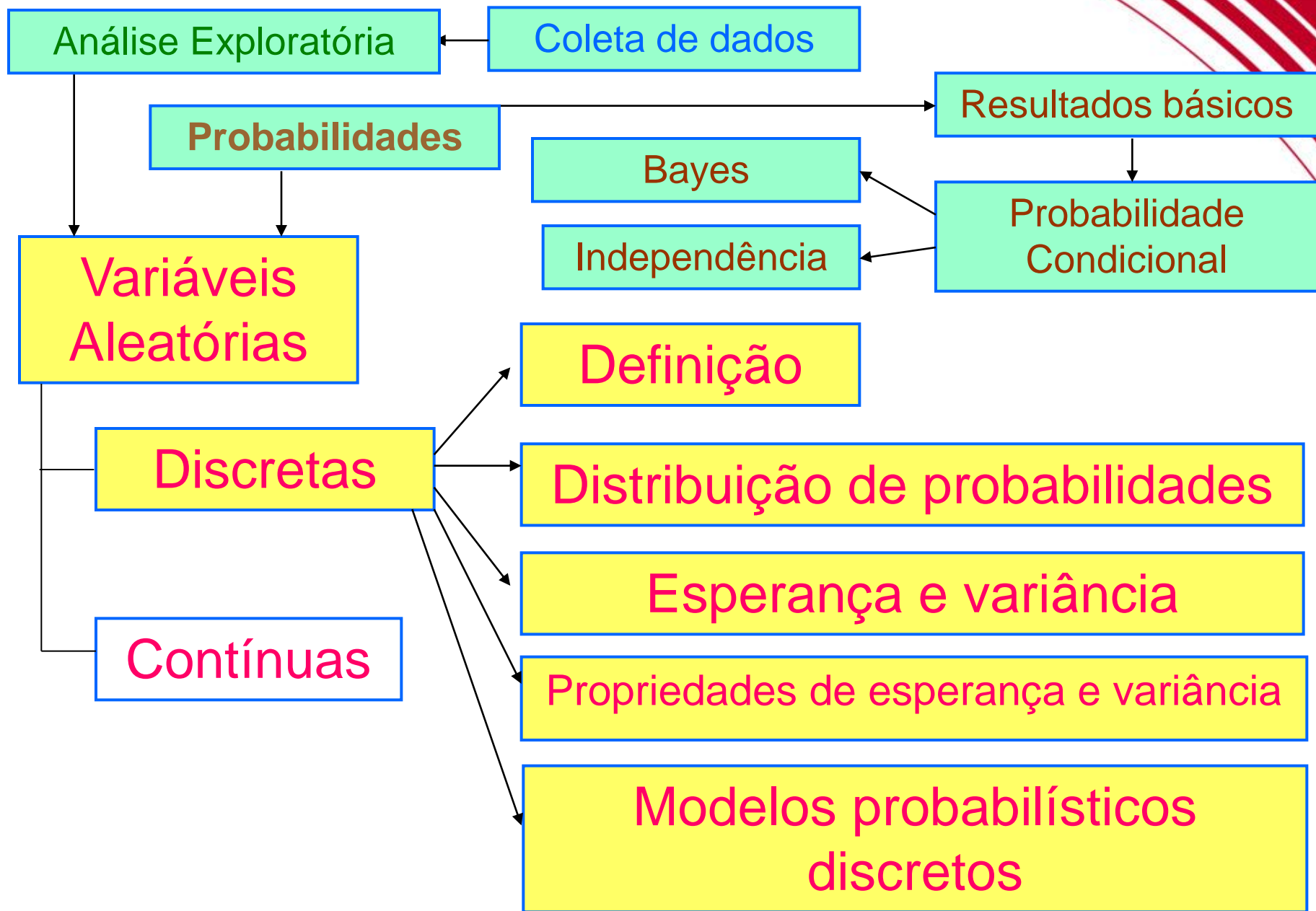


Ciência dos Dados

Variáveis aleatórias discretas

Distribuição de probabilidades
Esperança e variância

Magalhães e Lima, 7ª. Edição. Seção 3.1 e Definição 4.2 (pág. 110) e Definição 4.5 (pág. 121).



Objetivos de Aprendizagem

Os alunos devem ser capazes de:

- Descrever e aplicar as propriedades de distribuições probabilísticas em variáveis aleatórias discretas.

**Acompanhe, previamente, o PLANO DE AULA
no BLACKBOARD!**

Variáveis aleatórias

Quando **tomamos decisões** em face da incerteza, **raramente elas se baseiam apenas** na probabilidade descritas em **eventos**.

Na maioria dos casos, devemos **também** saber algo sobre as consequências potenciais da **tomada de decisão descritas em variáveis quantitativas** (tempo de execução de uma tarefa, perdas, lucros, penalidades ou recompensas).

Variáveis aleatórias

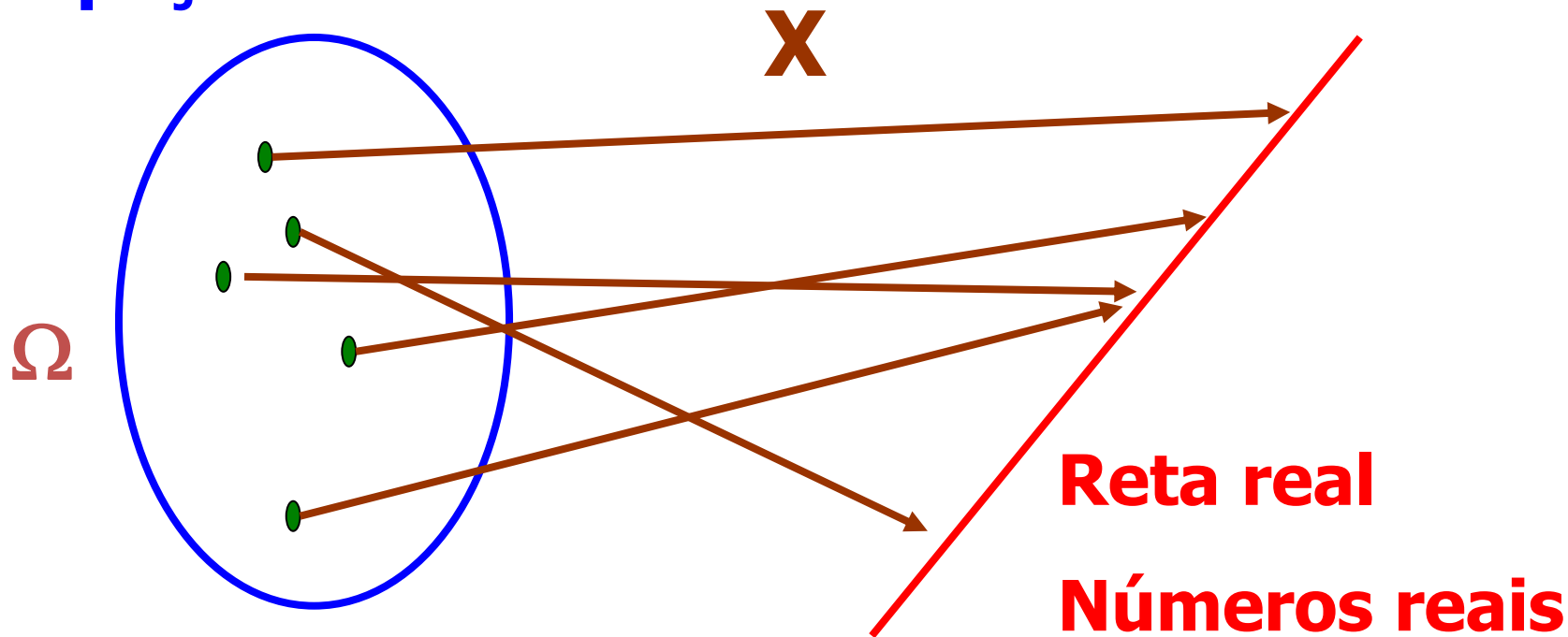
Por exemplo, uma construtora precisa decidir se apresenta proposta para um projeto que lhe oferece a perspectiva de R\$ 250.000,00 de lucro com probabilidade de 20% ou de um prejuízo de R\$ 50.000,00 (em consequência de uma crise financeira no país) com 80% de probabilidade.

A probabilidade da construtora ter lucro não é muito grande, mas a quantia que ela pode ganhar é muito maior do que a que ela pode perder.

Este exemplo mostra a necessidade de um método que permita combinar probabilidades e consequências.

Variáveis aleatórias

Espaço Amostral



Variável aleatória: função que associa um **número real** a cada **ponto do espaço amostral** (possível realização do experimento aleatório).

Tipos de Variáveis Aleatórias

- Variáveis Aleatórias Discretas
- Variáveis Aleatórias Contínuas

Variável aleatória discreta: conjunto de possibilidades é um conjunto finito ou enumerável

Exemplo: número de filhos, número de salas de aula, número de benefícios do Bolsa Família por família

Variável aleatória contínua: conjunto de possibilidades num intervalo ou conjuntos de intervalos contínuos

Exemplo: tempo de duração, temperatura

Variáveis Aleatórias Discretas

- ☆ Uma indústria de aviões recebe pedidos de um determinado tipo de jato comercial por ano ($X: 0, 1, 2, 3, 4, \dots$)
- ☆ Um empresário com 20 escritórios comerciais quer saber o número de escritórios que estão alugados por mês ($X: 0, 1, 2, 3, \dots, 20$)
- ☆ Número de vendas num dia de funcionamento de uma loja ($X: 0, 1, 2, \dots$)
- ☆ Número de chamadas telefônicas recebidas numa central num dia ($X: 0, 1, 2, \dots$)
- ☆ Um vendedor de seguros aborda 5 clientes por dia, recebendo 50,00 de comissão a cada venda. A variável de interesse é o ganho diário do vendedor ($X: 0,00; 50,00; 100,00; 150,00; 200,00; 250,00$)
- ☆ Número de peças defeituosas num lote com 30 peças ($X: 0, 1, \dots, 30$)
- ☆ Número de papéis que fecharam em alta ao final de um pregão ($X: 0, 1, \dots, n$)

Exemplo 1

Uma corretora de seguros paga uma comissão de R\$50,00 a cada novo seguro que um corretor vende. A probabilidade de um cliente adquirir o seguro é de 0,20.

- a) Descreva como pode se comportar a comissão se um corretor ao abordar 2 clientes de maneira independente um do outro.
- b) Qual a probabilidade de um corretor ganhar apenas R\$50,00?

S_i : o cliente i compra o seguro

N_i : o cliente i não compra o seguro

Exemplo 1 (item a)

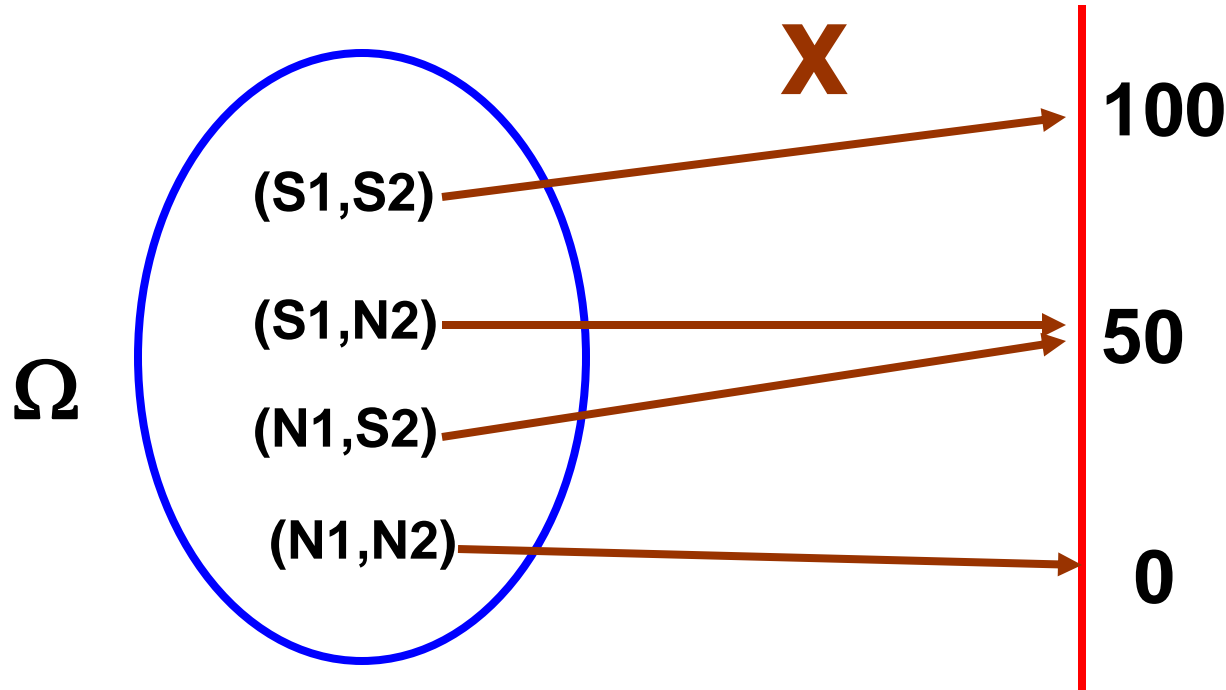
Espaço Amostral		Comissão
1o cliente	2o cliente	
S_1	S_2	100
S_1	N_2	50
N_1	S_2	50
N_1	N_2	0

S_i : o cliente i compra o seguro

N_i : o cliente i não compra o seguro

Exemplo 1 (item a)

X: comissão recebida por um corretor com a tentativa de venda de duas apólices de seguro



Espaço Amostral

Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória

Exemplo 1 (item b)

Uma corretora de seguros paga uma comissão de R\$50,00 a cada novo seguro que um corretor vende.

A probabilidade de um cliente adquirir o seguro é de 0,20.

- a) Descreva como pode se comportar a comissão se um corretor abordar 2 clientes de maneira independente um do outro.
- b) Qual a probabilidade de um corretor ganhar apenas R\$50,00?

S_i : o cliente i compra o seguro;

N_i : o cliente i não compra o seguro.

$$P(S_i) = 0,20$$

$$P(N_i) = 0,80$$

Exemplo 1 (item b)

Abordando dois clientes de forma aleatória, os eventos possíveis são:

Espaço amostral		Comissão	$P(X=x)$	
1º Cliente	2º Cliente			
S_1	S_2	100	0,04	
S_1	N_2	50	0,16	} $P(X = 50) =$ $0,16 + 0,16 = 0,32$
N_1	S_2	50	0,16	
N_1	N_2	0	0,64	

A comissão que um corretor ganha é uma variável aleatória discreta.

Distribuição de probabilidades de uma v.a. discreta

É uma função que associa uma probabilidade a cada valor de uma variável aleatória.

Exemplo: **X: Comissão de um corretor**

Distribuição de probabilidades de X

x	P(X=x)
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Soma	1,00

Definição:

(Função de Probabilidade – f.p.) :

Seja uma **variável aleatória** (v.a.) **discreta** X , que assume valores x 's.

A função que associa a probabilidade de ocorrência em cada valor x , isto é,

$$f(x) = P(X = x) ,$$

chama-se **função de probabilidade**.

Definição: (Distribuição de uma v.a.) –

Seja uma **variável aleatória** (v.a.) **discreta** X , que assume valores x 's.

A **distribuição da v.a. X** (ou distribuição de probabilidades da v.a. X) é o conjunto de todos os pares formados por

$$\{x, P(X = x)\},$$

isto é, pelos valores de X e as respectivas probabilidades da variável assumir tais valores.

Propriedades da Função de Probabilidades de uma Variável Aleatória Discreta

Seja X uma v.a. discreta assumindo valores x 's:

$$0 \leq P(X = x) \leq 1$$

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

Média e Variância de uma variável aleatória

Voltando ao Exemplo 1

Distribuição de probabilidades de X

(X : Comissão)

x	$P(X=x)$
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Soma	1,00

Qual a comissão média recebida por um corretor ao abordar 2 clientes?

E o desvio padrão dessa comissão?

Valor Esperado (média ou esperança) de uma variável discreta

O valor esperado de uma v.a. discreta X é a soma dos produtos dos valores da variável pelas respectivas probabilidades da variável assumir tais valores, ou seja,

$$E(X) = \mu_X = \sum_x x P(X = x)$$

Voltando ao Exemplo 1

Distribuição de probabilidades de X

x	P(X=x)
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Total	1,00

$$E(X) = 0 \times 0,64 + 50 \times 0,32 + 100 \times 0,04 = 20 \text{ reais}$$

(valor médio da comissão do corretor)

Voltando ao Exemplo 1

Distribuição de probabilidades de X

(X : Comissão)

x	$P(X=x)$
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Soma	1,00

Qual a comissão média recebida por um corretor ao abordar 2 clientes?

E o desvio padrão dessa comissão?

Variância de uma variável discreta aleatória

A variância de uma **v.a. discreta X** é

$$\text{Var}(X) = \sigma^2_X = \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x)$$

$$\begin{aligned} \text{ou ainda, } \text{Var}(X) &= E[(X - E(X))^2] = \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

$$\text{em que } E(X^2) = \sum_x x^2 P(X = x)$$

Voltando ao Exemplo 1

Distribuição de probabilidades de X

x	P(X=x)
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Total	1,00

$$E(X) = 20 \text{ reais}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0-20)^2 \times 0,64 + (50-20)^2 \times 0,32 + (100-20)^2 \times 0,04 \\ &= 800 \text{ reais}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_X = 28,28 \text{ reais (desvio padrão da variável aleatória X)}$$

Desafio

Distribuição de probabilidades de X: Comissão atual de um corretor

x	P(X=x)
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Total	1,00

Imagine que a corretora de seguros irá fornecer um aumento na comissão dos corretores. Entretanto, cada corretor poderá escolher uma das seguintes opções:

1. Nova comissão será a comissão atual mais um fixo de R\$ 20,00.
2. Nova comissão será o dobro da atual comissão

Calcule o valor esperado e a variância de cada opção.

Escolha qual delas é melhor para aumentar o ganho de um corretor. Justifique sua resposta.

Desafio

Distribuição de probabilidades de X: Comissão atual de um corretor

x	P(X=x)
0	0,64
50	0,32
100	0,04
Total	1,00

Distribuição de probabilidades Y:
Comissão atual mais um fixo de R\$ 20,00.

y	P(Y=y)
20	0,64
70	0,32
120	0,04
Total	1,00

Distribuição de probabilidades W:
Dobro da atual comissão

w	P(W=w)
0	0,64
100	0,32
200	0,04
Total	1,00

Propriedades da Esperança

Seja X uma variável aleatória qualquer, então

(i) $E(X + d) = E(X) + d$, onde d é uma constante.

(ii) $E(c X) = c E(X)$, onde c é uma constante.

(iii) Combinando (i) e (ii):

$$E(c X + d) = c E(X) + d,$$

onde c e d são constantes.

Propriedades da Variância

Seja X uma variável aleatória qualquer, então

(i) $\text{Var}(X + d) = \text{Var}(X)$, onde d é uma constante.

(ii) $\text{Var}(c X) = c^2 \text{Var}(X)$, onde c é uma constante.

(iii) Combinando (i) e (ii):

$$\text{Var}(c X + d) = c^2 \text{Var}(X),$$

onde c e d são constantes.

Exemplo 2

Uma empresa de segurança visita, em um dia de trabalho, dois potenciais clientes para oferecer seus serviços.

A probabilidade de fechar contrato com o primeiro cliente visitado no dia é da ordem de 10%. Quando a primeira visita resulta em contrato, a probabilidade de se fechar contrato na segunda visita quadruplica, caso contrário, ela se mantém em 10%.

Admitindo que o **custo do dia de trabalho** seja da ordem de **R\$30,00** e que a receita obtida com **cada contrato fechado** seja da ordem de **R\$500,00**, pergunta-se:

- Encontre a distribuição de probabilidades da variável Lucro.
- Qual a probabilidade de se ter prejuízo num dia?
- Vale a pena manter essas visitas?
- Qual a variância do lucro?
- Qual valor esperado e variância da variável Lucro, se esse cair em 10%?

Exemplo 2 (item a)

Espaço Amostral		Probabilidade
1ª visita	2ª visita	
F_1	F_2	0,04
F_1	N_2	0,06
N_1	F_2	0,09
N_1	N_2	0,81

F_i : fechar contrato na visita i
 $N_i (=F_i^c)$: não fechar contrato na visita i

Espaço Amostral		Receita	Custo Fixo	Lucro
1a visita	2a visita			
F_1	F_2	1000	30	970
F_1	N_2	500	30	470
N_1	F_2	500	30	470
N_1	N_2	0	30	-30

Exemplo 2 (item a)

Defina a v.a. X como sendo o **lucro obtido durante o período de interesse**. Assim,

Espaço Amostral		x	P(X=x)
1a visita	2a visita		
F_1	F_2	970	0,04
F_1	N_2	470	0,06
N_1	F_2	470	0,09
N_1	N_2	-30	0,81

Exemplo 2 (item a)

Finalmente, a **distribuição de probabilidades** da v.a. X , definida anteriormente, fica dada por

x	$P(X=x)$
970	0,04
470	$0,06+0,09=0,15$
-30	0,81
Total	1,00

Exemplo 2

b) Qual a probabilidade de se ter prejuízo num dia?

$$P(X < 0) = P(X = -30) = 0,81$$

c) Vale a pena manter essas visitas?

$$E(X) = 970 \times 0,04 + 470 \times 0,15 + (-30) \times 0,81 = 85$$

d) Qual a variância da variável Lucro?

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (970-85)^2 \times 0,04 + (470-85)^2 \times 0,15 + (-30-85)^2 \times 0,81 \\ &= 64.275 \text{ reais}^2 \end{aligned}$$

$$DP(X) = 253,53 \text{ reais}$$

e) Esperança e variância se lucro cair em 10%?

$$Y = 0,9X \rightarrow E(Y) = 0,9 \times 85 = 76,50 \text{ reais}$$

$$\text{Var}(Y) = 0,9^2 \times 64.275 = 52.062,75 \text{ reais}^2$$

$$DP(Y) = 228,17 \text{ reais}$$

Exemplo 3

Historicamente, as vendas mensais de uma loja têm média de \$25.000 e desvio-padrão \$4.000.

Os lucros correspondem a 30% das vendas menos um custo fixo de \$6.000.

Encontre o valor esperado e o desvio-padrão do lucro.

Exercícios

Exercício 1

Um rapaz está pensando em convidar sua namorada para sair. O problema é que as despesas correm por sua conta. Eles podem ir ao cinema ou ao teatro. 70% das vezes ela prefere ir ao cinema, nesse caso, ele gasta \$70,00 com os ingressos. Quando eles vão ao teatro, o gasto fica em \$190,00. Se eles forem ao cinema, ele sabe que em 80% das vezes ela pede para ir jantar, a despesa adicional do jantar fica em \$130,00; 20% das vezes, eles vão direto para casa. Levando a namorada ao teatro, em 40% das vezes ela pede para ir jantar e 60% das vezes eles vão direto para casa.

Qual a distribuição de probabilidades do gasto que o rapaz tem com a namorada? Qual o gasto médio? E o seu desvio-padrão?

R: $E(G) = 194,40$ reais e $DP(G) = 63,88$ reais

Com a inflação deste ano, o gasto aumentou até agora \$9, mas com a crise geral, o casal resolveu reduzir esse novo gasto total em 15%. Calcule o novo gasto médio e respectivo desvio padrão. R: $E(Y) = 172,89$ reais e $DP(Y) = 54,30$ reais

Exercício 2

A AirBrazil tem uma política de, rotineiramente, superlotar os vôos, porque, por experiências passadas, alguns passageiros não comparecem para o embarque. A variável aleatória X representa o número de passageiros que não podem ser embarcados por haver mais passageiros do que assentos.

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,807	0,115	0,057	0,019	0,002

Considerando a distribuição de probabilidades da v.a. X , calcule:

- a) Calcule a $E(X)$ e a $Var(X)$. Resp: $E(X) = 0,294$ e $Var(X) = 0,4596$
- b) A cada passageiro não embarcado, a companhia aérea paga uma multa de R\$500,00. Qual a despesa média com multas da AirBrazil? E a variância?
Resp: $Y=500X$; $E(Y)=147$; $Var(Y)=114900$
- c) A Infraero pretende alterar a taxação da multa, dobrando o valor pago por passageiro não embarcado. Neste caso, qual seria o valor médio gasto com multas? E a variância? Resp: $Z=2Y$; $E(Z)=294$; $Var(Z)=459600$
- d) A Infraero pretende alterar a taxação da multa, dobrando o valor pago por passageiro não embarcado no item b) e cobrando um valor fixo de R\$2000, sempre que houver overbooking. Neste caso, qual seria o valor médio gasto com multas? E a variância?
Resp: $E(W)=680$; $Var(W)=2.031.600$

Exercício 3

A) O tempo T , em minutos, necessário para um operário processar certa peça, é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidades:

t	2	3	4	5	6	Total
$P(T=t)$	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	1,0

O gerente de produção necessita estudar o tempo de produção das peças para decidir se contrata mais funcionários ou se pode dar um bônus em dinheiro para que os funcionários sejam mais rápidos. Qual o tempo médio de processamento e o desvio padrão do tempo gasto para processar uma peça?

R: $E(T) = 4,3$ minutos e $DP(T) = 1,19$ minutos

B) Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de 2,00 u.m. (unidade monetária), mas se ele processa a peça em menos de 5 minutos, ganha 0,50 u.m. por cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia adicional de 0,50 u.m.

Qual a média e o desvio padrão da quantia (em u.m.) ganha por peça?

R: $E(G) = 2,45$ u.m.
 $DP(G) = 0,47$ u.m.

t	2	3	4	5	6	Total
$P(T=t)$	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	1,0
Ganho (u.m.)	3,50	3,00	2,50	2,00	2,00	

Exercício 4

Um funcionário de uma corretora ganha um bônus de 30 u.m. a cada investimento bem sucedido e é penalizado em 15 u.m. a cada investimento mal sucedido.

Admita que ele tenha que propor 2 investimentos por dia. Sabe-se que se ele tem sucesso no 1o. investimento, a probabilidade de sucesso no 2o. é 0,80; caso ele fracasse no 1o., a probabilidade de sucesso no 2o. é 0,50.

Sabendo que a probabilidade de ser bem sucedido no 1o. é 0,60, determine a distribuição de probabilidades do seu ganho diário.

- A. Qual é o ganho médio diário? E o seu desvio-padrão?
- B. O funcionário comunica ao seu chefe que se demitirá caso seu ganho médio diário seja inferior a R\$32,00. Qual deveria ser a penalização máxima para que o funcionário não se demita?

A: $E(X) = 27,6$ u.m. e $DP(X) = 34,90$ u.m. [$Var(X) = 1218,24$ u.m.²]

B: 8,88