Teste de Hipóteses para média populacional com variância populacional desconhecida

Magalhães e Lima - Seção 8.3
Montgomery et al – Seção 4.5

Objetivos desta aula!

- ✓ **Estender a metodologia de teste de hipóteses que aborda média populacional, mas agora com σ^2 desconhecido;**

- ✓ **Buscar estatística de teste adequada e usá-la para tomada de decisão via Região Crítica e via valor-p.**

Insper

Exemplo 1

O número médio de pontos em um exame de inglês tem sido historicamente igual a 80.

Foram sorteados 10 estudantes que fizeram recentemente esse exame e observadas as notas:

65	70	76	86	59	81	75	72	81	83

Especialistas desconfiam que o rendimento médio dos alunos diminuiu e desejam testar essa afirmação por meio de um teste de hipóteses, com nível de significância de 5%.

Fazendo as suposições necessárias, qual seria a conclusão do teste?

$\bar{x}$=	74,80
s=	8,48

Passos para Construção de um Teste de Hipóteses (via RC)

1º.Passo: Fixe qual a hipótese nula, H_0, a ser testada e qual a hipótese alternativa (H_A).

2º.Passo: Defina a *estatística de teste* sob H_0. Não se esqueça de levantar as propriedades dessa estatística.

- **Uma estatística é qualquer função da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos.**

Estatística de Teste

Caso 2

(variância populacional desconhecida)

Relembrando...

Vamos considerar a seguinte hipótese nula:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Vimos que um estimador com boas propriedades para o parâmetro μ é $\bar{X}$.

Sob algumas suposições, temos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Relembrando...

Sob a hipótese nula, vem que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Porém, a quantidade anterior não pode ser usada como *estatística de teste* pois σ é parâmetro desconhecido.

Ainda,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0; 1)$$

também não pode ser considerada uma *estatística de teste*, uma vez que σ é desconhecido.

FATO

Se o desvio padrão populacional σ for desconhecido, o desvio padrão amostral, S, é usado para estimar σ.

Entretanto, a padronização da média amostral $\bar{X}$ utilizando o desvio padrão amostral segue uma distribuição de probabilidades conhecida como *distribuição t-Student,* desde que uma a.a.s. tenha sido coletada de uma população em que X~Normal.

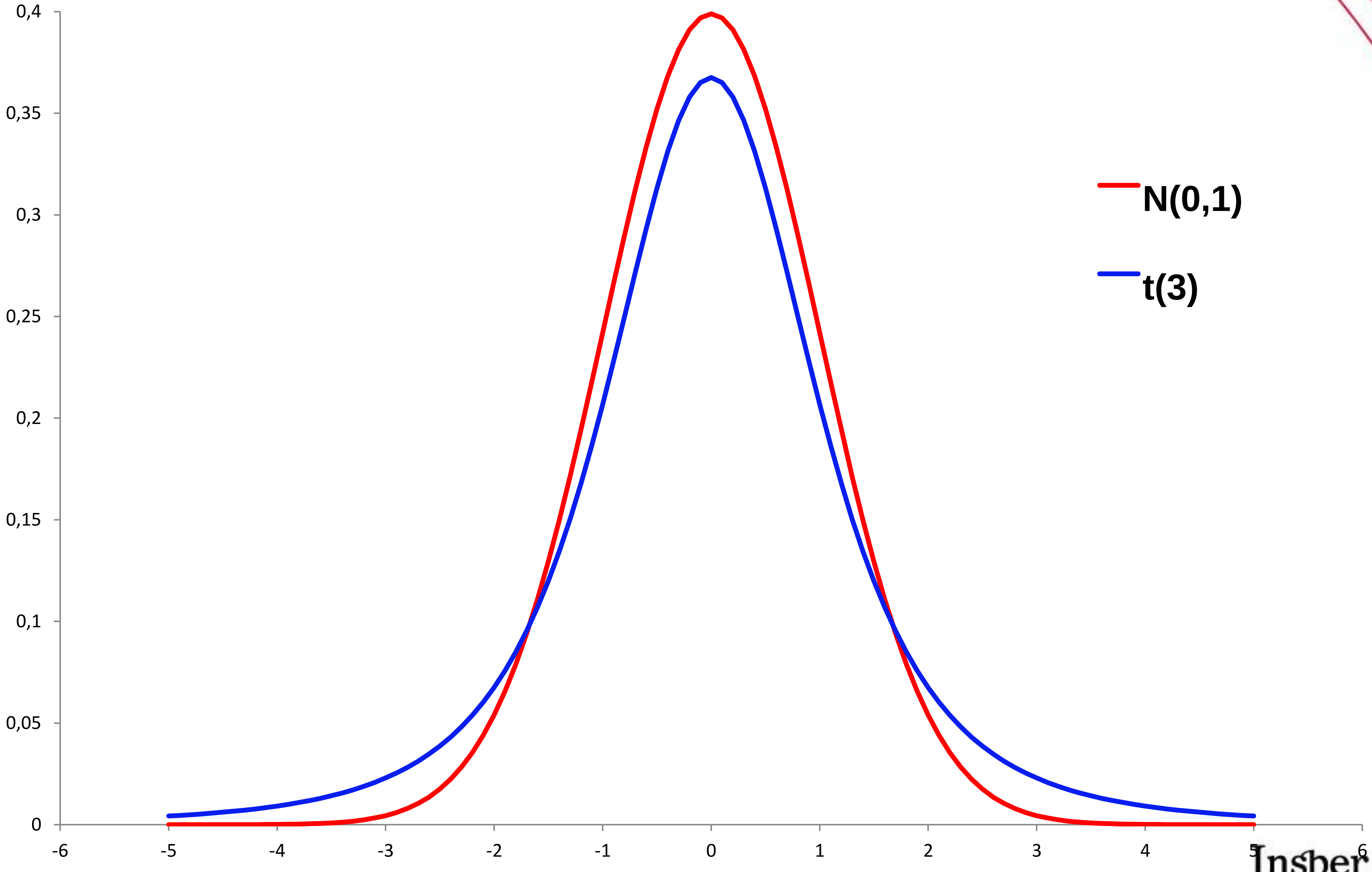
Assim, utilizando o estimador S^2 para σ^2 e supondo que a a.a.s. foi coletada de uma população cuja variável de interesse seja normalmente distribuída, temos, sob H_0, que

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

pode ser considerada uma estatística de teste.

Insper

$t_{(3)}$ *versus* Normal Padrão



Insper

Passos para Construção de um Teste de Hipóteses (via RC)

1º.Passo: Fixe qual a hipótese nula, H_0, a ser testada e qual a hipótese alternativa (H_A).

2º.Passo: Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual *estatística de teste* será usada sob H_0. Não se esqueça de levantar as propriedades dessa estatística.

3º.Passo: Fixe a probabilidade α de cometer erro de rejeitar H_0, sob H_0 verdadeiro, e use este valor para construir a região crítica RC. Lembre que esta região é construída para a estatística definida no segundo passo, usando o valor hipotetizado em H_0.

4º.Passo: Use as informações fornecidas pela amostra para encontrar o valor observado da *estatística de teste*.

5º.Passo: Se o valor observado da *estatística de teste* pertencer à região crítica, rejeite H_0; caso contrário, não rejeite.

Valor-p do Teste

Valor-p é o menor nível de significância que leva à rejeição de H_0 com base na amostra.

Passos para Construção de um Teste de Hipóteses (via valor-p)

1º.Passo: Fixe qual as hipóteses H_0 e H_A.

2º.Passo: Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual *estatística de teste* será usada sob H_0. Não se esqueça de levantar as propriedades dessa estatística.

3º.Passo: Use as informações fornecidas pela amostra para encontrar o valor observado da *estatística de teste*.

4º.Passo: Use o valor observado da *estatística de teste* para encontrar o valor-p, ou seja, a probabilidade de encontrar valores tão ou mais desfavoráveis à H_0 quanto a *estatística de teste* observada pela amostra.

5º.Passo: Se o valor-p for menor do que algum α fixado, rejeite H_0; caso contrário, não rejeite.

Teste unilateral ou unicaudal à direita

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_A : \mu > \mu_0$$

Estatística do teste observada (sob H_0):

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Regra de rejeição, ao nível α de significância:

α=P(erro I) estará na cauda à direita!

Rejeito H_0 se $t_{obs} > t_{(n-1)}^{(\alpha)} = t_c$

Insper

Teste unilateral ou unicaudal à esquerda

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_A : \mu < \mu_0$$

Estatística do teste observada (sob H_0):

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Regra de rejeição, ao nível α de significância:

α=P(erro I) estará na cauda à esquerda!

Rejeito H_0 se $t_{obs} < -t_{(n-1)}^{(\alpha)} = t_c$

Teste bilateral ou bicaudal

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_A : \mu \neq \mu_0$$

Estatística do teste observada (sob H_0):

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Regra de rejeição, ao nível α de significância:

α/2 estará em cada cauda! A soma é α!

Rejeito H_0 se $|t_{obs}| > t_{(n-1)}^{(\alpha/2)} = t_c$

Exemplo 2

As latas de certa marca de refrigerante apresentam em seu rótulo o volume de 350 ml.

O fabricante deseja testar se o **conteúdo médio das latas é igual a 350 ml**, como anunciado no rótulo. Isto equivale a verificar se a máquina está regulada para colocar 350 ml, ou não, nas latas.

Para averiguar a afirmação do fabricante, foi coletada uma amostra de 36 latas do refrigerante em pontos de comercialização e mediu-se o conteúdo destas latas.

Os resultados obtidos na amostra foram: $\bar{x} = 347 \text{ ml e } s = 10{,}5 \text{ ml}$

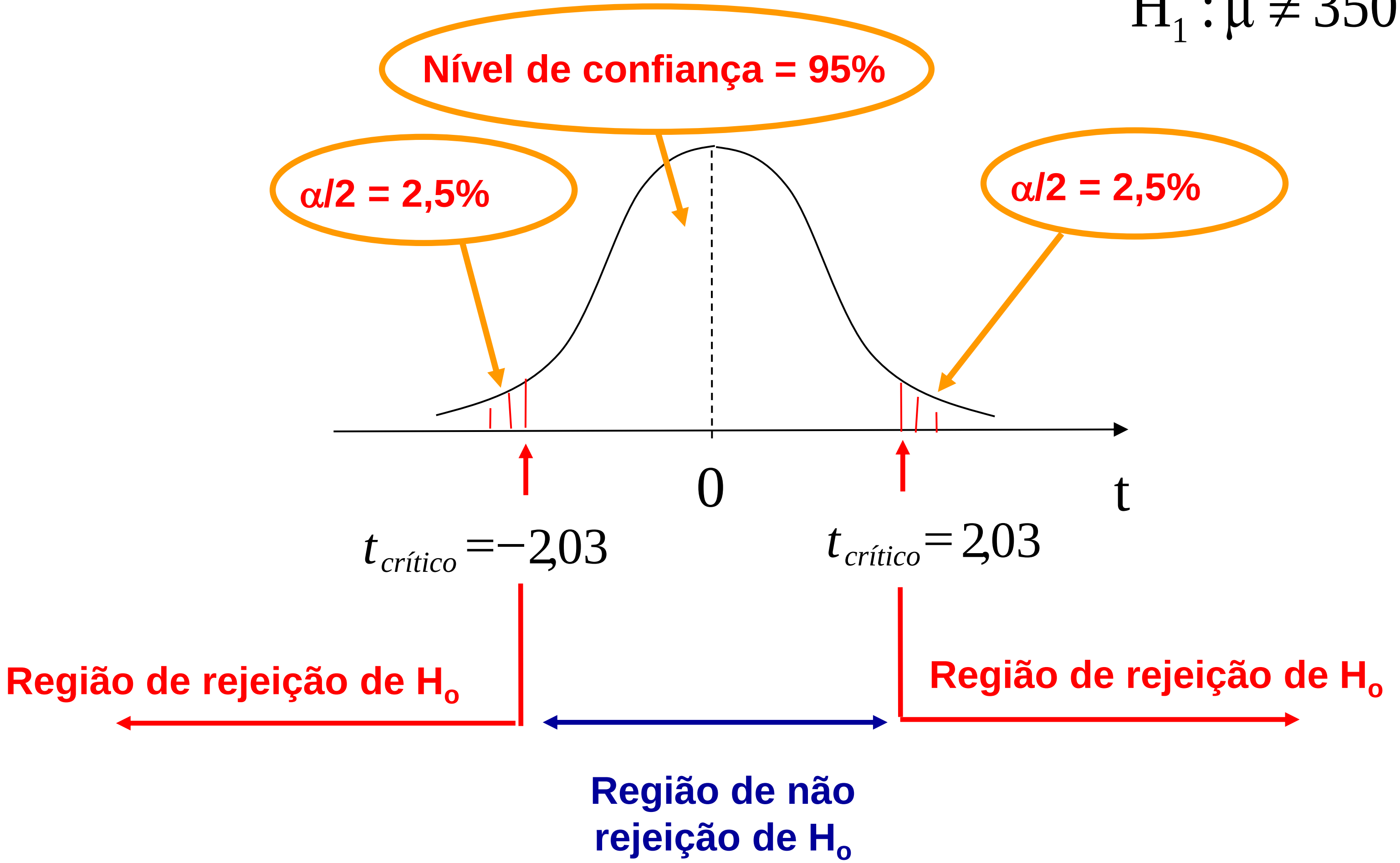
Será que as latas contêm 350 ml de líquido com 95% de confiança?

Voltando ao exemplo 2

Com base nas hipóteses do fabricante, rejeita-se a hipótese nula para valores pequenos ou grandes.

$$H_0: \mu = 350 \text{ ml}$$

$$H_1: \mu \neq 350 \text{ ml}$$



Insper

Voltando ao exemplo 2

Região crítica: se o valor da estatística t_{obs} for menor que -2,03 ou maior que 2,03, então rejeita-se a hipótese nula (o produto não está de acordo com as especificações do fabricante).

Estatística do Teste (obtida da amostra)

Padronização dos dados amostrais sob a hipótese nula (H_0), ou seja $\mu_0 = 350$.

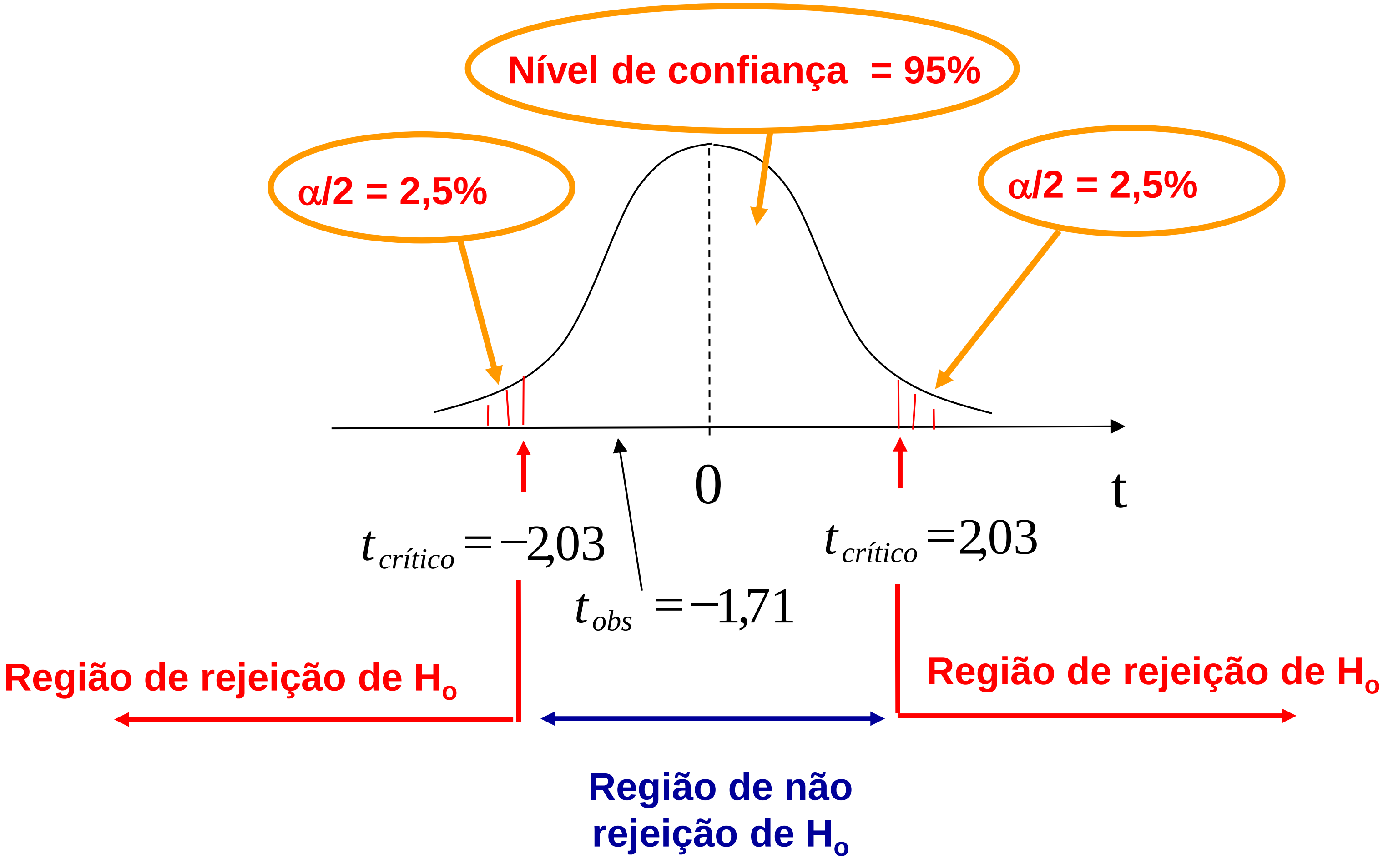
$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \xrightarrow{\text{amostra}} t_{obs} = \frac{347 - 350}{10{,}5/\sqrt{36}} = -1{,}71$$

$\bar{x} = 347\ ml$

$s = 10{,}5\ ml$

Insper

Voltando ao exemplo 2



<u>**Conclusão:**</u> **Não rejeitamos a hipótese nula**, isto é, não existem evidências estatísticas de que o conteúdo das latas esteja fora das especificações do fabricante, ao nível de significância de 5% (ou com 95% de confiança).

20

Voltando ao exemplo 2

Para calcular o valor-p para testes bicaudais devemos multiplicar por 2 o valor da probabilidade calculada com a estatística do teste, já que rejeitamos a hipótese nula tanto para pequenos como para grandes valores amostrais.

Dessa forma:

$$t_{obs} = -1{,}71$$

$$\text{valor-p} = 2 * 0{,}0481 = 0{,}0962$$

$$\text{valor-p} = 2 * scipy.stats.t.cdf(-1.71, 35) = 0{,}0962$$

Portanto, **não rejeitamos a hipótese nula** (pois valor-p = 0,0962 > 0,05 = α), isto é, não existem evidências estatísticas de que o conteúdo das latas esteja fora das especificações do fabricante.

Exemplo 3

Supondo as hipóteses a seguir, calcule e interprete o valor-p.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu > \mu_0$$

$$n = 30;\ s = 6;\ \ \mu_0 = 30;\ \ \bar{x} = 31{,}87;\ \ \ \alpha = 0{,}05$$

Resp.:

$$\text{valor} - p = P\left(t_{(29)} > 1{,}707\right) = 4{,}92\% < 5\% \Rightarrow \text{rejeita } H_0!$$

Insper

Exemplo 4

Supondo as hipóteses a seguir, calcule e interprete o valor-p.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu < \mu_0$$

$$n = 30; \ s = 6; \ \mu_0 = 30; \ \bar{x} = 28{,}13; \ \alpha = 0{,}05$$

Resp.:

$$\text{valor} - \text{p} = P\left(t_{(29)} < -1{,}707\right) = P\left(t_{(29)} > 1{,}707\right) =$$
$$= 4{,}92\% < 5\% \Rightarrow \text{rejeita } H_0!$$

Insper

Exemplo 5

Supondo as hipóteses a seguir, calcule e interprete o valor-p.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu \neq \mu_0$$

$$\mathrm{n} = 30;\ \mathrm{s} = 6;\ \ \mu_0 = 30;\ \ \bar{\mathrm{x}} = 31{,}87;\ \ \ \alpha = 0{,}05$$

Resp.:

$$\text{valor} - \text{p} = 2 * \text{P}\left(\text{t}_{(29)} > 1{,}707\right) = 2 * 4{,}92\% =$$
$$= 9{,}84\% > 5\% \Rightarrow \text{NÃO rejeita } \text{H}_0!$$

Exercícios

Exercício 1

O índice de poluição no município de Curitiba segue uma distribuição normal com média e variância desconhecidas. O departamento ambiental deseja estimar o índice médio de poluição no município. Para isso, ele medirá a poluição em uma amostra de dias escolhidos aleatoriamente.

a) Dimensione a amostra de modo que o erro amostral de estimação seja no máximo 10% do desvio padrão, com uma confiança de 95%.

b) Pretende-se extrair, em Curitiba, uma amostra aleatória de 16 dias. Em uma cidade com características similares, verificou-se que o índice médio de poluição é de 90 u.m..

Exercício 1 (cont.)

Construa um teste de hipóteses para verificar se Curitiba é mais poluída do que a outra cidade. Adote um nível de significância de 10%.

c) Interprete os erros do tipo I e II relacionados ao teste acima, em termos do problema em questão.

d) Extraída uma amostra aleatória de 16 dias verificou-se, em Curitiba, um índice médio amostral de poluição de 95 u.m., com desvio padrão amostral igual a 10 u.m.. Conclua o T.H. por meio da construção da R.C..

Exercício 1 (cont.)

e) Através do cálculo do valor-p, conclua o teste de hipóteses. Interprete o valor-p.

f) Descreva as suposições necessárias para as conclusões acima serem confiáveis.

g) Um técnico resolveu medir a poluição em 16 dias consecutivos. A amostra obtida satisfaz as suposições necessárias para a realização do teste? Por quê?

Exercício 2

O volume diário de negócios da corretora K. B. Sashata, em reais, segue uma distribuição normal. O diretor da corretora deseja fazer inferências sobre o volume médio diário negociado.

a) Numa corretora de mesmo porte verificou-se que, em média, o volume negociado diariamente é de R$ 116.000,00. Formule as hipóteses de um teste para verificar essas duas corretoras apresentam, diariamente, o mesmo volume de negociações.

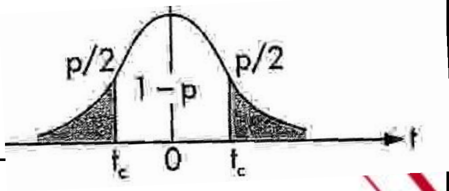
b) Interprete os erros tipo I e tipo II relacionados ao teste acima, em termos do problema em questão.

c) Extraída uma amostra de 25 dias, verificou-se que o volume médio negociado diariamente na corretora K. B. Sashata é igual a R$ 115.000,00, com desvio padrão amostral igual a R$2.000,00. Conclua o teste descrito no item (a) com base na RC e no cálculo do valor-p.

Distribuição t-Student

Corpo da tabela fornece os valores tc tais que P(-tc < t < tc) = 1-p

Para ν > 120, usar a aproximação normal



Graus de liberdade: ν	p=90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	3%	2%	1%	0,5%	0,25%	0,20%	0,10%
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,895	21,205	31,821	63,657	127,321	254,647	318,309	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	5,643	6,965	9,925	14,089	19,962	22,327	31,599
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	3,896	4,541	5,841	7,453	9,465	10,215	12,924
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,999	3,298	3,747	4,604	5,598	6,758	7,173	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,757	3,003	3,365	4,032	4,773	5,604	5,893	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	2,829	3,143	3,707	4,317	4,981	5,208	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,715	2,998	3,499	4,029	4,595	4,785	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,634	2,896	3,355	3,833	4,334	4,501	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,574	2,821	3,250	3,690	4,146	4,297	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,527	2,764	3,169	3,581	4,005	4,144	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,491	2,718	3,106	3,497	3,895	4,025	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,461	2,681	3,055	3,428	3,807	3,930	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,436	2,650	3,012	3,372	3,735	3,852	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,415	2,624	2,977	3,326	3,675	3,787	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,249	2,397	2,602	2,947	3,286	3,624	3,733	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,382	2,583	2,921	3,252	3,581	3,686	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,368	2,567	2,898	3,222	3,543	3,646	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,356	2,552	2,878	3,197	3,510	3,610	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,346	2,539	2,861	3,174	3,481	3,579	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,336	2,528	2,845	3,153	3,455	3,552	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,328	2,518	2,831	3,135	3,432	3,527	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,320	2,508	2,819	3,119	3,412	3,505	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,313	2,500	2,807	3,104	3,393	3,485	3,768
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,307	2,492	2,797	3,091	3,376	3,467	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,167	2,301	2,485	2,787	3,078	3,361	3,450	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,296	2,479	2,779	3,067	3,346	3,435	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,291	2,473	2,771	3,057	3,333	3,421	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,286	2,467	2,763	3,047	3,321	3,408	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,282	2,462	2,756	3,038	3,310	3,396	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,278	2,457	2,750	3,030	3,300	3,385	3,646
31	0,127	0,256	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,696	2,040	2,144	2,275	2,453	2,744	3,022	3,290	3,375	3,633
32	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	2,037	2,141	2,271	2,449	2,738	3,015	3,281	3,365	3,622
33	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,053	1,308	1,692	2,035	2,138	2,268	2,445	2,733	3,008	3,273	3,356	3,611
34	0,127	0,255	0,389	0,529	0,682	0,852	1,052	1,307	1,691	2,032	2,136	2,265	2,441	2,728	3,002	3,265	3,348	3,601
35	0,127	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,262	2,438	2,724	2,996	3,258	3,340	3,591
36	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,852	1,052	1,306	1,688	2,028	2,131	2,260	2,434	2,719	2,990	3,251	3,333	3,582
37	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,305	1,687	2,026	2,129	2,257	2,431	2,715	2,985	3,244	3,326	3,574
38	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,304	1,686	2,024	2,127	2,255	2,429	2,712	2,980	3,238	3,319	3,566
39	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,304	1,685	2,023	2,125	2,252	2,426	2,708	2,976	3,232	3,313	3,558
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,250	2,423	2,704	2,971	3,227	3,307	3,551
41	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,850	1,050	1,303	1,683	2,020	2,121	2,248	2,421	2,701	2,967	3,221	3,301	3,544

Insper