**Макроэкономическое прогнозирование с помощью BVAR Литтермана[[1]](#footnote-1).**

**Macroeconomic forecasting with a Litterman’s BVAR model.**

**Демешев Борис Борисович**

ст. преподаватель Национального исследовательского университета Высшей школы экономики

[boris.demeshev@gmail.com](mailto:boris.demeshev@gmail.com), тел.: 89032873422

101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д.20

**Малаховская Оксана Анатольевна**

научный сотрудник

Научно-учебная лаборатория макроэкономического анализа Национального исследовательского университета Высшей школы экономики

[omalakhovskaya@hse.ru](mailto:omalakhovskaya@hse.ru), тел.: 89104451803

101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д.20

JEL codes: C11, E27, E37, E47

Ключевые слова: VAR, BVAR, априорное распределение Миннесоты, макроэкономическое прогнозирование

Аннотация: В работе проводится сравнение прогнозных способностей моделей случайного блуждания, частотной (VAR) и байесовской векторных авторегрессий с априорным распределением Миннесоты (BVAR) по российским квартальным данным 1995 – 2014 г. Максимальное количество переменных, включаемых в модель, равно 14, что требует эндогенного подбора оптимального гиперпараметра регуляризации. Для его определения используется механизм, описанный в работах [Banbura et al., 2010] и [Bloor and Matheson, 2011]. В соответствии с этим механизмом гиперпараметр регуляризации подбирается так, чтобы качество прогнозов BVAR и частотной VAR моделей совпадало при минимальной рассматриваемой размерности модели (три переменных). С увеличением количества лагов частотной VAR модели в возможных пределах (от одного до пяти) ее прогнозная сила растет. Для любой размерности BVAR модели оптимальная величина гиперпараметра регуляризации является робастной к рассматриваемым функциям относительной прогнозной точности.

В результате показано, что на исследуемой выборке BVAR позволяет получить более точный прогноз, чем частотная VAR. Для ключевых макроиндикаторов (индекса промышленного производства, индекса потребительских цен и процентной ставки) на всех рассматриваемых прогнозных горизонтах и независимо от числа переменных в модели среднеквадратичная ошибка прогноза модели BVAR оказывается ниже, чем для частотной VAR. Кроме того, BVAR позволяет получить прогноз с большей точностью, чем модель случайного блуждания для ИПЦ и белого шума для процентной ставки. Однако предсказать индекс промышленного производства с помощью BVAR более точно, чем с помощью модели случайного блуждания, не удается.

Keywords: VAR, BVAR, Minnesota prior, macroeconomic forecasting

Abstract: This paper compares the forecasting performance of random walk, frequentist vector autoregression (VAR), and Bayesian vector autoregression with Minnesota prior (BVAR) models on quarterly Russian data sample running from 1995 to 2014. Maximal number of variables included in the model is equal to 14 that requires an endogenous search of optimal shrinkage hyperparameter. The search procedure follows [Banbura et al., 2010] and [Bloor and Matheson, 2011]. According to the selection method the shrinkage hyperparameter equates the forecasting quality of the frequentist VAR and BVAR for the minimal considered dimension of the model (three variables). The forecasting performance of the frequentist VAR increases with the number of lags within a possible range (from one to five). For any dimension of the BVAR model the optimal shrinkage hyperparameter is robust to considered functions of relative forecasting accuracy.

We show that the BVAR provides a more accurate forecast than the frequentist VAR on the studied sample. For key macro indicators (the industrial production index, consumer price index and the interbank interest rate), forecasting horizons, and all model sizes, the mean squared error of the BVAR is lower than that of the frequentist VAR. Moreover, the results show that the forecast made using the BVAR is more precise than the forecast made using random walk model for the CPI and using white noise model for the interbank rate. However, the BVAR cannot beat the random walk while forecasting the industrial production index.

1. **Введение**

Цель данной работы состоит в сравнении качества конкурирующих прогнозов ключевых макроиндикаторов российской экономики. Прогнозы строятся с помощью простейших одномерных моделей, частотных векторных авторегрессий (VAR, Vector AutoRegression) и байесовских VAR (BVAR, Bayesian VAR). Отличительной чертой работы является эндогенный выбор гиперпараметра BVAR, отвечающего за жесткость ограничения, накладываемого априорным распределением. Для оценивания моделей используются 14 российских макроэкономических временных рядов с сентября 1995 г. по май 2014 г. При сравнении прогнозной силы моделей ключевыми показателями являются индекс промышленного производства, индекс потребительских цен и процентная ставка. В работе строятся точечные прогнозы, и их качество оценивается с помощью среднеквадратичной ошибки.

Построение точных макроэкономических прогнозов является важным условием проведения центральными банками политики, направленной на достижение поставленных целей. В настоящее время одним из наиболее популярных методов для прогнозирования является использование VAR.[[2]](#footnote-2) Получившая свое распространение после работы [Sims, 1980], модель VAR покорила исследователей своей относительной простотой, сочетающейся с неплохими прогнозными способностями.[[3]](#footnote-3)

Оценивание частотной VAR (методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов) таит в себе опасность излишней параметризации. Проблема излишней параметризации состоит в том, что при большом количестве оцениваемых параметров модель может давать точные внутривыборочные прогнозы при плохих вневыборочных. В VAR моделях проблема появляется из-за того, что количество оцениваемых параметров растет квадратично с увеличением размерности модели и линейно с увеличением числа включаемых лагов. Потребность в макромоделях большой размерности вызвана, в частности, тем, что центральные банки развитых государств опираются на большое число макроиндикаторов при проведении политики [Bernanke and Boivin, 2003].

Распространенные методы решения проблемы избыточной параметризации в частотных VAR состоят в использовании динамических факторов (DF, Dynamic Factors) и  BVAR. В DF-моделях на базе большого количества макроэкономических переменных строится небольшой набор искусственных переменных, факторов, максимально сохраняющих в себе информацию об изменчивости исходных. В BVAR проблема избыточной параметризации решается с помощью добавления ограничений на параметры модели в виде априорного закона их распределения. В данной работе использованы BVAR, в том числе из-за отсутствия большого количества длинных российских временных рядов, что затрудняет построение DF–модели.

В работе были получены следующие результаты. Для всех трех ключевых переменных BVAR обеспечивает устойчиво лучший прогноз, чем VAR. BVAR также обеспечивает более точный прогноз для индекса потребительских цен и процентной ставки, чем более простые одномерные модели. Однако для индекса промышленного производства BVAR, оцененная согласно используемому алгоритму, прогнозирует хуже, чем случайное блуждание.

Работа состоит из введения, четырех основных разделов и заключения. В следующем за введением разделе представлен обзор литературы. В разделе 3 кратко изложена суть байесовского подхода, сформулирована используемая BVAR модель и метод её оценивания. В разделе 4 подробно описаны все используемые макроэкономические ряды. В разделе 5 изложены результаты оценивания моделей и приведено сравнение качества прогнозов. В заключении представлены выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. **Обзор литературы**

С практической точки зрения, выбор модели BVAR для анализа обусловлен их потенциально более высокой точностью прогноза в сравнении с частотной VAR. В частности, в работе [Doan et al., 1984] на исследуемой выборке было показано, что BVAR обеспечивают более точные прогнозы, чем частотные VAR и одномерные модели. Статья [Litterman, 1986] продемонстририровала, что прогнозы BVAR успешно конкурируют с прогнозами систем уравнений большой размерности. В работе [Clark and McCracken, 2006] было построено 86 различных прогнозов для 18 моделей трехмерной регрессии (выпуск, инфляция и процентная ставка). Выбор часто делается именно в пользу байесовского оценивания.

Одним из наиболее сложных этапов оценки байесовской модели является выбор вида априорного распределения и его гиперпараметров. Распространенными альтернативами являются априорное распределение Миннесоты (Литтермана), предложенное в работах [Doan et al., 1984] и [Litterman, 1986][[4]](#footnote-4), и сопряженное нормальное – обратное Уишарта распределение. Распределение Миннесоты задаётся меньшим количеством гиперпараметров.

Распределение Миннесоты, представленное в работе [Litterman, 1986] и модифицированное в статье [Doan et al., 1984], не было построено ни на какой теоретической экономической модели, но демонстрировало высокую прогнозную силу благодаря смягчению проблемы избыточной параметризации. Для BVAR небольшой размерности регуляризации, обеспечиваемой распределением Миннесоты, достаточно для улучшения прогнозной силы модели. Однако до последнего времени считалось, что для выборок с большим числом временных рядов наложения только лишь априорного распределения не достаточно и необходимо применять дополнительные ограничения. Ключевую роль в развитии байесовского подхода к анализу рядов высокой размерности сыграла статья [De Mol et al., 2008], в которой было показано, что при увеличении размерности достаточно наложения более узких априорных распределений.

Результат, полученный в работе [De Mol et al., 2008], был развит в статье [Banbura et al., 2010], в которой авторы строят BVAR модели для 3, 7, 20 и 131 переменных и показывают, что модели с большей размерностью демонстрируют лучшие прогнозные способности, чем модели малой размерности и даже FAVAR (Factor Augmented VAR).

Аналогичная модель для Новой Зеландии была предложена в работе [Bloor and Matheson, 2010], в которой было построено три BVAR модели (с 9, 13 и 35 переменными) и сделан вывод, что BVAR обладает более высокой прогнозной способностью, чем несколько одномерных и частотных VAR моделей.

Отталкиваясь от вывода, полученного в работе [Banbura et al., 2010] о том, что модель BVAR на большой выборке продемонстрировала более точный прогноз, чем FAVAR, автор статьи [Koop, 2013] сравнил прогнозные способности BVAR на базе других априорных распределений с факторными моделями и также сделал вывод в пользу BVAR.

В этом же ключе была написана работа [Beauchemin and Zaman, 2011]. Авторы использовали такое же априорное распределение, как [Banbura et al., 2010] и [Bloor and Matheson, 2010] для оценки BVAR на американских данных, однако с иным алгоритмом выбора гиперпараметров распределения. В работе было показано, что на рассматриваемой выборке для всех переменных, кроме ставки по федеральным фондам, BVAR обеспечивает значительно более точный прогноз, чем случайное блуждание со смещением.

Несмотря на широкое распространение байесовских методов в англоязычной научной литературе, на данный момент они крайне редко используются для анализа российской статистики. Обзор методов макроэкономического прогнозирования, включая краткое описание BVAR c априорным распределением Миннесоты, можно найти в статье [Пестова, Мамонов, 2016]. В работе [Дерюгина, Пономаренко, 2015] авторы использовали иерархическую версию BVAR с сопряженным нормальным – обратным Уишарта априорным распределением. Рассматриваемая иерархическая версия BVAR оказалась лучшей из сравниваемых моделей. В статье [Ломиворотов, 2015] прогнозы строились с помощью BVAR с сопряженным нормальным – обратным Уишарта распределением. Результаты прогнозирования на рассматриваемой выборке свидетельствуют в пользу BVAR. В работе [Ломиворотов, 2014] BVAR применялась для структурного анализа и определения основных каналов трансмиссии внешних шоков и кредитно-денежной политики. С целью структурного анализа российской экономики BVAR также оценивались в исследовании [Mumtaz et al, 2012].

Читателю, желающему глубже ознакомиться с теорией оценки BVAR на английском языке, рекомендуется обратиться к таким обзорам как [Karlsson, 2013; Kadyiala and Karlsson, 1997; Ciccarelli and Rebucci, 2003]. На русском языке общая теория байесовского оценивания представлена в статье [Айвазян, 2008], а применение байесовского подхода к VAR – в работе [Демешев, Малаховская, 2016].

## **Метод анализа**

Пусть  вектор случайных переменных. Векторная авторегрессия может быть представлена в виде:

1.  ,

где  – гауссовский белый шум размерности  с ковариационной матрицей ,  – вектор констант размерности  и  – матрицы параметров размерности состоящие из элементов , где – номер уравнения, – номер переменной,  – номер лага, 

Классическая (частотная) оценка VAR может быть проведена последовательным применением МНК к каждому из уравнений системы.

Концептуальное отличие байесовского подхода от частотного заключается в том, что сами параметры модели предполагаются случайными величинами. Помимо описания модели, исследователь формулирует своё изначальное мнение об её параметрах в виде априорного распределения. Формула Байеса позволяет получить условное распределение параметров модели с учетом полученных наблюдений. Это условное распределение называется апостериорным. Из формулы Байеса следует, что апостериорная плотность распределения параметров пропорциональна произведению априорной плотности и функции правдоподобия:

(2) *,*

где  – апостериорная плотность параметров модели, обозначаемых , при условии имеющихся данных ,  – функция правдоподобия,  – априорная плотность распределения параметров, знак  означает пропорциональность левой и правой частей выражения с точностью до сомножителя, не зависящего от .

В нашей работе мы строим байесовские векторные авторегрессии с априорным распределением Миннесоты. Незначительная модификация по отношению к [Litterman, 1986] выражается в том, что часть рядов предполагаются стационарными, что отражается в априорном распределении параметров матрицы 

Несмотря на большое количество параметров в модели, матрицы коэффициентов и ковариационная матрица , априорное распределение Миннесоты задается сравнительно небольшим количеством гиперпараметров: Априорное распределение элементов матриц  предполагается независимым нормальным.

Диагональные элементы матрицы :

1. 

Диагональные элементы матриц  (т. е. :

1. *,*

Недиагональные элементы матриц  (т. е. :

1. 

Ковариационная матрица ошибок  предполагается диагональной и известной:

1. 

Априорное распределение параметра при единичном векторе предполагается неинформативным.

Мы следуем [Banbura et al., 2010] и устанавливаем  для всех нестационарных рядов и  для всех остальных. Ключевым параметром, отвечающим за «жесткость» априорного распределения (и, как следствие, за относительный вес априорного распределения при формировании апостериорного), является . Чем ближе  к 0, тем меньшее влияние на апостериорное распределение оказывают фактические данные и тем ближе оно к априорному. При стремлении  к бесконечности апостериорное среднее параметров приближается к оценке простого метода наименьших квадратов. Ключевой результат работы [DeMol et al., 2008], подтвержденный [Banbura et al.,2010] состоял в том, что должно зависеть от размерности выборки, т.е. от  С увеличением  должно происходить сокращение , для того чтобы не происходило излишней параметризации модели.

Функция  показывает, насколько быстро сокращается дисперсия параметров при увеличении номера лага. Это означает, что для лагов высоких порядков априорное распределение параметров становится более «сконцентрированным» вокруг нулевого значения и отражает предпосылку о том, что влияние более далеких лагов на сегодняшние значения менее вероятно, чем влияние более близких.

В качестве гиперпараметра  используют оценку дисперсии соответствующей компоненты вектора . В данной работе оценка строится с помощью AR(p) для каждой переменной в отдельности. Соотношение дисперсий  необходимо учесть при определении априорной дисперсии, т.к. разные ряды могут иметь разные единицы измерения и разную изменчивость.

Параметр  показывает, насколько информация о лагах других переменных менее важна, чем информация о собственных лагах переменной.

В данной работе мы накладываем только априорное распределение Миннесоты и оставляем анализ BVAR c альтернативным априорным распределением для будущих исследований [Demeshev and Malakhovskaya, 2015].

Основная выборка состоит из 14 временных рядов с сентября 1995 г. по май 2014 г. (подробное описание рядов см. в следующем разделе), исходная выборка содержит 225 наблюдений.

В выборке можно выделить несколько составных частей. Первые 120 наблюдений (с сентября 1995 г. по август 2004 г.), обучающая часть выборки, используются для подбора априорного гиперпараметра . Последние 24 наблюдения (с июня 2012 г. по май 2014 г.), тестовая часть выборки, используются для сравнения прогнозной силы исследуемых моделей. При этом модели оцениваются на скользящей выборке длиной в 120 наблюдений. Например, при построении прогноза на три месяца вперёд на июнь 2012 г., модели будут оцениваться по данным с апреля 2002 г. по март 2012 г.

После перехода к логарифмам для всех рядов, кроме процентной ставки и уровня безработицы, мы устраняем сезонность в рядах, демонстрирующих сезонные колебания. Далее на всей выборке кроме тестовой части происходит проверка на стационарность, для чего используются ADF (Augmented Dickey–Fuller) и KPSS (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin) тесты. Такая проверка необходима, для того чтобы определить априорное математическое ожидание параметров, стоящих на главной диагонали . Следуя методологии базовой работы, мы назначаем  = 1 для нестационарных рядов и  = 0 для стационарных.

На втором этапе мы оцениваем три обычных VAR модели в сокращенной форме для разного набора переменных и строим по ним прогнозы. Базовый период оценивания составляет 201 месяц (с сентября 1995 г. по май 2012 г.), период прогноза составляет 24 месяца (с июня 2012 г. по май 2014 г.). Мы строим VAR для 5 и 6 переменных по аналогии со многими монетарными моделями, использовавшимися для структурного анализа различных экономик [Sims, 1992; Kim and Roubini, 2000; Bjornland, 2008; Uhlig and Scholl, 2008]. В модель с 5 переменными мы включаем показатель деловой активности (индекс промышленного производства), индекс цен (подсчитанной с помощью ИПЦ), инструмента монетарной политики (в качестве прокси для которого мы берем процентную ставку межбанковского рынка), валютный курс и денежный агрегат М2. В модель с 6 переменными мы включаем дополнительно цены на нефть. Количество лагов определяется путем минимизации информационных критериев. Прогноз строится на 1, 3, 6 и 12 месяцев.

Для определения  и относительного качества прогноза мы используем обычную для такого рода моделей схему [Banbura et al.,2010], предполагающую, что референтной моделью является та, для которой . Это означает, что дисперсии всех параметров ,  равны нулю, т. е. те переменные, которые были признаны стационарными, описываются моделью белого шума (WN, White Noise) с константой ), а те переменные, которые были признаны нестационарными, описываются моделью случайного блуждания (RW, Random Walk) со смещением ). Мы будем называть эту модель  и обозначать индексом 0 (т.к. ).

Схема выбора и оценки качества прогноза состоит из следующих этапов:

1. На первом этапе строятся внутривыборочные однопериодные прогнозы на обучающей выборке и рассчитывается среднеквадратичная ошибка прогноза (MSFE, Mean Squared Forecast Error) для показателя деловой активности ), индекса цен () и процентной ставки ).
2. Затем на обучающей выборке оценивается частотная VAR-модель для трех переменных. Т.к. оценки байесовской VAR совпадают с оценками метода наименьших квадратов при , то среднеквадратичные ошибки прогноза по этой модели для показателя деловой активности, индекса цен и процентной ставки мы будем обозначать как  ,  и соответственно.
3. Далее рассчитываются показатели  и :

(8) 

(9) 

Величина , где , показывает, насколько в среднем по  переменным частотная VAR прогнозирует хуже, чем модель RWWN.

В работах [Banbura et al. 2010] и [Bloor and Matheson, 2011] используется показатель , сравнивающий качество прогнозов для трех рядов: объема выпуска, уровня цен и процентной ставки. Помимо  в данной работе также используется показатель , сравнивающий качество прогнозов переменных, наиболее важных для макроэкономической политики: выпуска и индекса цен. Использование разных показателей  позволяет проверить робастность результатов.

На следующем этапе на обучающей выборке оцениваются BVAR модели для 5, 6 и 14 переменных (обозначаем их индексом ) и для большого числа различных  рассчитываются среднеквадратичные ошибки прогноза для индекса промышленного производства , индекса цен  и процентной ставки  , а также показатели 

(10) 

(11) 

Величина , где , показывает, насколько в среднем по  переменным BVAR, оцененная по переменным с гиперпараметром , прогнозирует хуже, чем модель RWWN.

1. Оптимальное рассчитывается как значение, при котором минимизируется отклонение  от :

(12) 

(13) 

После того как выбрано оптимальное значение  для каждой модели, происходит построение вневыборочных прогнозов для тестовой части выборки.

1. Будем строить прогнозы на 1, 3 и 6 месяцев . Тогда максимальная длина прогноза  равна 6, Обозначим начало тестовой части выборки (июнь 2012 г.) как  и ее окончание (май 2014 г.) за . Вневыборочные прогнозы строятся для каждого момента времени от  до . Оценка байесовских VAR с заданным  происходит с помощью скользящего окна по 120 наблюдениям от момента  до момента времени .
2. Для каждой модели и каждого прогнозного окна  рассчитываются вневыборочные среднеквадратичные ошибки прогноза (Out-of-sample MSFE) для индикатора деловой активности  индекса потребительских цен  и процентной ставки :

(14) 

(15) 

(16) 

где , и – реализованные значения в момент  индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки соответственно и

 ,  и  – прогноз для периода , построенный по наблюдениям с момента  до момента  по модели  с использованием параметра  для индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки соответственно.

1. По аналогии с предыдущим пунктом рассчитываются среднеквадратичные ошибки вневыборочного прогноза для индикатора деловой активности ), индекса цен  и процентной ставки ) по модели RWWN и по обычной VAR-модели (,  и ) соответственно.
2. Качество прогноза BVAR для индекса промышленного производства измеряется с помощью относительных показателей  и , где в первом случае среднеквадратичная ошибка прогноза по BVAR соотносится с ошибкой по RWWN, а во втором случае, с ошибкой по VAR (Relative MSFE). Аналогично рассчитываются показатели качества прогноза для индекса потребительских цен  и ) и процентной ставки ( и .

(17) 

(18) 

(19) 

(20) 

(21) 

(21) 

Изменение  и  с изменением числа переменных в модели и прогнозного окна помогает сделать выводы о качестве прогноза BVAR по отношению к RWWN и обычной VAR.

## **4 Данные**

Для оценки модели и построения прогнозов использовалось 14 российских макроэкономических временных рядов. Источником данных послужили базы Федеральной службы государственной статистики (ФСГС), Центрального банка РФ, IFS (International Financial Statistics) Международного валютного фонда и Центра анализа данных НИУ-ВШЭ.[[5]](#footnote-5) Все ряды изначально не содержали сезонной корректировки. Начало и конец выборки определялись доступностью данных.

**Таблица 1. - Источники данных.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название макроиндикатора | Тип данных | База (если есть) База(если есть) | Источник |
| Индекс промышленного производства | базисный индекс | 2010 | IFS |
| Индекс потребительских цен | базисный индекс | 2010 | IFS |
| Индекс занятости в промышленности | базисный индекс | 2010 | IFS |
| Процентная ставка межбанковского рынка | в процентах годовых |  | IFS |
| Индекс реальных денежных доходов | базисный индекс | январь 1992 г. | ФСГС |
| Уровень безработицы | в процентах |  | IFS |
| Индекс цен на нефть марки Brent | базисный индекс | 2010 | IFS |
| Индекс цен производителей | цепной индекс |  | IFS |
| Ввод в действие новых жилых домов | в тыс. кв. м. |  | ФСГС |
| Индекс реальных инвестиций в основной капитал | базисный индекс | январь 1994 г. | ЦАД |
| Индекс реальных зарплат | базисный индекс | январь 1993 г. | ФСГС |
| Денежный агрегат М2 | в млрд. руб. |  | ЦБ |
| Индекс РТС | в пунктах | сентябрь 1995 г. | ЦАД |
| Реальный эффективный валютный курс | базисный индекс | 2010 | IFS |

Цепной индекс цен производителей был для дальнейших расчетов превращен в базисный.

## **5 Результаты**

Прежде всего, мы берем логарифмы всех рядов, кроме тех, что выражены в процентах, т.е. всех, кроме процентной ставки и уровня безработицы). Далее проводится сезонная корректировка всех рядов, которые потенциально могут испытывать сезонные колебания (индекс промышленного производства, индекс потребительских цен, индекс занятости в промышленности, индекс реальных денежных доходов, индекс цен производителей, ввод в действие новых жилых домов, индекс реальных инвестиций в основной капитал и индекс реальных заработных плат). Корректировка производится программой X13-ARIMA-SEATS, т. е. наиболее современным из всех существующих методов сезонной корректировки, разработанным в Банке Испании и поддерживаемом сейчас бюро Census [U. S. Census Bureau, 2006].

Далее на всей выборке кроме тестовой части все ряды проверяются на нестационарность, для чего используются KPSS и ADF–тесты. В обоих случаях уровень значимости фиксируется на 5%. В случае несоответствия выводов указанных тестов мы ориентируемся на ADF-тест и получаем, что все ряды можно считать нестационарными, кроме межбанковской процентной ставки. Это означает, что при формировании вектора  мы присваиваем значения  всем переменным, кроме процентной ставки, тогда как для процентной ставки .

На следующем этапе на обучающей выборке мы строим модель RWWN и считаем среднеквадратичную ошибку прогноза для индекса промышленного производства ), индекса потребительских цен () и процентной ставки (). Затем мы строим модели векторной авторегрессии на обучающей выборке и также считаем соответствующие ошибки прогноза  , и В отличие от научных работ, на которые мы опираемся, мы считаем () не только для различных моделей (содержащих 3, 5 и 6 переменных), но и для разного количества лагов (от 1 до 5). Максимальное количество лагов (5) было определено в соответствии с информационными критериями. Для моделей с тремя переменными в соответствии с критериями SC и HQ следовало выбрать 5 лагов, а в соответствии с AIC оптимальный выбор был равен 10 лагам. Мы ориентируемся на HQ и SQ критерии, т. к. известно, что при небольшой размерности VAR модели AIC выбирает слишком большое число лагов с положительной вероятностью [Lutkepohl, 2005, стр. 150]. Далее мы рассчитываем показатели  и  по формулам (8) и (9) для модели с тремя переменными и для каждого количества лагов:

**Таблица 2. Переменная** 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Лаг | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,928 | 0,857 | 0,808 | 0,676 | 0,524 |
|  | 0,736 | 0,683 | 0,629 | 0,521 | 0,419 |

Полученные величины показывают, во сколько раз прогноз, построенный по VAR, оказывается точнее (если мерой точности прогноза выступает ). Мы получили не противоречащие логике результаты: с увеличением количества лагов в модели происходит увеличение количества оцениваемых параметров, и точность прогноза возрастает. Для дальнейших расчетов мы используем количество лагов, равное 5.

Далее на обучающей выборке мы оцениваем BVAR модели для 5, 6 и 14 переменных[[6]](#footnote-6) для каждого возможного  из промежутка от 0 до 2 с шагом 0,01 и для каждой модели рассчитываем ,  , , , . Таким образом мы получаем 603 значения  и столько же . Наконец, для каждой модели мы выбираем такие значения , которые минимизирует отклонение  от  и  от . Полученные результаты показаны в таблице.

**Таблица 3. - Оптимальные значения** 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  | 0,62 | 0,34 | 0,14 |
|  |  | 0,58 | 0,34 | 0,14 |

Далее мы переходим к шагам 6 – 8 из описанной выше схемы и с помощью скользящей векторной авторегрессии по 120 наблюдениям строим прогнозы на тестовой части выборки. На последнем этапе мы строим среднеквадратичные ошибки прогноза для каждой из 3 переменной, для каждого прогнозного окна и каждой модели. Эта процедура для каждой модели повторяется для оптимального , для  (RWWN) и для  (обычная VAR).

Наконец, для каждого прогнозного окна и каждой переменной мы находим соотношения среднеквадратичной ошибки прогноза для BVAR к среднеквадратичной ошибке прогноза для RWWN и обычной VAR соответственно. Полученные значения показаны в таблицах 4 и 5.

**Таблица 4. Отношение среднеквадратичных ошибок BVAR к RWWN**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Переменная | h |  |  |  |  |
| Индекс потребительских цен | 1 | 0.73 | 0.56 | 0.63 | 0.80 |
| Индекс потребительских цен | 3 | 0.86 | 0.69 | 0.69 | 0.77 |
| Индекс потребительских цен | 6 | 0.76 | 0.60 | 0.56 | 0.64 |
| Процентная ставка | 1 | 0.15 | 0.27 | 0.22 | 0.16 |
| Процентная ставка | 3 | 0.20 | 0.40 | 0.47 | 0.36 |
| Процентная ставка | 6 | 0.26 | 0.37 | 0.47 | 0.42 |
| Индекс промышленного производства | 1 | 1.51 | 1.78 | 1.72 | 1.35 |
| Индекс промышленного производства | 3 | 1.33 | 1.85 | 1.89 | 2.41 |
| Индекс промышленного производства | 6 | 0.75 | 1.28 | 0.85 | 2.42 |

**Таблица 5. Отношение среднеквадратичных ошибок BVAR к VAR**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Переменная | h |  |  |  |  |
| Индекс потребительских цен | 1 | 1 | 0.90 | 1.00 | 0.44 |
| Индекс потребительских цен | 3 | 1 | 0.96 | 0.93 | 0.47 |
| Индекс потребительских цен | 6 | 1 | 0.94 | 0.92 | 0.45 |
| Процентная ставка | 1 | 1 | 0.81 | 0.57 | 0.19 |
| Процентная ставка | 3 | 1 | 0.94 | 0.79 | 0.38 |
| Процентная ставка | 6 | 1 | 0.90 | 0.79 | 0.38 |
| Индекс промышленного производства | 1 | 1 | 0.80 | 0.79 | 0.26 |
| Индекс промышленного производства | 3 | 1 | 0.78 | 0.68 | 0.41 |
| Индекс промышленного производства | 6 | 1 | 0.77 | 0.40 | 0.29 |

Таблица 5 показывает отношение среднеквадратичных ошибок прогноза для BVAR к RWWN. Для процентной ставки и индекса потребительских цен отношение  для всех моделей и всех горизонтов прогнозирования меньше единицы, что свидетельствует о том, что для указанных переменных BVAR обеспечивает более высокую точность прогноза. Следует при этом отметить, что ни для одной переменной не прослеживается монотонного снижения относительной ошибки с увеличением количества включенных в модель переменных. Аналогично не прослеживается никакого монотонного изменения относительной ошибки ни с увеличением, ни с сокращением прогнозного окна. Что касается, индекса промышленного производства, то практически во всех ячейках таблицы стоят величины больше единицы, что говорит о том, что предложенная модель не может улучшить качество прогноза этого показателя по сравнению с моделью случайного блуждания со сдвигом.

В Таблице 6 показано отношение среднеквадратичных ошибок прогноза для BVAR к VAR. Здесь результаты более обнадеживающие. Для всех моделей с количеством переменных выше трех и всех прогнозных окон (за единственным исключением прогноза индекса потребительских цен на один период по модели с 6 переменными) полученное соотношение меньше единицы, что говорит о лучшей предсказательной способности модели с байесовской регуляризацией, чем без нее. Что касается прогноза индекса потребительских цен на один период по модели с 6 переменными, то соотношение ошибок прогноза равно единице, что говорит о том, что BVAR не уступает в качестве прогноза VAR. Важным результатом работы является то, что соотношение ошибок монотонно снижается с ростом переменных модели, при этом имеет место резкое снижение относительных ошибок прогноза для модели с 14 переменными по отношению к моделям с 5 и 6 переменными, что подтверждает на российских данных идею о привлекательности для прогноза моделей с большим количеством переменных.

## **6 Заключение**

Данное исследование посвящено прогнозированию индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки для российской экономики в модели байесовской векторной авторегрессии. Мы отталкивались от утверждения, высказанного в работе [De Mol et al., 2008] и эмпирически проверенного в работе [Banbura et al., 2010] о том, что точность прогнозов возрастает с увеличением числа входящих в модель переменных при условии сокращения параметра, отвечающего за байесовскую регуляризацию, то есть при условии сужения априорного распределения параметров.

Эта работа была построена на ежемесячных данных 1995 – 2014 г. Для определения оптимального параметра регуляризации был использован механизм, описанный в работах [Banbura et al., 2010] и [Bloor and Matheson, 2011]. Интересный результат расчетов заключаются в том, что в моделях с 6 и 14 переменными оптимальный параметр регуляризации не меняется (с точностью до одной сотой) в зависимости от того, ориентируемся ли мы на две (индекс промышленного производства и индекс потребительских цен) или три переменных (дополнительно добавляется процентная ставка межбанковского рынка). В модели с пятью переменными разница составляет всего 0,04.

Окончательные результаты данной работы мы расцениваем как смешанные. По отношению к обыкновенной векторной авторегрессии модель BVAR дает устойчиво лучшие прогнозы при числе переменных в модели не менее пяти. Более того, отношение среднеквадратичных ошибок прогноза уменьшается с ростом числа переменных в модели и значительно меньше для модели с 14, чем для модели с 5 и 6 переменными для трех рассматриваемых переменных и всех анализируемых прогнозных окон. Этот результат свидетельствует о высоком потенциале использования моделей с большим числом переменных.

Кроме того, BVAR обеспечивает более точный прогноз по сравнению с моделью случайного блуждания (белого шума для межбанковской процентной ставки) для процентной ставки и индекса потребительских цен. Этот результат верен для всех рассмотренных в работе моделей (с 3, 5,6 и 14 переменными) и для всех прогнозных окон. При этом уменьшение среднеквадратичной ошибки прогноза может быть весьма значительным. К примеру, соотношение  для BVAR к RWWN для прогноза на 1 период составляет 0,15 для модели с тремя переменными, что свидетельствует о значительном повышении точности прогнозирования. Однако в данном случае не прослеживается монотонное снижение относительных ошибок прогноза с увеличением числа переменных в модели. Кроме того, для индекса промышленного производства модель BVAR дает устойчиво худший прогноз, чем модель случайного блуждания.

Продолжение данной работы может состоять в проверке робастности результатов по отношению к другим параметрам Миннесоты-распределения, другим априорным распределениям, числу включенных в модель лагов и т.д.

## **1.7 Список литературы**

Айвазян С.А. (2008) Байесовский подход в эконометрическом анализе. *Прикладная эконометрика*, 1(9): 93-130

Демешев Б.Б., Малаховская О.А. (2016) Картографирование BVAR. *Прикладная эконометрика*, 3(43): 118-141

Дерюгина Е.Б., Пономаренко А.А. (2015) Большая байесовская векторная авторегрессионная модель для российской экономики. Серия докладов об экономических исследованиях, 1, 1-23

Ломиворотов Р.В. (2015) Использование байесовских методов для анализа денежно-кредитной политики в России. *Прикладная эконометрика*, 2(38), 41-63

Ломиворотов Р.В. (2014) Влияние внешних шоков и денежно-кредитной политики на экономику России. *Вопросы экономики*, 11, 122-139

Пестова А.А., Мамонов М.Е. (2016) Обзор методов макроэкономического прогнозирования: в поисках перспективных направлений для России. *Вопросы экономики*, 6, 45-76

Aastveit, Are, Jore and Ravazzolo (2016) “Identification and real-time forecasting of Norwegian business cycles”, *International Journal of Forecasting*, 32(2), 283-292

Arino and Franses (2000) “Forecasting the Level of Vector Autoregressions of Log Transformed,” *International Journal of Forecasting*, 16, 111–116

Banbura, Giannone and Reichlin (2010) “Large Bayesian vector auto regressions”, *Journal of Applied Econometrics,* vol. 25, issue 1, 71-92

Beaucheman, Zaman (2011) “A medium scale forecasting model for monetary policy”, *Federal Reserve Bank of Cleveland working paper No 1128*

Bernanke and Boivin (2003) Monetary policy in a data-rich environment, *Journal of Monetary Economics,* vol. 50, issue 3, 525-546

Bjornland, H. (2008) “Monetary Policy and Exchange Rate Interactions in Small Open Economy, *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 110, issue 1, 197 -221.

Bloor and Matheson (2010) “Real-time conditional forecasts with Bayesian VARs: An application to New Zealand”, *The North American Journal of Economics and Finance,* vol. 22, issue 1, 26-42

Cheong and Lee (2014) “Forecasting with a parsimonious subset VAR model”, *Economics Letters*, vol. 125, issue 2, 167-170

Ciccarelli and Rebucci (2003) “BVARs: A survey of the recent literature with an application to the European Monetary System”, Rivista di Politica Economica, vol. 93, issue 5, 47-112

Clark and McCracken (2006) “Forecasting with small macroeconomic VARs in the presence of instabilities”, *Finance and Economic Discussion Series from Board of Governors of Federal Reserve System*

De Gooijer and Hyndman (2006) “25 years of time series forecasting”, *International Journal of Forecasting*, vol. 22, issue 3, 443-473.

De Mol, Giannone and Reichlin (2008) “Forecasting using a large number of predictors: is Bayesian regression a valid alternative to principal components?” *Journal of Econometrics,* 146, 318-328

Demeshev and Malakhovskaya (2015) “Forecasting Russian Macroeconomic Indicators with BVAR”, manuscript

Doan, Litterman and Sims (1984) “Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions, *NBER Working paper No 1202*

Funke (1990) “Assessing the forecasting accuracy of monthly vector autoregressive models: The case of five OECD countries”, *International Journal of Forecasting*, 1990, 6, (3), 363-378

Garratt, Lee and Shields (2016) “Forecasting global recessions in a GVAR model of actual and expected output”, International Journal of Forecasting, 32(2), 374-390

Huber (2016) “Density forecasting using Bayesian global vector autoregression with stochastic volatility”, International Journal of Forecasting, 32(3), 818-837

Kadiyala, Karlsson S. (1997) “Numerical methods for estimation and inference in Bayesian VAR-models”, *Journal of Applied Econometrics,* 12(2), 99–132.

Karlsson (2013) “Forecasting with Bayesian vector autoregressions”, Handbook of Economic Forecasting 2, part B., 791-897

Kim, S and Roubini N. (2000) “Exchange rate anomalies in the industrial countries: A solution with a Structural VAR Approach”, *Journal of Monetary Economics*, 45, 561-586

Koop (2013) “Forecasting with Medium and Large Bayesian VARS*”, Journal of Applied Econometrics,* 2013, vol. 28, issue 2, 177-203

Litterman (1986) “Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions: five years of experience”,  *Journal of Business and Economic Statistics*, 4, 25-38

Lutkepohl (2005) New Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, 764p.

Mumtaz, Solovieva and Vasilieva (2012) “Asset prices, credit and the Russian economy”, Centre for Central Banking Studies, Bank of England, 1-21

Robertson, Tallman (1999) “Vector autoregressions: forecasting and reality”, *Economic Review,* Q1, 4-18

Scholl, Uhlig (2008) New evidence on the puzzles: Results from agnostic identification on monetary policy and exchange rates, *Journal of International Economics,* vol. 76, issue 1, 1-13

Simkins (1995) Forecasting with vector autoregressive (VAR) models subject to business cycle restrictions, *International Journal of Forecasting,* vol. 11, issue 4, 569-583

Sims, C. (1980) “Macroeconomics and Reality”/*Econometrica,* vol. 48, issue 1, p1-48.

Sims, C. (1992) Interpreting the macroeconomic time series facts, *European Economic Review,* 36, 975-1011

U. S. Census Bureau (2006). X–13 A–S Reference Manual version 0.3. Statistical Research Division, Washington

Waggoner and Zha (1999) “A Gibbs sampler for structural vector autoregressions”, *Journal of Economic Dynamics and Control,* 28, 349-366

1. Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году. [↑](#footnote-ref-1)
2. Среди последних работ можно назвать [Aastveit et al., 2016; Garratt et al., 2016; Huber, 2016; Cheong and Lee, 2014]. [↑](#footnote-ref-2)
3. Описание других методов прогнозирования временных рядов, используемых в экономике и финансах, можно найти в обзорной работе [De Gooijer and Hyndman, 2006]. [↑](#footnote-ref-3)
4. Т.к. распределение Миннесоты было предложено в работе Роберта Литтермана, то для экономии места в данной работе BVAR c априорным распределением Миннесоты мы называем BVAR Литтермана. [↑](#footnote-ref-4)
5. Скачивание происходило из IFS и ЦАД НИУ ВШЭ, однако, если данные был взяты из ЦАД, то в таблице указан первоначальный источник, т. е. либо Центральный банк, либо ФСГС. Индекс реальных инвестиций рассчитан ЦАД по данным ФСГС. [↑](#footnote-ref-5)
6. Мы не проводим описанную далее процедуру поиска оптимального  для модели по трем переменным, т. к. для нее по построению следует, что оптимальное  равно бесконечности. [↑](#footnote-ref-6)