Insper

Modelos probabilísticos contínuos

Distribuição Uniforme
Distribuição Exponencial

Bussab e Morettin: Capítulo 7.4
Anderson, Sweeney e Williams: Capítulo 6.1, 6.2 e 6.4

Objetivos de Aprendizagem

Os alunos devem ser capazes de:

- Reconhecer as variáveis aleatórias de interesse em um problema qualquer.
- Aplicar, teoricamente, as distribuições de probabilidades (isto é, modelos probabilísticos) adequadas para variáveis quantitativas contínuas.

Acompanhe, previamente, o PLANO DE AULA no BLACKBOARD!

Distribuição Uniforme

Exemplo 1

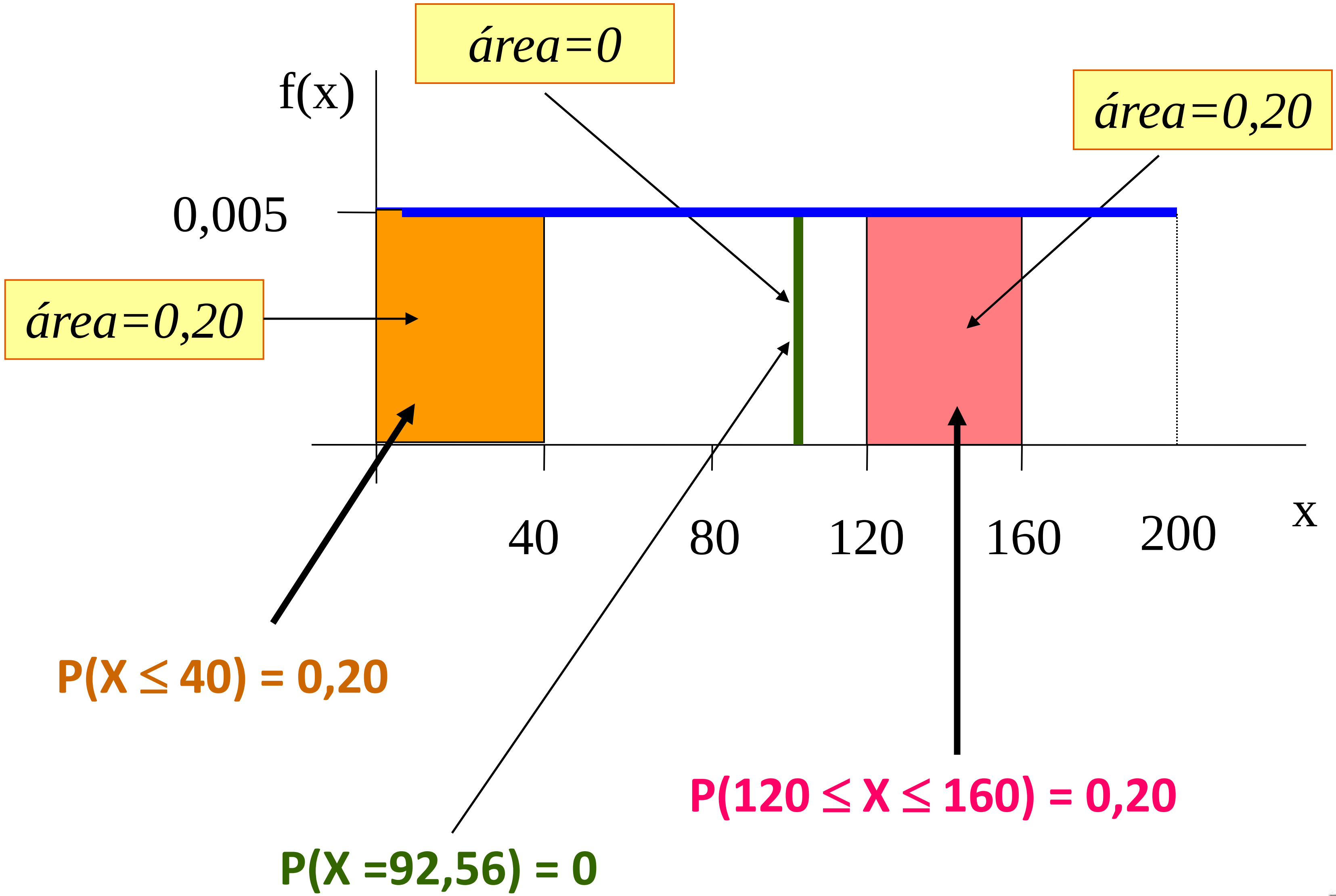
Apagões podem ocorrer devido a problemas em qualquer ponto de uma linha de transmissão de 200 km, sem que haja trechos de maior ou menor ocorrência.

Qual a probabilidade de um apagão ocorrer devido a um problema ocorrido

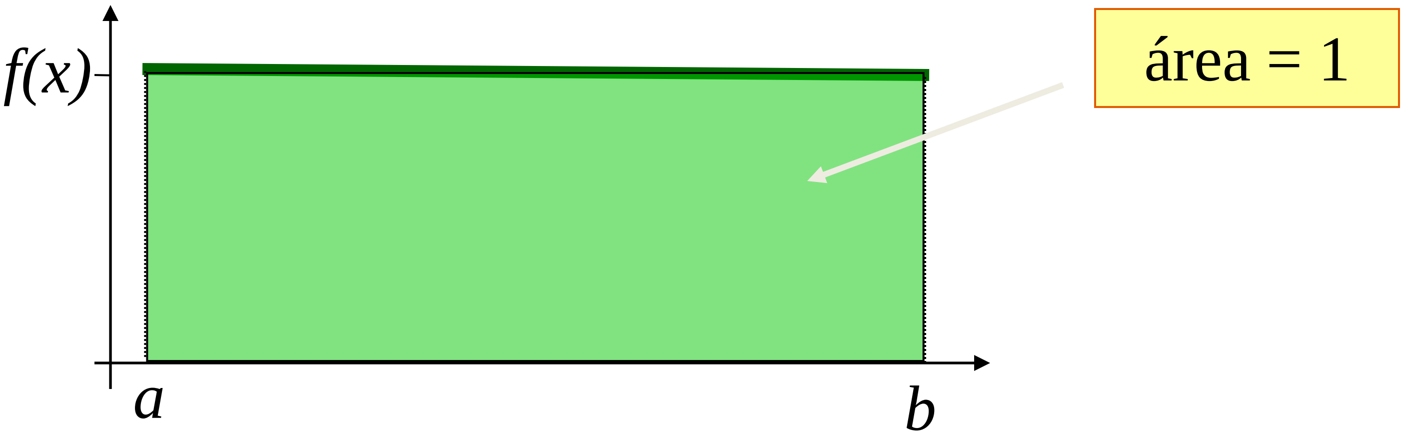
1. ao longo dos primeiros 40 km da linha?
2. entre o quilômetro 120 e 160 da linha?
3. no quilômetro 92,56 da linha?

X: trecho da ocorrência do problema (variável aleatória contínua).

Histograma teórico



Distribuição Uniforme



1. $f(x) \geq 0$ Sempre positiva.
2. Área abaixo da curva exatamente igual a 1;

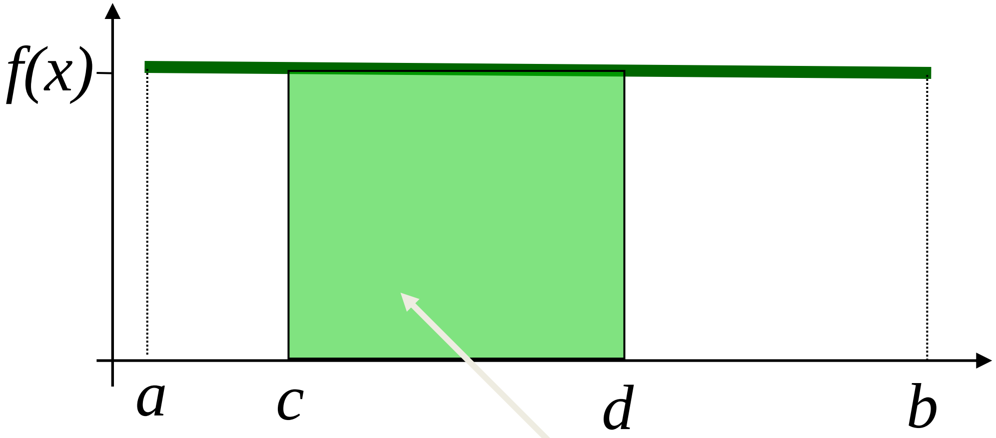
Distribuição Uniforme

3. A **função densidade de probabilidade** que modela uma v.a. X com distribuição uniforme definida no intervalo [*a*;*b*] é dada por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{array} \right\}$$

Distribuição Uniforme

4. A área sob a curva e acima de qualquer intervalo de valores é a probabilidade (proporção) de todas as observações que se enquadram naquele intervalo.



Área = P(c ≤ X ≤ d)

Distribuição Uniforme

5. **Média** e **Variância** de uma variável X com distribuição uniforme definida no intervalo [*a*;*b*] são dadas por

$$\mathrm{E(X)} = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\mathrm{Var(X)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

$X \sim \exp(\beta)$

Usada para modelagem de tempos de espera; grande aplicabilidade em estudos de sobrevivência e teoria das filas.

Função densidade de probabilidades

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} \quad \text{para } x \geq 0, \beta > 0$$

$$\mathrm{e} = 2{,}71828$$

Distribuição Exponencial

$$X \sim \exp(\beta)$$

Função densidade de probabilidades:

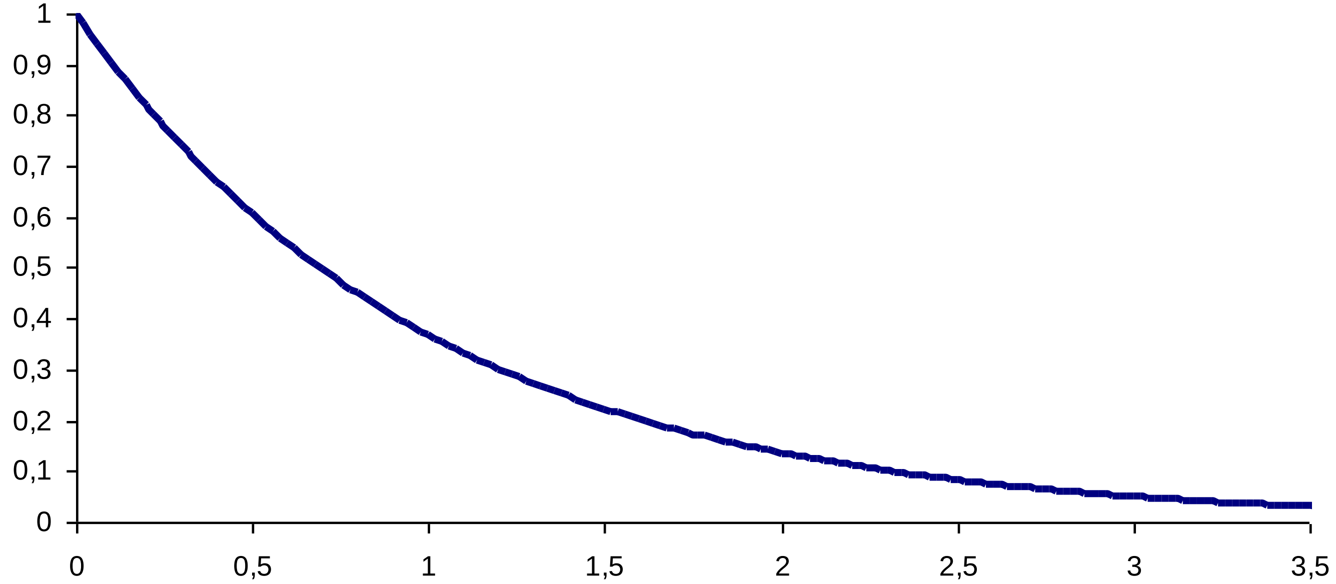
$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} \quad \text{para } x \geq 0, \beta > 0$$

Média e Variância de uma v.a. X com distribuição exponencial de parâmetro β:

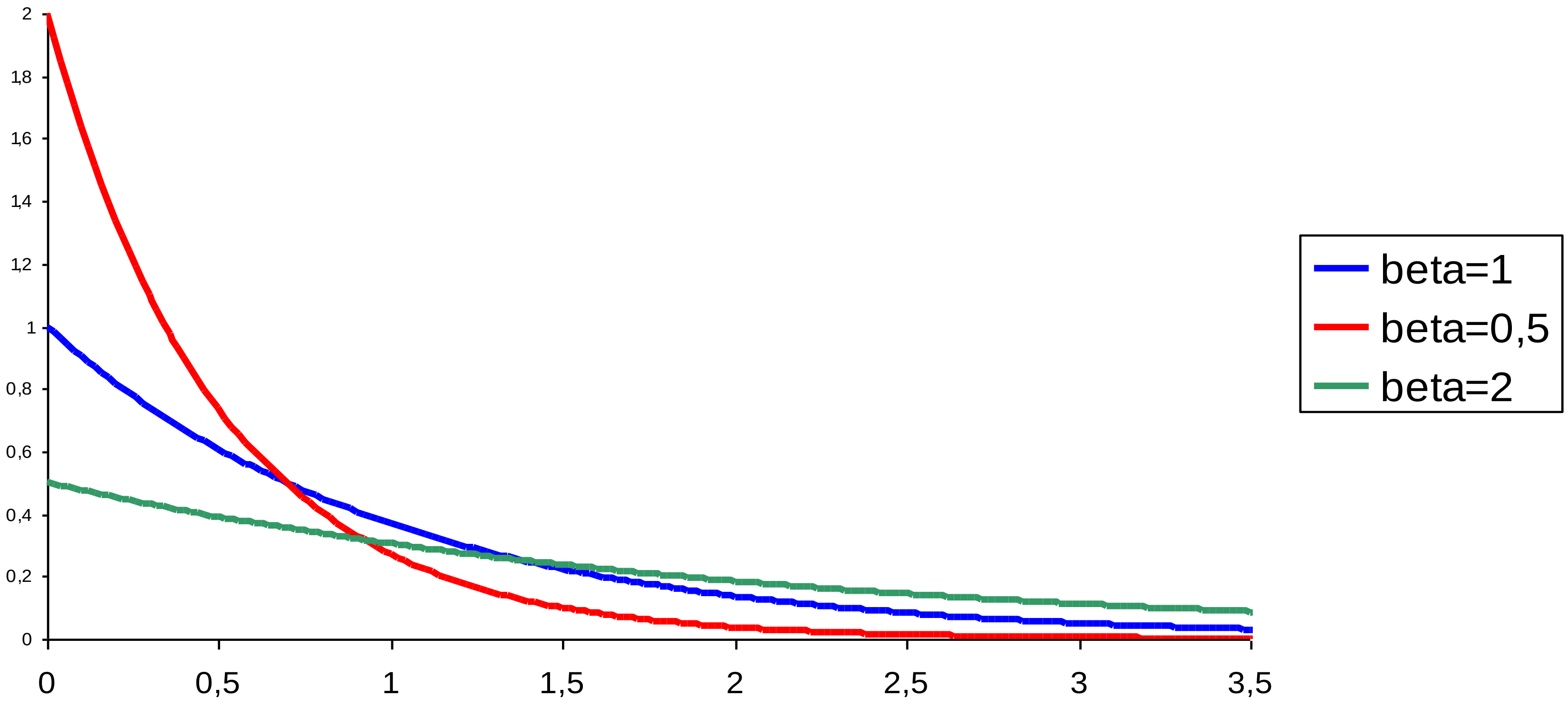
$$E(X) = \beta \quad \text{e} \quad Var(X) = \beta^2$$

Distribuição Exponencial

Função densidade de probabilidade de uma exponencial com média 1



Distribuição Exponencial



Distribuição Exponencial

Função distribuição acumulada (f.d.a.) da exponencial:

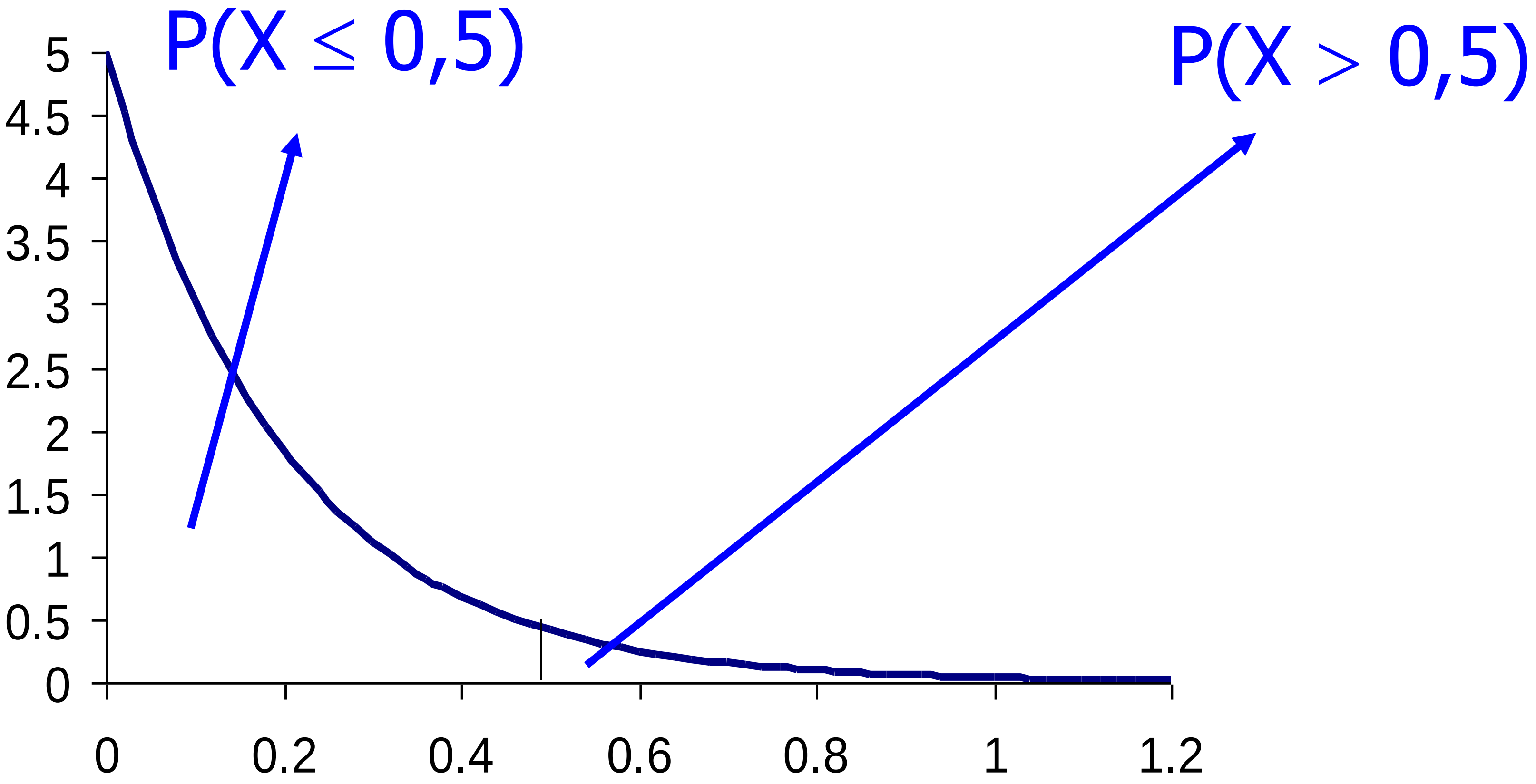
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Exemplo 2

Admita que o tempo até que uma venda seja realizada em uma loja siga um modelo (distribuição) exponencial com média de 0,2 horas (12 minutos).

Qual é a probabilidade de uma venda demorar mais de meia hora para ser feita?

Exemplo 2



Exemplo 2

Qual é a probabilidade de uma venda demorar mais de meia hora para ser feita?

$P(X > 0,5) = e^{-0,5/0,2} = 0,0821 = 8,21\%$

Exercícios

Exercício 1

O tempo necessário para uma determinada ação render 50% foi modelado de acordo com a densidade uniforme no intervalo de 5 a 12 (em meses) tendo por base experimentos conduzidos no passado. Um investidor compra um lote das ações citadas e, supondo válido o modelo mencionado acima, qual a probabilidade dele obter um rendimento de 50%:

a) Em até 10 meses?

b) Entre 6 e 8 meses?

c) Qual o tempo médio necessário para a ação render 50%? E o desvio padrão do tempo?

X: tempo de rendimento (variável aleatória contínua).

Exercício 2

Um vendedor de seguros vende apólices a 5 homens, todos da mesma idade e considerados de boa saúde. De acordo com as tabelas atuariais, a probabilidade de um homem, desta idade particular e com boa saúde, estar morto em até 30 anos após a aquisição do seguro é 1/3.

a) Calcule a probabilidade de pelo menos 2 dos 5 homens estarem mortos daqui a 30 anos. **0,5391**

b) Admita que o tempo de sobrevida após a aquisição do seguro (tempo de vida após a aquisição do seguro) de uma pessoa da mesma idade da descrita no enunciado obedeça à função densidade de probabilidades abaixo, para $x \geq 0$.

$$f(x) = \frac{1}{25} e^{-\frac{x}{25}}$$

Você acha que os dados fornecidos pelas tabelas atuariais são compatíveis com essa distribuição? Por quê? **0,699**

c) Qual é a sobrevida mediana? **Mediana=17,33 anos**

d) Qual é a sobrevida média? E seu desvio padrão? **E(X)=25 e DP(X)=25**

e) Qual o valor máximo da sobrevida dos 10% de segurados que morrem primeiro?

x_{max}=2,63 anos