Hernández Sandoval Kelly Pamela No. Cta. 312297473

Ejercicios de Examen 2

GeoMaC

Ejercicio 1

(a) Calcule los coeficientes A, B, C de One-sided-D_{+2} y diga por qué es de orden $O(h^2)$

$U_i' = AU_{i+2} + BU_{i+1} + CU_i$ → Se emplean dos puntos a la derecha de i

Consideremos que

$x_0 + h = x_{i+1}$ $x_0 + 2h = x_{i+2}$

$x_{i+1} - x_0 = h$ $2h = x_{i+2} - x_0$

Aplicando expansión por series de Taylor

$$U_{i+1} = U_i + hU_i' + \frac{(h)^2 U_i''}{2!} + \frac{(h)^3 U_i'''}{3!} + O(h^4)$$

$$= U_i + hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2} + \frac{h^3 U_i'''}{3!} + O(h^4)$$

$$U_{i+2} = U_i + (2h)U_i' + \frac{(2h)^2 U_i''}{2!} + \frac{(2h)^3 U_i'''}{3!} + O(h^4)$$

$$= U_i + 2hU_i' + 2h^2 U_i'' + \frac{4h^3 U_i'''}{3} + O(h^4)$$

sólo se empleará hasta la 2ª derivada

Sustituyendo U_{i+1} y U_{i+2} en U_i'

$$U_i' = A(U_i + 2hU_i' + 2h^2 U_i'' + \dots) + B\left(U_i + hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2} + \dots\right) + CU_i$$

Agrupando términos

$$U_i' = (A+B+C)U_i + (2A+B)hU_i' + \left(2A + \frac{B}{2}\right)h^2 U_i''$$

El orden es proporcional a h^2 en este caso ∴ $O(h^2)$

Se desconocen 3 incógnitas y se aproxima hasta la 2ª derivada truncando lo demás quedando una aproximación de 2° orden

1

Con base en lo anterior obtenemos

$U_i = 0$

$hU_i' = 1 \quad \Rightarrow U_i' = \frac{1}{h}$

$h^2 U_i'' = 0 \quad \Rightarrow U_i'' = 0$

Teniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$A + B + C = 0$$
$$2A + B = \frac{1}{h}$$
$$2A + \frac{B}{2} = 0$$

Expresándose como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo con el método Gauss-Jordan, tenemos:

$$\begin{array}{l} \\ \\ 2R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/h \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/h \\ 0 & 0 & 2 & -1/h \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - R_3 \\ \frac{1}{2}R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 0 & 0 & 1 & -1/2h \end{array}\right] \overset{R_1 - R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2/h \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 0 & 0 & 1 & -1/2h \end{array}\right] \overset{R_1 - R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2h \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 0 & 0 & 1 & -1/2h \end{array}\right]$$

Por lo tanto

$$A = -\frac{1}{2h} \qquad B = \frac{2}{h} \qquad C = -\frac{3}{2h}$$

Sustituyendo los coeficientes

$$U_i' = \frac{-1}{2h} U_{i+2} + \frac{2}{h} U_{i+1} - \frac{3}{2h} U_i = \frac{-U_{i+2} + 4_{i+1} - 3U_i}{2h}$$

$$U_i' = \frac{-U_{i+2} + 4U_{i+1} - 3U_i}{2h}$$

(b) Calcule los coeficientes A, B, C y D de One-sided-D_{-3} y diga por qué es de orden $O(h^3)$

$$U_i' = AU_{i+2} + BU_{i+1} + CU_i + DU_{i-1}$$

Se emplean 2 puntos a la derecha y 1 a la izquerda

Consideramos que

$x_0 - h = x_{i-1}$

$-h = x_{i-1} - x_0$

$x_0 + 2h = x_{i+2}$

$2h = x_{i+2} - x_0$

$x_0 + h = x_{i+1}$

$h = x_{i+1} - x_0$

Para U_{i-1}

$$U_{i-1} = U_i - hU_i' + \frac{(-h)^2 U_i''}{2!} + \frac{(-h)^3 U_i'''}{3!} + O(h^4)$$

$$= U_i - hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2} - \frac{h^3 U_i'''}{6} + O(h^4)$$

$$U_{i+1} = U_i + hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2!} + \frac{(h)^3 U_i'''}{3!} + O(h^4)$$

$$= U_i + hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2} + \frac{h^3 U_i'''}{6} + O(h^4)$$

$$U_{i+2} = U_i + (2h)U_i' + \frac{(2h)^2 U_i''}{2} + \frac{(2h)^3 U_i'''}{6} + O(h^4)$$

Ahora, sustituyendo en U_i'

$$U_i' = A\left(U_i + 2hU_i' + 2h^2 U_i'' + \frac{4}{3}h^3 U_i''' + \dots\right)$$
$$+ B\left(U_i + hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2} + \frac{h^3 U_i'''}{6} + \dots\right) + CU_i$$
$$+ D\left(U_i - hU_i' + \frac{h^2 U_i''}{2} - \frac{h^3 U_i'''}{6} + \dots\right)$$

Agrupando términos, tenemos que

$$U_i' = (A+B+C+D)U_i + (2A+B-D)hU_i' + \left(2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2}\right)h^2 U_i''$$
$$+ \left(\frac{4}{3}A + \frac{B}{6} - \frac{D}{6}\right)h^3 U_i'''$$

El orden es proporcional a h^3 en este caso, por lo tanto es $O(h^3)$. Como se desconocían 4 incógnitas se aproxima hasta la derivada $n-1$, por lo que se trunca todo lo demás $(\cdot O(h^4))$, quedando la aproximación de orden 3 $(O(h^3))$

Ahora bien, expresando el sistema de ecuaciones

$$A+B+C+D=0 \qquad \Rightarrow hU_i'=1$$

$$U_i'=\frac{1}{h}$$

$$2A+B-D=1/h$$

$$\left(2A+\frac{B}{2}-\frac{D}{2}=0\right)2 \Rightarrow 4A+B-D=0$$

$$\left(\frac{4}{3}A+\frac{B}{6}-\frac{D}{6}=0\right)6 \Rightarrow 8A+B-D=0$$

Se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para resolver por Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1-R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] R_2-R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -1/h \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & -1/h \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -1/h \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{6}R_1 \\ 1/2\, R_2 \\ R_3-R_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/6h \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2h \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2-R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/6h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] R_3+3R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/6h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] R_3 - R_1 - R_2 - R_3 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/6h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \end{array}\right]$$ Reacomodando

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/6h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \end{array}\right]$$

. entonces:

$A = \frac{-1}{6h}$ $\quad D = -1/3h$

$B = \frac{1}{h}$

$C = \frac{-1}{2h}$

Sustituyendo A, B, C, y D en U_i'

$$U_i' = -\frac{1}{6h} U_{i+2} + \frac{1}{h} U_{i+1} - \frac{1}{2h} U_i - \frac{1}{3h} U_{i-1}$$

$$U_i' = \frac{-U_{i+2} + 6U_{i+1} - 3U_i - 2U_{i-1}}{6h}$$

(C) Explique cómo se obtiene la fórmula de Centered-D_0^2

Para obtener la fórmula se consideran las expansiones en series de Taylor de $U(x_0+h)$ y de $U(x_0-h)$

$$U(x_0+h) = U(x_0) + h\cancel{U'(x_0)} + h^2\frac{U''(x_0)}{2!} + h^3\frac{\cancel{U'''(x_0)}}{3!} + \cdots + \frac{U^{(n)}(x_0)h^n}{n!} + R_n(x_0)$$

$$U(x_0-h) = U(x_0) - h\cancel{U'(x_0)} + h^2\frac{U''(x_0)}{2!} - h^3\frac{\cancel{U''(x_0)}}{3!} + \cdots + \frac{U^{(n)}(x_0)h^n}{n!} + R_n(x_0)$$

sumando ambas expansiones $U(x_0+h)+U(x_0-h)$
se observa que se eliminan los términos impares, al ser una aproximación simétrica y centrada en x_0,
se trunca para orden 4

$$U(x_0+h)+U(x_0-h) = U(x_0) + \frac{h^2U''(x_0)}{2} + U(x_0) + \frac{h^2U''(x_0)}{2}$$

$$U(x_0+h)+U(x_0-h) = 2U(x_0) + \frac{\cancel{2}h^2U''(x_0)}{\cancel{2}}$$

$$U(x_0+h)+U(x_0-h) = 2U(x_0) + h^2U''(x_0)$$

Despejando $U''(x_0)$

$$U''(x_0) = \frac{U(x_0+h) - 2U(x_0) + U(x_0-h)}{h^2}$$