зависит от Φ и Σ , то можно записать:

$$p(\Phi, \Sigma|Y) \propto p(\Phi, \Sigma)L(Y|\Phi, \Sigma) \quad (8)$$

Так как $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, то функция правдоподобия задается как:¹⁰

$$L(Y|\Phi, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-T/2} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} [\Sigma^{-1}(Y - X\Phi)'(Y - X\Phi)] \right\} \quad (9)$$

В двух следующих разделах будут разобраны наиболее известные априорные и построенные на их основе апостериорные распределения.

⁹Третье уравнение системы следует из тождества: $\text{vec}(ABC) = (C \otimes A) \text{vec}(B)$

¹⁰ Другая форма записи функции правдоподобия: $L(Y|\Phi, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-T/2} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} [\Sigma^{-1} \hat{E}' \hat{E}] \right\} \times \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} [\Sigma^{-1}(\Phi - \hat{\Phi})' X' X (\Phi - \hat{\Phi})] \right\}$, где $\hat{E} = Y - X\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi} = (X'X)^{-1} X'Y$. Здесь $\text{etr}() = \exp(\text{tr}())$.

4.3 Классификация популярных априорных распределений

Детально каждое из априорных распределений будет описано отдельно, а в этом разделе будет дана общая схема связи априорных распределений. Среди самых популярных априорных распределений можно назвать:

1. Независимое нормальное-обратное Уишарта распределение

$$\begin{cases} \phi \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}; \Xi) \\ \Sigma \sim \mathcal{IW}(\underline{S}; \underline{\nu}) \\ \phi \text{ и } \Sigma \text{ независимы} \end{cases} \quad (10)$$

В общем случае выборку из апостериорного распределения можно получить по схеме Гиббса.

Частными случаями независимого нормального-обратного Уишарта являются:

- (a) Распределение Миннесоты

$$\begin{cases} \phi \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}; \Xi) \\ \Sigma = \text{const} \end{cases} \quad (11)$$

Получается из независимого нормального-обратного Уишарта при $\underline{S} = (\underline{\nu} - m - 1) \cdot \Sigma$ и $\underline{\nu} \rightarrow \infty$. Апостериорное распределение выписывается в явной форме. Можно использовать алгоритм Монте-Карло, сразу генерирующий случайную выборку из апостериорного распределения, без необходимости периода «прожига».

Более того, алгоритм симуляции упрощается если матрица Ξ имеет структуру кронекерова произведения $\Xi = \Sigma \otimes \underline{\Omega}$. В этом случае распределение Миннесоты становится частным случаем сопряжённого нормального-обратного Уишарта.

- (b) Независимое нормальное-Джеффри

$$\begin{cases} \phi \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}; \Xi) \\ \Sigma \sim |\Sigma|^{-(m+1)/2} \\ \phi \text{ и } \Sigma \text{ независимы} \end{cases} \quad (12)$$

Получается из независимого нормального-обратного Уишарта при $\underline{S} = \underline{\nu}^{1/m} \cdot I$ и $\underline{\nu} \rightarrow 0$.

http://www.tc.umn.edu/~nydic001/docs/unpubs/Wishart_Distribution.pdf — тут пишут, что при $\nu < \dots$ получается необратимая матрица, а тут вроде как обратимая????

плотность растёт к необратимым матрицам?

Для получения выборки из апостериорного распределения можно использовать схему Гиббса. Необходимые формулы для гиперпараметров апостериорного распределения получаются из общего случая просто подстановкой $\underline{S} = 0$, $\underline{\nu} = 0$.

Распределение Миннесоты и независимое нормальное-Джефффри являются противоположными крайностями независимого-обратного Уишарта. В распределении Миннесоты матрица Σ предполагается известной, а в нормальном-Джефффри матрица Σ имеет «размытое» неинформативное распределение.

Частным случаем независимого нормального-Джефффри распределения является:

i. Неинформативное-Джефффри

$$\begin{cases} \phi \sim 1 \\ \Sigma \sim |\Sigma|^{-(m+1)/2} \\ \phi \text{ и } \Sigma \text{ независимы} \end{cases} \quad (13)$$

Априорное распределение для ленивых. Не нужно указывать ни одного гиперпараметра!

Получается из независимого нормального-Джефффри при $\underline{\phi} = 0$ и $\underline{\Xi} = a \cdot I$ и $a \rightarrow \infty$. Является также частным случаем сопряженного нормального-Джефффри априорного распределения.

Для получения выборки из апостериорного распределения можно использовать прямое моделирование по схеме Монте-Карло без алгоритма Гиббса. распределения получаются из общего случая просто подстановкой $\underline{S} = 0$, $\underline{\nu} = 0$, $\underline{\Xi}^{-1} = 0$, $\underline{\phi} = 0$. При этом формулы существенно упрощаются, в частности исчезает необходимость обращать матрицу размера $km \times km$.

2. Сопряженное нормальное-обратное Уишарта распределение

$$\begin{cases} \Sigma \sim \mathcal{IW}(\underline{S}, \underline{\nu}) \\ \phi | \Sigma \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}, \Sigma \otimes \underline{\Omega}) \end{cases} \quad (14)$$

Для сопряженного нормального-обратного Уишарта распределения нет необходимости использовать алгоритм Гиббса, так как есть явные формулы для апостериорных распределений. Можно использовать алгоритм Монте-Карло, сразу генерирующий случайную выборку из апостериорного распределения. Исчезает период «прожига», необходимый для сходимости алгоритма Гиббса.

Частным случаем сопряжённого нормального-обратного Уишарта распределения оказывается:

(a) Распределение Миннесоты при $\underline{\Xi} = \Sigma \otimes \underline{\Omega}$.

При $\Xi = \Sigma \otimes \underline{\Omega}$ распределение Миннесоты является и частным случаем независимого нормального-обратного Уишарта, и сопряженного нормального-обратного Уишарта. Для получения выборки из апостериорного распределения можно использовать и схему Гиббса для независимого нормального-обратного Уишарта, и алгоритм Монте-Карло без «прожига».

(b) Сопряжённое нормальное-Джеффри

$$\begin{cases} \Sigma \sim |\Sigma|^{-(m+1)/2} \\ \phi|\Sigma \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}; \Sigma \otimes \underline{\Omega}) \end{cases} \quad (15)$$

Получается из сопряжённого нормального-обратного Уишарта при $\underline{S} = \underline{\nu}^{1/m} \cdot I$ и $\underline{\nu} \rightarrow 0$. Формулы для гиперпараметров апостериорного распределения получаются подстановкой $\underline{\nu} = 0$, $\underline{S} = 0$.

Частным случаем сопряжённого нормального-Джеффри является

i. Неинформативное-Джеффри

Получается из сопряженного нормального-Джеффри при $\underline{\phi} = 0$ и $\underline{\Omega} = a \cdot I$ и $a \rightarrow \infty$. Формулы для гиперпараметров апостериорного распределения получаются подстановкой $\underline{\phi} = 0$, $\underline{\Omega}^{-1} = 0$, $\underline{\nu} = 0$, $\underline{S} = 0$.

????? Где в этой схеме Березовский априорное распределение Sim-Zha?

В нашей работе мы всегда явно указываем, идёт ли речь о независимом или сопряжённом априорном распределении. Однако при чтении многих других работ надо быть внимательным, зачастую авторы говорят о «нормальном-обратном Уишарта» распределении, не уточняя, какое имеется ввиду.

4.4 Априорное распределение Миннесоты

Одно из решений этой проблемы было предложено в работе **litterman_1979** автор которой показал, что введение ограничений в форме априорных распределений параметров увеличивает точность оценок и прогнозов. Априорное распределение, позже(?) получившее название «априорное распределение Миннесоты» было предложено в работе **litterman_1986** и (с некоторыми модификациями) в **doan_al_1984**

Априорное распределение параметров предполагается многомерным нормальным, зависящим от нескольких гиперпараметров. Параметры предполагаются независимыми, следовательно, их ковариационная матрица диагональна. Ковариационная матрица вектора ε_t также предполагается диагональной и постоянной. Тогда вектор Φ не зависит от Σ :

$$\phi \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}, \Xi) \quad (16)$$

Априорная плотность распределения ϕ также не зависит от Σ и может быть записана как:

$$p(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^{km/2} |\Xi|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\phi - \underline{\phi})' \Xi^{-1} (\phi - \underline{\phi}) \right\}. \quad (17)$$

Комбинируя её с функцией правдоподобия (9), получаем, что апостериорное распределение параметров задаются в следующем виде:

$$\phi|Y \sim \mathcal{N}(\bar{\phi}, \bar{\Xi}) \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= [\underline{\Xi}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X'X)]^{-1} \\ \bar{\phi} &= \bar{\Xi}[\underline{\Xi}^{-1}\phi + (\Sigma^{-1} \otimes X')y]. \end{aligned}$$

Если $\underline{\Xi}$ имеет структуру кронекерова произведения, $\underline{\Xi} = \Sigma \otimes \underline{\Omega}$, то формулы можно существенно упростить и обойтись обращением матриц меньшей размерности:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= [\underline{\Xi}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X'X)]^{-1} = [(\Sigma \otimes \underline{\Omega})^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X'X)]^{-1} = \\ &= [\Sigma^{-1} \otimes \underline{\Omega}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X'X)]^{-1} = \Sigma \otimes (\underline{\Omega}^{-1} + X'X)^{-1} = \Sigma \otimes \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (19)$$

В результате получаем

$$\Phi|Y \sim \mathcal{N}(\bar{\Phi}, \Sigma \otimes \bar{\Omega})$$

На практике в качестве матрицы Σ используют её оценку $\hat{\Sigma}$, диагональные элементы которой равны: $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_m^2$, где $\hat{\sigma}_i^2$ — оценка дисперсии случайной составляющей в $AR(p)$ модели для ряда i .¹¹

Математическое ожидание априорного распределения параметров может быть записано с помощью матрицы $\underline{\Phi} = \mathbb{E}(\Phi)$ размерности $k \times m$, где $\underline{\Phi} = [\Phi_1 \dots \Phi_p \ \Phi_{ex}]'$ и $\phi = \text{vec } \underline{\Phi}$.

$$(\Phi_l)_{ij} = \begin{cases} \delta_i & i = j, l = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (20)$$

Априорное распределение Миннесоты было задумано таким образом, чтобы учесть нестационарность многих макроэкономических временных рядов. В этом случае δ_i , принимают значение единица.¹²

Априорное распределение Миннесоты предполагает, что априорная ковариационная матрица параметров $\underline{\Xi}$ диагональна. Пусть $\underline{\Xi}_i$ обозначает блок $\underline{\Xi}$, размера $k \times k$, связанный с коэффициентами уравнения i , т.е.

$$\underline{\Xi} = \begin{pmatrix} \underline{\Xi}_1 & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & \underline{\Xi}_2 & \cdots & 0_{k \times k} & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & \underline{\Xi}_{m-1} & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} & \underline{\Xi}_m \end{pmatrix} \quad \underline{\Xi}_i = \begin{pmatrix} \underline{\Xi}_{i,lag=1} & 0_{m \times m} & \cdots & 0_{m \times m} & 0_{m \times 1} \\ 0_{m \times m} & \underline{\Xi}_{i,lag=2} & \cdots & 0_{m \times m} & 0_{m \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{m \times m} & 0_{m \times m} & \cdots & \underline{\Xi}_{i,lag=p} & 0_{m \times 1} \\ 0_{1 \times m} & 0_{1 \times m} & \cdots & 0_{1 \times m} & \underline{\Xi}_{i,const} \end{pmatrix}$$

¹¹Некоторые авторы для подсчета оценки дисперсии используют $AR(1)$ модель, даже если сама VAR имеет большее количество лагов.

¹²В настоящее время широкое распространение получила практика назначать $\delta_i = 1$ для нестационарных рядов и $\delta_i < 1$ для стационарных.

Тогда диагональные элементы $\Xi_{i,lag=l}$ определяются по формулам:

$$(\Xi_{i,lag=l})_{jj} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_{tight}}{l^{\lambda_{lag}}} \right)^2, & j = i \\ \left(\frac{\lambda_{tight} \cdot \lambda_{kron} \sigma_i}{l^{\lambda_{lag} \sigma_j}} \right)^2, & j \neq i \end{cases} \quad \Xi_{i,const} = \lambda_{const}^2 \sigma_i^2, \quad (21)$$

Как можно видеть из приведенной выше формулы (21) априорная дисперсия параметров зависит от нескольких гиперпараметров, задаваемых исследователем. Гиперпараметры имеют следующую интерпретацию: λ_{tight} (параметр регуляризации) отражает общую «жесткость» априорного распределения. Если $\lambda_{tight} \rightarrow 0$, то априорное распределение полностью определяет апостериорное распределение, и данные не играют никакой роли при оценке параметров. Наоборот, если $\lambda_{tight} \rightarrow \infty$, то априорное распределение перестает влиять и оценка параметров сходится к обычной оценке МНК. Параметр λ_{kron} (параметр кросс-регуляризации) добавляет дополнительную жесткость лагам других переменных по сравнению с лагами зависимой переменной. Если $\lambda_{kron} < 1$, то собственные лаги зависимой переменной помогают предсказывать значение переменной лучше, чем лаги других переменных, поэтому коэффициенты при лагах других переменных оказываются жестче регуляризованы к нулю. Параметр λ_{const} отражает относительную жесткость распределения константы.

При $\lambda_{kron} = 1$ матрица Ξ имеет структуру кронекерова произведения и представима в виде:

$$\Xi = \Sigma \otimes \underline{\Omega},$$

где $\underline{\Omega}$ — матрица размера $k \times k$, соответствующая отдельному уравнению. Кронекерово домножение слева на матрицу Σ для i -го уравнения означает домножение дисперсий, указанных в матрице $\underline{\Omega}$, на коэффициент σ_i^2 . Сама $\underline{\Omega}$ представима в виде:

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} \underline{\Omega}_{lag=1} & 0_{m \times m} & \cdots & 0_{m \times m} & 0_{m \times 1} \\ 0_{m \times m} & \underline{\Omega}_{lag=2} & \cdots & 0_{m \times m} & 0_{m \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{m \times m} & 0_{m \times m} & \cdots & \underline{\Omega}_{lag=p} & 0_{m \times 1} \\ 0_{1 \times m} & 0_{1 \times m} & \cdots & 0_{1 \times m} & \underline{\Omega}_{const} \end{pmatrix} \quad (22)$$

При этом матрица $\underline{\Omega}_{lag=l}$ имеет размерность $m \times m$, и ее диагональные элементы определяются по формулам:

$$(\underline{\Omega}_{lag=l})_{jj} = \left(\frac{\lambda_{tight}}{l^{\lambda_{lag} \sigma_j}} \right)^2 \quad \underline{\Omega}_{const} = \lambda_{const}^2 \quad (23)$$

При использовании априорного распределения Миннесоты, нет необходимости применять алгоритм Гиббса для получения апостериорного распределения. Алгоритм генерации случайной выборки непосредственно из апостериорного распределения происходит методом Монте-Карло:

1. На s -ом шаге сгенерировать очередную итерацию согласно:

$$\phi^{[s]} \sim \mathcal{N}(\bar{\phi}; \bar{\Xi}) \quad (24)$$

2. Увеличить s на единицу и перейти к пункту один

Если $\bar{\Xi}$ имеет структуру кронекерова произведения, $\bar{\Xi} = \Sigma \otimes \underline{\Omega}$, то вместо вектора $\phi^{[s]}$ можно генерировать матрицу $\Phi^{[s]}$ численно более простым алгоритмом:

1. Генерируют матрицу V размера $k \times m$ из независимых стандартных нормальных величин
2. Считают матрицу $\Phi^{[s]}$ по формуле:

$$\Phi^{[s]} = \bar{\Phi} + \text{chol}(\bar{\Omega}) \cdot V \cdot \text{chol}(\Sigma^{[s]})'$$

Преимущества априорного распределения Миннесоты хорошо известны. Прежде всего, оно просто задается, Кроме того, оно успешно применялось в литературе для решения различных задач. И наконец, получившееся апостериорное распределение является нормальным, а значит, легко можно получить значение любой функции параметров с помощью методов Монте-Карло. Однако существенным недостатком этого распределения является то, что оно не предполагает использования байесовской процедуры для оценки Σ .

4.5 Сопряженное нормальное-обратное Уишарта априорное распределение

Указанного недостатка априорного распределения Миннесоты можно избежать, если рассматривать сопряженное априорное распределение, т.е. распределение, при котором априорное распределение, функция правдоподобия и апостериорное распределение принадлежат одному классу. Т.к. функция правдоподобия может быть разбита на две части, одна из которых соответствует нормальному распределению (при условии известной ковариационной матрицы остатков), а другая — обратному распределению Уишарта, то и сопряженным априорным распределением для рассматриваемой модели будет также нормальное-обратное Уишарта распределение.

Априорное нормальное-обратное Уишарта распределение может быть записано как:

$$\begin{cases} \Sigma \sim \mathcal{IW}(\underline{S}, \underline{\nu}) \\ \phi | \Sigma \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}, \Sigma \otimes \underline{\Omega}) \end{cases} \quad (25)$$

Здесь нужно отметить, что система (25) записана для случая, когда ковариационная матрица параметров имеет кронекерову структуру, что означает, что λ_{kron} полагается равной единице. Хотя строго, говоря, это предположение не обязательно, оно существенно ускоряет расчеты, поэтому, как правило, используется в макроэкономических приложениях.

Гиперпараметры вектора математического ожидания ($\underline{\phi}$) и ковариационной матрицы $\underline{\Omega}$ условного априорного распределения могут быть заданы точно так же, как и в случае распределения Миннесоты для случая $\lambda_{kron} = 1$ (см. (20), (22) и (23)). \underline{S} выбирается так, чтобы среднее Σ совпадало с фиксированной ковариационной матрицей в априорном распределении Миннесоты. Т.к. безусловное распределение параметров имеет вид:

$$\mathbb{E}(\phi) = \underline{\phi} \quad \text{Var}(\phi) = (\underline{\nu} - m - 1)^{-1}(\underline{S} \otimes \underline{\Omega}), \quad (26)$$

то диагональные элементы \underline{S} выбираются следующим образом:

$$(\underline{S})_{ii} = (\underline{\nu} - m - 1)\hat{\sigma}_i^2 \quad (27)$$

Выбор степеней свободы обратного Уишарта распределения $\underline{\nu}$ в соответствии с:

$$\underline{\nu} \geq \max\{m + 2, m + 2h - T\} \quad (28)$$

обеспечивает существование как априорной дисперсии параметров, так и апостериорной дисперсии прогнозов на горизонте h (см. **kadiyala_karlsson_1997**).

Можно показать, что с учетом функции правдоподобия (9) апостериорное распределение принадлежит тому же классу (см, например, **zellner_1996**):

$$\begin{cases} \Sigma|Y \sim \mathcal{IW}(\bar{S}, \bar{\nu}) \\ \Phi|\Sigma, Y \sim \mathcal{N}(\bar{\Phi}, \Sigma \otimes \bar{\Omega}) \end{cases} \quad (29)$$

где ¹³

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \underline{\nu} + T \\ \bar{\Omega} &= (\underline{\Omega}^{-1} + X'X)^{-1} \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Omega} \cdot (\underline{\Omega}^{-1}\underline{\Phi} + X'Y) \\ \bar{S} &= \underline{S} + \hat{E}'\hat{E} + \hat{\Phi}'X'X\hat{\Phi} + \underline{\Phi}'\underline{\Omega}^{-1}\underline{\Phi} - \bar{\Phi}'\bar{\Omega}^{-1}\bar{\Phi} \\ \hat{\Phi} &= (X'X)^{-1}X'Y \\ \hat{E} &= Y - X\hat{\Phi} \end{aligned}$$

Формула из Шве-дова с обращением суммы?

Существует достаточно популярный альтернативный подход для подсчёта гиперпараметров апостериорного распределения.

Мы обнуляем матрицы \underline{S} и $\underline{\Omega}^{-1}$, а чтобы компенсировать разницу добавляем дополнительные наблюдения в матрицу X и в матрицу Y :

$$X^* = \begin{bmatrix} X^+ \\ X \end{bmatrix}, \quad Y^* = \begin{bmatrix} Y^+ \\ Y \end{bmatrix}$$

При добавлении наблюдений матрицы скалярных произведений $X'X$ и $X'Y$ разлагаются в сумму: $X^{*'}X^* = X^{+'}X^+ + X'X$, $X^{*'}Y^* = X^{+'}Y^+ + X'Y$. В частности,

¹³ Эквивалентная формула (карлсон p15) для \bar{S} , $\bar{S} = \underline{S} + \hat{E}'\hat{E} + (\underline{\Phi} - \hat{\Phi})'(\underline{\Omega} + (X'X)^{-1})^{-1}(\underline{\Phi} - \hat{\Phi})$

добавление нулевых искусственных наблюдений никак не изменяет матрицы $X'X$, $X'Y$ и $Y'Y$. Отметим, что матрицы X и Y входят в гиперпараметры апостериорного распределения только в составе матриц $X'X$, $X'Y$ и $Y'Y$, поэтому абсолютно не важно, в каком порядке добавлять искусственные наблюдения и каким образом по отношению к матрицам X и Y . Можно их добавить в конец матриц X и Y , можно в начало, можно посередине.

Получим новые формулы для апостериорных гиперпараметров:

Матрица \bar{S} пока не вывелась

$$\begin{aligned}\bar{\nu} &= \underline{\nu} + T \\ \bar{\Omega} &= (X^{*'}X^*)^{-1} = (X^{+'}X^+ + X'X)^{-1} \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Omega} \cdot (X^{*'}Y^*) = \bar{\Omega} \cdot (X^{+'}Y^+ + X'Y) \\ \bar{S} &= \hat{E}^{*'}\hat{E}^* \\ \hat{\Phi}^* &= (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}Y^* \\ \hat{E}^* &= Y^* - X^*\hat{\Phi}^*\end{aligned}$$

Другими словами, наблюдения добавляются так, что гиперпараметры апостериорных наблюдений не изменяются.

Чтобы новые формулы совпадали со старыми необходимо, чтобы

$$\begin{cases} X^{+'}X^+ = \underline{\Omega}^{-1} \\ X^{+'}Y^+ = \underline{\Omega}^{-1}\underline{\Phi} \\ \dots \end{cases} \quad (30)$$

Заметим, что новые формулы позволяют трактовать:

1. $\underline{\Phi}$ — как результат построения регрессий Y^+ на X^+ :

$$\underline{\Phi} = \hat{\Phi}^+ = (X^{+'}X^+)^{-1} \cdot (X^{+'}Y^+)$$

2. \underline{S} — как скалярные произведения остатков этих регрессий:

$$\underline{S} = \hat{E}^{+'}\hat{E}^+, \text{ где } \hat{E}^+ = Y^+ - X^+\hat{\Phi}^+$$

3. $\underline{\Omega}^{-1}$ — как скалярные произведения регрессоров из X^+ :

$$\underline{\Omega}^{-1} = X^{+'}X^+$$

4. $\bar{\Phi}$ — как результат построения регрессий Y^* на X^* :

$$\bar{\Phi} = \hat{\Phi}^* = (X^{*'}X^*)^{-1} \cdot (X^{*'}Y^*)$$

5. \bar{S} — как скалярные произведения остатков этих регрессий:

$$\bar{S} = \hat{E}^{*'}\hat{E}^*, \text{ где } \hat{E}^* = Y^* - X^*\hat{\Phi}^*$$

6. $\bar{\Omega}^{-1}$ — как скалярные произведения регрессоров из X^* :

$$\underline{\Omega}^{-1} = X^{*'} X^*$$

Эти условия будут выполнены если добавить наблюдения по схеме:

По аналогии с работами **banbura_al_2010** **berg_henzel_2013** соответствующее априорное распределение вводится путем добавления искусственных наблюдений¹⁴:

$$Y^{NIW} = \begin{bmatrix} \frac{\text{diag}(\delta_1 \sigma_1, \dots, \delta_m \sigma_m)}{\lambda_{tight}} \\ 0_{m(p-1) \times m} \\ \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \\ 0_{1 \times m} \end{bmatrix} \quad X^{NIW} = \begin{bmatrix} \frac{\text{diag}(1, 2^{\lambda_{lag}}, \dots, p^{\lambda_{lag}}) \otimes \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)}{\lambda_{tight}} & 0_{mp \times 1} \\ 0_{m \times mp} & 0_{m \times 1} \\ 0_{1 \times mp} & \frac{1}{\lambda_{const}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

В работах **doan_al_1984** and **sims_1993** было предложено добавить к этим априорным распределениям дополнительную характеристику, введение которой обуславливается возможным наличием во временных рядах единичных корней и коинтеграционных соотношений. Это позволяет исключить появление неправдоподобно большой доли внутривыборочной дисперсии, объясняемой экзогенными переменными **carriero_al_2015**

Модификации априорного распределения

Априорное распределение суммы коэффициентов¹⁵ было предложено в работе **doan_al_1984** Это распределение отражает следующую идею: если переменные в VAR имеют единичный корень, то можно учесть эту информацию, задав априорное распределение, в котором сумма коэффициентов при всех лагах зависимой переменной равна единице (см. **robertson_tallman_1999** и **blake_mumtaz_2012** Другими словами, когда среднее значение лагированных значений какой либо переменной находится на некотором уровне, то это же самое значение, является хорошим прогнозом для будущих значений этой переменной.

Внедрение этого априорного распределения производится путем добавления искусственных дамми-наблюдений по следующей схеме:

$$Y^{SC} = \frac{1}{\lambda_{sc}} [\text{diag}(\delta_1 \mu_1, \dots, \delta_m \mu_m)] \quad (32)$$

$$X^{SC} = \frac{1}{\lambda_{sc}} [(1_{1 \times p}) \otimes \text{diag}(\delta_1 \mu_1, \dots, \delta_m \mu_m) \quad 0_{m \times 1}], \quad (33)$$

¹⁴Формулы, приведенные в самих работах **banbura_al_2010** **berg_henzel_2013** и отражающие введение новых наблюдений, являются частным случаем (31) для $\lambda_{lag} = 1$ и $\lambda_{const} \rightarrow \infty$.

¹⁵sum-of-coefficients prior

где $(1_{1 \times p})$ - вектор-строка из единиц длиной p , μ_i есть i -ая компонента вектора μ , который состоит из средних начальных значений всех переменных¹⁶: $\mu = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p y_t$

Априорное распределение начального наблюдения¹⁷, предложенное в работе **sims_1993** отражает априорную веру в то, что переменные имеют общий стохастический тренд. Для этого вводится единственное дамми-наблюдение такое, что все значения всех переменных равны соответствующему среднему начальных значений μ_i с точностью до коэффициента масштаба: λ_{io} . Это происходит путем добавления в систему дамми-наблюдения следующего вида:

$$Y^{IO} = \frac{1}{\lambda_{io}} [\delta_1 \mu_1, \dots, \delta_m \mu_m] \quad (34)$$

$$X^{IO} = \frac{1}{\lambda_{io}} [(1_{1 \times p}) \otimes (\delta_1 \mu_1, \dots, \delta_m \mu_m) \quad 1], \quad (35)$$

(?) Это априорное распределение приводит к тому, что среднее по каждой переменной есть линейная комбинация всех остальных средних.

Гиперпараметр λ_{io} отражает жесткость указанного априорного распределения. Когда $\lambda_{io} \rightarrow 0$, модель принимает вид, в котором либо все переменные стационарны со средним, равным выборочному среднему начальных условий, либо нестационарны (без дрейфа) и коинтегрированы.

Как и в случае распределения Миннесоты, необходимости использовать алгоритм Гиббса нет, можно генерировать случайную выборку непосредственно из апостериорного распределения. Например, можно применять такой алгоритм:

1. На s -ом шаге сгенерировать очередную итерацию согласно:

$$\begin{aligned} \Sigma^{[s]} &\sim \mathcal{IW}(\bar{S}, \bar{\nu}) \\ \phi^{[s]} &\sim \mathcal{N}(\bar{\phi}; \Sigma^{[s]} \otimes \bar{\Omega}) \end{aligned}$$

2. Увеличить j на единицу и перейти к пункту один

На практике вместо генерирования вектора $\phi^{[s]}$ генерируют сразу матрицу $\Phi^{[s]}$ в два шага:

1. Генерируют матрицу V размера $k \times m$ из независимых стандартных нормальных величин
2. Считают матрицу $\Phi^{[s]}$ по формуле:

$$\Phi^{[s]} = \bar{\Phi} + \text{chol}(\bar{\Omega}) \cdot V \cdot \text{chol}(\Sigma^{[s]})'$$

¹⁶Некоторые авторы для расчета mu рассчитывают среднее по всем наблюдениям, т. е. $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$ (см. **banbura_al_2010** и **carriero_al_2015**). Однако, в соответствии с работой **sims_zha_1998** для расчета среднего используются только первые p наблюдений.

¹⁷dummy initial observation prior

Два ключевых недостатка априорного распределения Миннесоты (отсутствие байесовского оценивания Σ обязательная апостериорная независимость отдельных уравнений системы) решаются при использовании сопряженного нормального - обратного Уишарта распределения. Однако в этом случае параметры априорного распределения для разных уравнений выбираются симметрично. В частности, все коэффициенты при первом лаге зависимой переменной априорно имеют одну и ту же дисперсию λ_{tight}^2 . Хотя обычно эта предпосылка не является слишком ограничивающей, в реальности легко встретиться с задачами, в которых ковариационная матрица априорного распределения не должна быть симметрично сформирована для разных уравнений. Например, довольно известным в литературе является следующий пример (см, **kadiyala_karlsson_1997**). Положим, исследователь хочет учесть в VAR наличие нейтральности денег. При построении модели эта предпосылка может быть учтена наложением такого априорного распределения, в котором все коэффициенты при лагах денег в уравнении для выпуска имеют нулевое матожидание и низкую дисперсию. Однако это означает, что и в других уравнениях дисперсия коэффициентов в априорном распределении будет относительно низкой. Это характеристика может быть нежелательной, и, чтобы этого избежать, априорное распределение можно задать как независимое - обратное Уишарта.

4.6 Независимое нормальное-обратное Уишарта распределение

Этот тип распределений предполагает, что ковариационная матрица параметров может быть произвольной формы:

$$\begin{cases} \phi \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}; \Xi) \\ \Sigma \sim \mathcal{IW}(\underline{S}; \underline{\nu}) \\ \phi \text{ и } \Sigma \text{ независимы} \end{cases} \quad (36)$$

В этом случае можно показать (ссылка [karlsson?](#)), что условные апостериорные распределения имеют вид:

но тут нет доказательства

$$\begin{cases} \phi | \Sigma, Y \sim \mathcal{N}(\bar{\phi}; \bar{\Xi}) \\ \Sigma | \phi, Y \sim \mathcal{IW}(\bar{S}; \bar{\nu}) \end{cases} \quad (37)$$

где¹⁸

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \underline{\nu} + T \\ \bar{S} &= \underline{S} + E' E, \text{ где } E = Y - X \Phi \\ \bar{\Xi} &= (\underline{\Xi}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes X' X)^{-1} \\ \bar{\phi} &= \bar{\Xi} \cdot (\underline{\Xi}^{-1} \underline{\phi} + \text{vec}(X' Y \Sigma^{-1})) \end{aligned}$$

Гиперпараметры априорного распределения могут быть выбраны точно так же, как и в априорном распределении Миннесоты (см. (20) и (21)). При необходимости

¹⁸ Другой вариант записи для $\bar{\phi}$ имеет вид: $\bar{\phi} = \bar{\Xi} \cdot (\underline{\Xi}^{-1} \underline{\phi} + (\Sigma^{-1} \otimes (X' X)) \text{vec } \hat{\Phi})$

неинформативное априорное распределение для коэффициентов при детерминированных переменных переменных можно задать, обнулив соответствующее значение в матрице Ξ^{-1} . Использование произвольной ковариационной матрицы приводит к тому, что исследователю оказываются известны только условные апостериорные распределения для ϕ и Σ . Это обуславливает необходимость использования алгоритма Гиббса для получения реализаций из совместного апостериорного распределения.

Получить Марковскую цепь, сходящуюся к апостериорному распределению можно, например, так:

1. Сгенерировать произвольно стартовую матрицу $\Sigma^{[0]}$, например, единичную
2. На s -ом шаге сгенерировать очередную итерацию согласно:

$$\phi^{[s]} \sim \mathcal{N}(\bar{\phi}^{[s-1]}; \bar{\Xi}^{[s-1]}), \text{ где } \bar{\phi}^{[s-1]} \text{ и } \bar{\Xi}^{[s-1]} \text{ рассчитываются через } \Sigma^{[s-1]} \quad (38)$$

$$\Sigma^{[s]} \sim \mathcal{IW}(\bar{S}^{[s]}; \bar{\nu}), \text{ где } \bar{S}^{[s]} \text{ рассчитываются через } \phi^{[s]} \quad (39)$$

3. Увеличить s на единицу и перейти к пункту два

4.7 Соответствие гиперпараметров в разных работах

DM16	CCM15	BGR10, BH13	KK97	Формула?
λ_{tight}	λ_1	λ	$\sqrt{\pi_1}$	
λ_{kron}	$\lambda_2 = 1$	$\vartheta = 1$	$\sqrt{\frac{\pi_2}{\pi_1}}$	
λ_{lag}	1	1	0.5	
λ_{const}	λ_0	∞	$\sqrt{\pi_3}$	
λ_{exo}	NA	NA	NA	
λ_{sc}	λ_3	τ		
λ_{io}	λ_4	NA		

4.8 Выбор гиперпараметров и числа лагов

Как было показано в работе **demol_al_2008** и подтверждено в других более поздних работах, использование сравнительно большого количества временных рядов требует уменьшения параметра λ_1 с увеличением размерности выборки, что означает наложение более жесткого априорного распределения. На данный момент в литературе используется два подхода к определению оптимальной величины λ_1 . В своей работе мы используем оба и сравниваем качество прогноза.

4.9 Метод регуляризации в соответствии с **banbura_al_2010**

Первый алгоритм был предложен в работе **banbura_al_2010** и он основан на идее о том, что регуляризация должна быть настолько жесткой, чтобы не исключить возможность избыточной параметризации модели, при этом предполагается,

что трехмерная VAR - достаточно простая (parsimonious) модель, не содержащая слишком большого количества параметров. Процедура выбора λ состоит в том, что средний внутривыборочный прогноз для реального ВВП и индекса цен тот же самый, как на первой выборке (на которой происходит) оценивание. Т.е. каждая модель регуляризуется до размера простой VAR. При этом референтной моделью является та, для которой апостериорное распределение не зависит от функции правдоподобия, т. е. для которой $\lambda = 0$. Это означает, что дисперсии всех параметров ϕ равны нулю, т. е. переменные описываются моделью случайного блуждания (RW) со смещением, $y_{i,t} = c + y_{i,t-1} + \varepsilon_t, i = 1, \dots, m$. Обозначим эту модель индексом 0, т.к. $\lambda = 0$. Схема выбора λ состоит из следующих этапов:

1. На первом этапе строятся внутривыборочные однопериодные прогнозы на обучающей выборке и рассчитывается среднеквадратичная ошибка прогноза выпуска ($MSFE_y^0$) и инфляции ($MSFE_\pi^0$).
2. Оценивается трехмерная VAR для $\lambda \rightarrow \infty$ ¹⁹ и рассчитываются среднеквадратичная ошибка прогноза выпуска ($MSFE_y^\infty$) и инфляции ($MSFE_\pi^{\infty,3}$) и показатель $FIT^{\infty,3}$:

$$FIT^{\infty,3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_y^{\infty,3}}{MSFE_y^0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_\pi^{\infty,3}}{MSFE_\pi^0}, \quad (40)$$

3. Оцениваются BVAR модели для m переменных и для большого числа различных λ рассчитываются среднеквадратичные ошибки прогноза для выпуска ($MSFE_y^{\lambda,m}$) и инфляции ($MSFE_\pi^{\lambda,m}$) и показатель $FIT^{\lambda,m}$:

$$FIT^{\lambda,m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_y^{\lambda,m}}{MSFE_y^0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_\pi^{\lambda,m}}{MSFE_\pi^0} \quad (41)$$

4. Оптимальное λ рассчитывается как значение, при котором минимизируется отклонение $FIT^{\lambda,m}$ от $FIT^{\infty,3}$:

$$\lambda_m^* = \arg \min_{\lambda} |FIT^{\lambda,m} - FIT^{\infty,3}| \quad (42)$$

После того как выбрано оптимальное λ для каждой модели, происходит построение вневыборочных прогнозов на оценивающей выборке.

4.10 Метод регуляризации в соответствии с doan_al_1984

Второй алгоритм предложен в работе doan_al_1984 и представляет собой выбор такого параметра λ_1 , который бы максимизировал точность вневыборочного

¹⁹При $\lambda \rightarrow \infty$ оценки BVAR совпадают с оценками VAR методами OLS или ML, т. к. апостериорное распределение параметров в этом случае совпадает с функцией правдоподобия. Считается, что трехмерная VAR содержит достаточно маленькое число параметров, и байесовская регуляризация не требуется.

прогноза на обучающей выборке. Этот выбор сводится к максимизации функции предельной плотности:

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda} \ln p(Y) \quad (43)$$

При этом функция предельной плотности может быть получена путем интегрирования коэффициентов модели:²⁰

$$p(Y) = \int p(Y|\phi)p(\phi)d\phi \quad (44)$$

Если априорное распределение является нормальным — обратным Уишарта, то предельная плотность $p(Y)$ может быть посчитана аналитически (zellner_1996 Bauwens et al,1999; Carriero et al,2012):

$$p(Y) = \pi^{-\frac{T_m}{2}} \times |(I + X\Omega X')^{-1}|^{\frac{N}{2}} \times |S|^{\frac{\nu}{2}} \times \frac{\Gamma_N(\frac{\nu+T}{2})}{\Gamma_N(\frac{\nu}{2})} \times |S + (Y - X\Phi)'(I + X\Omega X')^{-1}(Y - X\Phi)|^{-\frac{\nu+T}{2}}, \quad (45)$$

где $\Gamma_N(\cdot)$ обозначает N -мерную гамма функцию. Выбор числа лагов происходит аналогично путем максимизации по p функции предельной плотности (45):

$$p^* = \arg \max_p \ln p(Y) \quad (46)$$

4.11 Построение прогнозов и сравнение результатов

Оценка байесовских VAR с заданным λ происходит с «rolling window» по 120 наблюдениям, начиная с января 1996 г и заканчивая апрелем 2015г. (первые 12 наблюдений используются для построения лаговых значений в нескольких наиболее ранних подвыборках. Обозначим последнее наблюдение первой выборки (декабрь 2005 г.) как T_0 и последнее доступное наблюдение (апрель 2015г.) за T_1 , а последнее наблюдение каждой оцениваемой подвыборки за T . Мы строим вневыборочные прогнозы на 1, 3, 6, 9 и 12 месяцев вперед. т.е. на дату $T + h$, где $h = 1, 3, 6, 9, 12$. Таким образом количество прогнозов на один шаг оказывается на единицу меньше, чем прогнозов на два шага и т.д.²¹ Для каждой модели m и каждого прогнозного окна h рассчитываются вневыборочные среднеквадратичные ошибки прогноза для индикатора деловой активности ($OMSFE_{ip,h}^{\lambda,m}$), ИПЦ ($OMSFE_{p,h}^{\lambda,m}$) и процентной ставки ($OMSFE_{r,h}^{\lambda,m}$):

$$OMSFE_{var,h}^{\lambda,m} = \frac{1}{T_1 - T_0 - h + 1} \sum_{T=T_0}^{T_1-h} \left(y_{var,T+h|T}^{\lambda,m} - y_{var,T+h} \right)^2, \quad (47)$$

²⁰Т.к. интегрирование происходит по всем коэффициентам, но не по гиперпараметрам априорного распределения ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) и не по числу лагов p , то предельная плотность является функцией $\lambda_j, j = 1 \dots 3$ и p .

²¹Альтернативный метод состоит в том, чтобы посчитать одинаковое количество прогнозов для каждого горизонта h , начиная с $T_0 + 11$, однако это означает определенную потерю информации о прогнозах, и поэтому от этого метода в данной работе было решено отказаться

где $y_{var,T+h}$ - реализованные значения переменной var в момент $T + h$, а $y_{var,T+h|T}^{\lambda,m}$ - прогноз переменной var на горизонте h , построенный в модели с m переменными и параметром общей жесткости λ ; здесь и далее $var = \{ip, p, r\}$.

Далее аналогично рассчитываются среднеквадратичные ошибки вневыборочного прогноза для указанных переменных по модели $RWWN$: $OMSFE_{var,h}^0$ и небайесовской VAR-модели $OMSFE_{var,h}^{\infty,m}$.

Качество прогноза BVAR измеряется с помощью показателей $RW_RMSFE_{var,h}^{\lambda,m}$ и $VAR_RMSFE_{var,h}^{\lambda,m}$, где в первом случае среднеквадратичная ошибка прогноза по BVAR соотносится с ошибкой по $RWWN$, а во втором случае, с ошибкой по VAR:

$$RW_RMSFE_{var,h}^{\lambda,m} = \frac{OMSFE_{var,h}^{\lambda,m}}{OMSFE_{var,h}^0} \quad (48)$$

$$VAR_RMSFE_{var,h}^{\lambda,m} = \frac{OMSFE_{var,h}^{\lambda,m}}{OMSFE_{var,h}^{\infty,m}} \quad (49)$$

4.12 Особенности кодирования

При практической реализации алгоритма Гиббса или Монте-Карло часто приходится обращаться положительно определённые симметричные матрицы. Для этого можно использовать следующий способ:

1. Получить разложение Холецкого для заданной матрицы A

$$A = U'U,$$

где U — верхнетреугольная матрица

2. Обратить матрицу U . Существуют специальные алгоритмы обращения верхнетреугольных матриц.
3. Получить A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = U^{-1}U^{-1'}$$

Однако даже данный способ сопряжён с численными трудностями, если обращаемая матрица плохо обусловлена. Например, при большом количестве эндогенных переменных и большом количестве лагов матрица $X'X$ является плохо обусловленной и для неё может быть численно трудно получить разложение Холецкого. В таком случае мы использовали псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза.

5 Данные

Для расчетов мы используем 24 временных ряда с января 1995г. по апрель 2015г. Границы выборки обусловлены доступностью данных, исходная выборка содержит 244 наблюдения. Полный список взятых временных рядов указан в Приложении 2. После устранения сезонности в рядах, демонстрирующих сезонные колебания, мы логарифмируем всех ряды кроме процентной ставки. Далее происходит проверка на стационарность, для чего используются ADF и KPSS тесты. Такая проверка необходима, для того чтобы определить матожидание априорного распределения для параметров Φ_1 . Следуя методологии других работ, посвященных прогнозированию с помощью BVAR (например ()), мы назначаем $(\Phi_1)_{ii} = 1$ для нестационарных рядов и $(\Phi_1)_{ii} = 0$ для стационарных. На втором этапе мы оцениваем три rolling VAR модели для разного набора переменных и строим по ним прогнозы. Период оценивания составляет всегда 120 месяцев, Прогноз строится на 1, 3, 6 и 12 месяцев. Мы строим VAR для разного количества переменных: для 3, 6 и 24²². Модель с тремя переменными рассматривается как наиболее простая модель, содержащая только самые важные переменные: показатель деловой активности (индекс промышленного производства), индекс цен (подсчитанной с помощью ИПЦ) и инструмента монетарной политики (в качестве прокси для которого мы берем процентную ставку межбанковского рынка). Модель с шестью переменными специфицируется по аналогии со многими монетарными моделями, использовавшимися для структурного анализа различных экономик (Sims, 1992; Kim and Roubini (2000); Bjornland (2008); Uhlig and Scholl (2008) и включает в дополнение к уже указанным переменным валютный курс, денежный агрегат M2 и цены на нефть (последний показатель включен для отражения экспортоориентированности российской экономики). В модель с 24 переменными строится с использованием всех доступных временных рядов.

При определении параметра жесткости распределения по методу **banbura_al_2010** необходимо выделить период, на котором происходит определение λ . Мы определяем λ на самом раннем доступном промежутке: с января 1996г. по декабрь 2005г (первые 12 месяцев используются в качестве лаговых значений переменных для этой регрессии). Количество лагов определяется путем минимизации информационных критериев для обычной VAR на той же самой подвыборке. (что делать с var по 24 рядам??) Далее количество лагов и параметр жесткости фиксируются и используются для построения прогнозов на всех остальных подвыборках. При определении параметра жесткости путем максимизации предельной плотности данных (marginal data density) при оценке каждой BVAR происходит совместный поиск на сетке по λ и по p , и выбираются такие значения, для которых (45) максимально.

²²Обычная VAR для сравнения качества прогноза строится для 3 и 6 переменных

Приложения

Данные

26

Название временного ряда	Тип данных	База (если есть)	Источник
Индекс промышленного производства	Базисный индекс	2010	IFS
Индекс потребительских цен	Базисный индекс	2010	IFS
Индекс занятости в промышленности	Базисный индекс	2010	IFS
Процентная ставка межбанковского рынка	В процентах годовых		IFS
Процентная ставка по кредитам	В процентах годовых		IFS
Индекс реальных денежных доходов	Базисный индекс	январь 1992	ФСГС
Уровень безработицы	В процентах		IFS
Индекс цен на нефть марки Brent	Базисный индекс	2010	IFS
Индекс цен производителей	Цепной индекс		IFS
Ввод в действие новых жилых домов	В тыс.кв.м.		ФСГС
Индекс реальных инвестиций в основной капитал	Базисный индекс	январь 1994	ЦАД
Индекс реальных зарплат	Базисный индекс	январь 1993	ФСГС
Денежный агрегат М2	в млрд. руб.		ЦБ
Реальный эффективный валютный курс	Базисный индекс	2010	IFS
Цена натурального газа	Долл. за млн. БТЕ	2010	IFS
Международные резервы за исключением золота	Млрд. долл.		IFS
Номинальный валютный курс	руб. за долл.		IFS
Заявленная потребность в работниках	Тыс. чел.		ЦАД
Индекс реального объема сельхозпроизводства	Базисный индекс	январь 1993	ЦАД
Индекс реального объема розничной торговли	Базисный индекс	январь 1994	ЦАД
Сальдо консолидированного бюджета			ЦАД
Экспорт товаров	млн. долл.		IFS
Импорт товаров	млн. долл.		IFS

Доступные реализации кода

Источник	Среда	Min	Conj N-IW	Ind N-IW	SoC	IO
Carriero	Matlab	-	?	-	+	+
Blake Mumtaz	Matlab	-	+	+	+	+
Koop Korobilis	Matlab	+	+	+	-	-
Zha	Matlab		?		+	+
Le Sage	Matlab	?				
Sims	Matlab		?	?	+	+
Canova	Matlab		?			
BMR	R	+	-	+	-	-
MSBVAR	R	-	+	-	+	+
bvarr	R	+	+	+	+	+
Sims	R		?	?	+	+
Встроенная функция	EViews	+	+	-	+	+
Встроенная функция	Gauss	?	?	?	?	?
Встроенная функция	Dynare	?	+	?	+	+

1. Carriero: Дамми-наблюдения вводятся как для conj NIW, при этом делает Gibbs sampling, при этом $\bar{\Phi}$ одно и то же, а Σ пересчитывается на каждом шаге в зависимости от предыдущего Φ . При плохо обусловленной матрице $X'X$ используется псевдо-обратная. Имеется странный хак, повторно генерирующий VAR коэффициенты, если собственные числа за пределами единичного круга. <http://cremfi.econ.qmul.ac.uk/efp/info.php>
2. Blake Mumtaz: Называет Миннесотой Ind NIW. Код для conj NIW построен так же, как у Carriero через Gibbs Sampling: разница - добавляет 2 один. строки для дамми при определении коэффициента при константе. http://www.bankofengland.co.uk/education/Pages/ccbs/technical_handbooks/techbook4.aspx
3. Koop Korobilis: Код крайне негибкий. Без правки кода нет возможности прогнозировать больше чем на один шаг, базовые conj N-IW и ind N-IW априорное распределения не содержит гиперпараметров и задаются через фиксированные матрицы. <https://sites.google.com/site/dimitriskorobilis/matlab>
4. Zha: в соответствии со статьей ограничения накладываются на структурную форму VAR, соответственно дается другая интерпретация для некоторых гиперпараметров
5. Sims Недостаточно подробное описание. Нужно прочесть весь код, чтобы что-то модифицировать. <http://sims.princeton.edu/yftp/VARtools/>
6. BMR: Симуляции реализованы в C++. оценивает DSGE. Реализует TVPBVAR. Отличная документация. <http://bayes.squarespace.com/bmr/>

7. MSBVAR: Симуляции реализованы на фортране и C++. Реализует также марковские BVAR с переключением. <https://cran.r-project.org/web/packages/MSBVAR/>
8. bvarr: Сопряжённое нормальное-Уишарта реализовано максимально гибко. При плохо обусловленной матрице $X'X$ используется псевдо-обратная. Код для Миннесоты и независимого нормального Уишарта является переводом кода Koops-Korobilis и потому крайне негибкий. <https://github.com/bdemeshev/bvarr>
9. Eviews: «EViews just ignores the fact that the coefficients were estimated using Bayesian methods, and forecasts the same way as it would a classical model». Коэффициент λ_{kron} равен по умолчанию 0,99 и не может быть изменен. Большую свободу представляет прямое задание ковариационной матрицы. Матожидания коэффициентов при первых лагах могут быть заданы только одинаковыми для всех переменных.
10. Gauss:
11. Dynare: Функция позиционируется как BVAR à la Sims. Оценка возможна только «комплексом», но можно поменять априорное распределение для априорного распределения ковариационной матрицы <http://www.dynare.org/>

Тудушки:

■ стоит ли это писать? можем ли мы быть уверены, что наш — лишен?? . . .	3
■ нужно ли это вообще?	3
■ плотность растёт к необратимым матрицам?	10
■ Формула из Шведова с обращением суммы?	16
■ Матрица \bar{S} пока не вывелась	17
■ но тут нет доказательства	20