Teste de Hipóteses para média populacional com variância populacional desconhecida

t de Student

Magalhães e Lima - Seção 8.3
Montgomery et al – Seção 4.5

Objetivos de Aprendizagem

Os alunos devem ser capazes de:

- ✓ **Estender a metodologia de teste de hipóteses que aborda média populacional, mas agora com σ^2 desconhecido;**

- ✓ **Buscar estatística de teste adequada e usá-la para tomada de decisão via Região Crítica e via valor-p.**

Acompanhe, previamente, o PLANO DE AULA no BLACKBOARD!

Exemplo 1

O número médio de pontos em um exame de inglês tem sido historicamente igual a 80.

Foram sorteados 10 estudantes que fizeram recentemente esse exame e observadas as notas:

65	70	76	86	59	81	75	72	81	83

Especialistas desconfiam que o rendimento médio dos alunos diminuiu e desejam testar essa afirmação por meio de um teste de hipóteses, com nível de significância de 5%.

Fazendo as suposições necessárias, qual seria a conclusão do teste?

$\bar{x}=$	74,80
s=	8,48

Insper

Passos para Construção de um Teste de Hipóteses (via RC)

1º.Passo: Fixe qual a hipótese nula, H_0, a ser testada e qual a hipótese alternativa (H_A).

2º.Passo: Defina a *estatística de teste* sob H_0. Não se esqueça de levantar as propriedades dessa estatística.

- **Uma estatística é qualquer função da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos.**

Estatística de Teste

Caso 2

(variância populacional desconhecida)

Relembrando...

Vamos considerar a seguinte hipótese nula:

$$H_0 \colon \mu = \mu_0$$

Vimos que um estimador com boas propriedades para o parâmetro μ é $\overline{X}$.

Sob algumas suposições, temos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Relembrando...

Sob a hipótese nula, vem que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Porém, a quantidade anterior não pode ser usada como *estatística de teste* pois σ é parâmetro desconhecido.

Ainda,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0; 1)$$

também não pode ser considerada uma *estatística de teste*, uma vez que σ é desconhecido.

FATO

Se o desvio padrão populacional σ for desconhecido, o desvio padrão amostral, S, é usado para estimar σ.

Entretanto, a padronização da média amostral $\bar{X}$ utilizando o desvio padrão amostral segue uma distribuição de probabilidades conhecida como *distribuição t-Student,* desde que uma a.a.s. tenha sido coletada de uma população em que X~Normal.

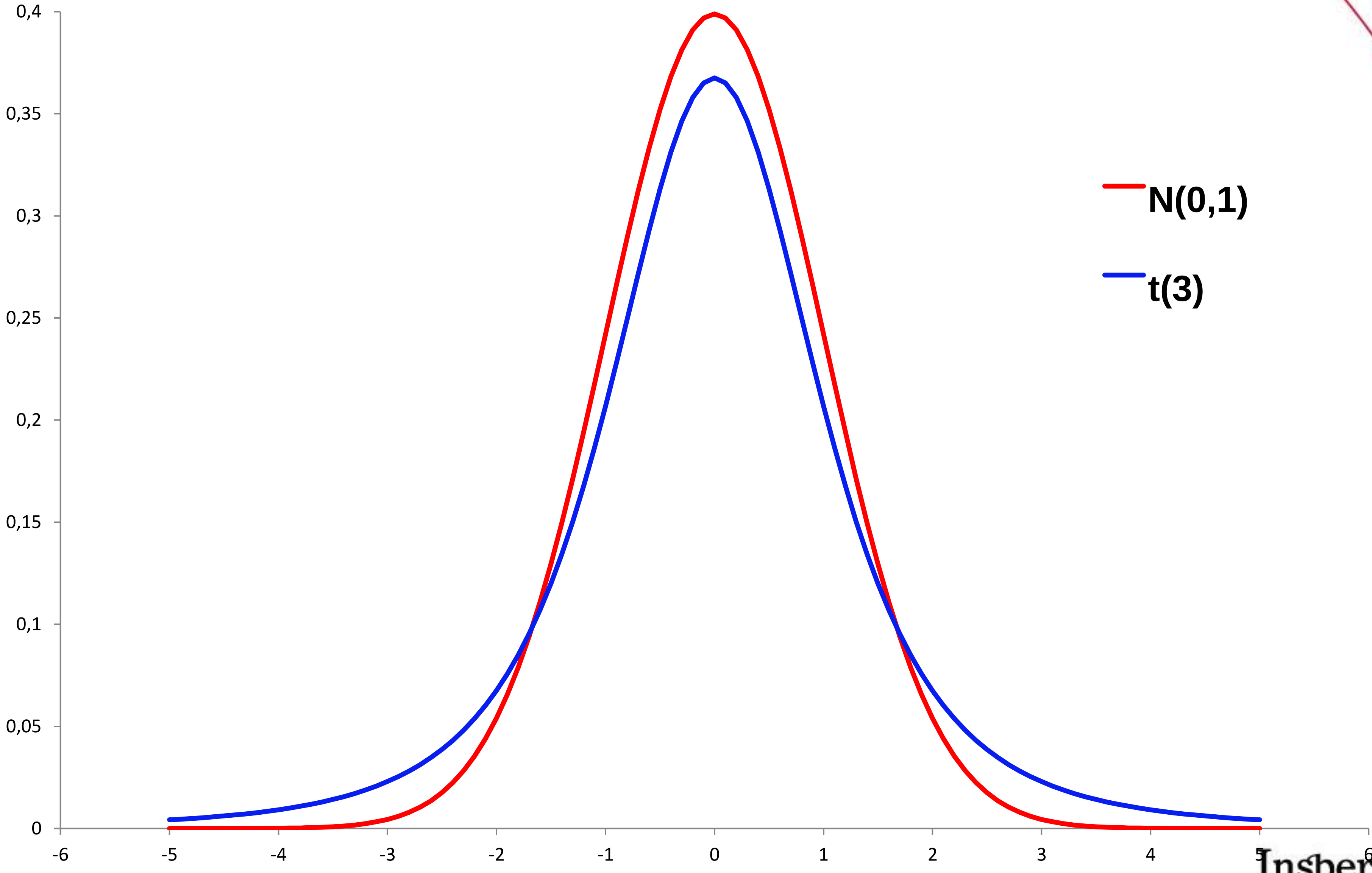
Insper

Assim, utilizando o estimador S^2 para σ^2 e supondo que a a.a.s. foi coletada de uma população cuja variável de interesse seja normalmente distribuída, temos, sob H_0, que

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

pode ser considerada uma estatística de teste.

$t_{(3)}$ *versus* Normal Padrão



Insper

Passos para Construção de um Teste de Hipóteses (via RC)

1º.Passo: Fixe qual a hipótese nula, H_0, a ser testada e qual a hipótese alternativa (H_A).

2º.Passo: Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual *estatística de teste* será usada sob H_0. Não se esqueça de levantar as propriedades dessa estatística.

3º.Passo: Fixe a probabilidade α de cometer erro de rejeitar H_0, sob H_0 verdadeiro, e use este valor para construir a região crítica RC. Lembre que esta região é construída para a estatística definida no segundo passo, usando o valor hipotetizado em H_0.

4º.Passo: Use as informações fornecidas pela amostra para encontrar o valor observado da *estatística de teste*.

5º.Passo: Se o valor observado da *estatística de teste* pertencer à região crítica, rejeite H_0; caso contrário, não rejeite.

Valor-p do Teste

Valor-p é o menor nível de significância que leva à rejeição de H_0 com base na amostra.

Passos para Construção de um Teste de Hipóteses (via valor-p)

1º.Passo: Fixe qual as hipóteses H_0 e H_A.

2º.Passo: Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual *estatística de teste* será usada sob H_0. Não se esqueça de levantar as propriedades dessa estatística.

3º.Passo: Use as informações fornecidas pela amostra para encontrar o valor observado da *estatística de teste*.

4º.Passo: Use o valor observado da *estatística de teste* para encontrar o valor-p, ou seja, a probabilidade de encontrar valores tão ou mais desfavoráveis à H_0 quanto a *estatística de teste* observada pela amostra.

5º.Passo: Se o valor-p for menor do que algum α fixado, rejeite H_0; caso contrário, não rejeite.

Teste unilateral ou unicaudal à direita

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_A : \mu > \mu_0$$

Estatística do teste observada (sob H_0):

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Regra de rejeição, ao nível α de significância:

α=P(erro I) estará na cauda à direita!

Rejeito H_0 se $t_{obs} > t_{(n-1)}^{(\alpha)} = t_c$

Teste unilateral ou unicaudal à esquerda

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_A : \mu < \mu_0$$

Estatística do teste observada (sob H_0):

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Regra de rejeição, ao nível α de significância:

α=P(erro I) estará na cauda à esquerda!

Rejeito H_0 se $t_{obs} < -t_{(n-1)}^{(\alpha)} = t_c$

Teste bilateral ou bicaudal

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_A : \mu \neq \mu_0$$

Estatística do teste observada (sob H_0):

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Regra de rejeição, ao nível α de significância:

$\alpha/2$ estará em cada cauda! A soma é α!

Rejeito H_0 se $\left|t_{obs}\right| > t_{(n-1)}^{(\alpha/2)} = t_c$

Exemplo 2

As latas de certa marca de refrigerante apresentam em seu rótulo o volume de 350 ml.

O fabricante deseja testar se o **conteúdo médio das latas é igual a 350 ml**, como anunciado no rótulo. Isto equivale a verificar se a máquina está regulada para colocar 350 ml, ou não, nas latas.

Para averiguar a afirmação do fabricante, foi coletada uma amostra de 36 latas do refrigerante em pontos de comercialização e mediu-se o conteúdo destas latas.

Os resultados obtidos na amostra foram: $\bar{x} = 347 \text{ ml e } s = 10{,}5 \text{ ml}$

Será que as latas contêm 350 ml de líquido com 95% de confiança?

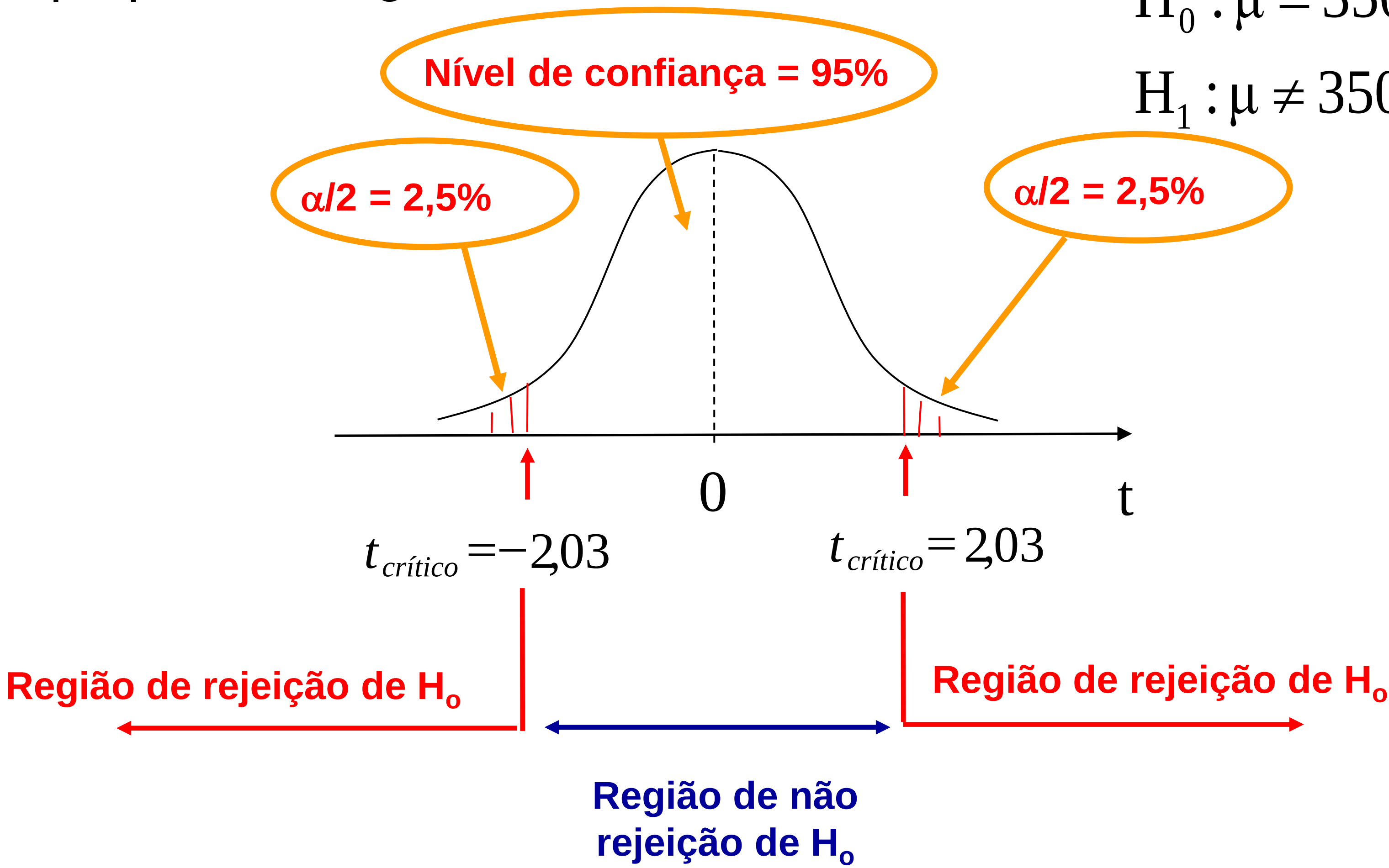
Insper

Voltando ao exemplo 2

Com base nas hipóteses do fabricante, rejeita-se a hipótese nula para valores pequenos ou grandes.

$$H_0 : \mu = 350 \text{ ml}$$

$$H_1 : \mu \neq 350 \text{ ml}$$



$$t_{crítico} = stats.t.ppf(1 - 0.025, df = 35) = 2.030$$

Voltando ao exemplo 2

Região crítica: se o valor da estatística t_{obs} for menor que -2,03 ou maior que 2,03, então rejeita-se a hipótese nula (o produto não está de acordo com as especificações do fabricante).

Estatística do Teste (obtida da amostra)

Padronização dos dados amostrais sob a hipótese nula (H_0), ou seja $\mu_0 = 350$.

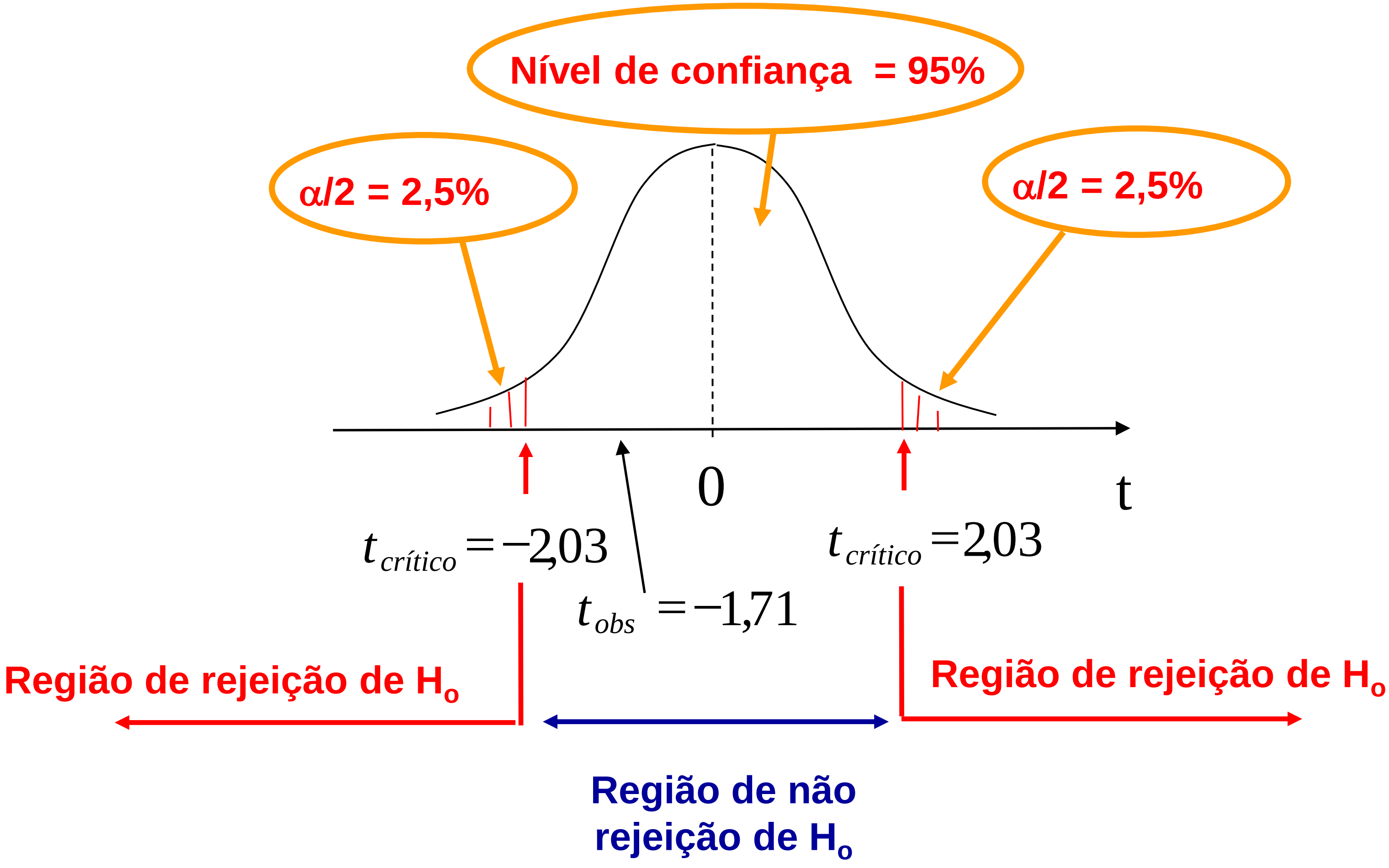
$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{amostra}} t_{obs} = \frac{347 - 350}{10,5/\sqrt{36}} = -1,71$$

amostra

$\bar{x} = 347\ ml$
$s = 10,5\ ml$

Insper

Voltando ao exemplo 2



<u>Conclusão:</u> **Não rejeitamos a hipótese nula**, isto é, não existem evidências estatísticas de que o conteúdo das latas esteja fora das especificações do fabricante, ao nível de significância de 5% (ou com 95% de confiança).

Voltando ao exemplo 2

Para calcular o valor-p para testes bicaudais devemos multiplicar por 2 o valor da probabilidade calculada com a estatística do teste, já que rejeitamos a hipótese nula tanto para pequenos como para grandes valores amostrais.

Dessa forma:

$$t_{obs} = (347 - 350)/(10{,}5/6) = -1{,}71$$

$$valor - p = 2 * stats.t.cdf(tobs, df = 35)$$

ou: $valor - p = 2 * stats.t.cdf(347, df = 35, loc = 350, scale = 10.5/6)$

Portanto, **não rejeitamos a hipótese nula** (pois valor-p = 0,0962 > 0,05 = α), isto é, não existem evidências estatísticas de que o conteúdo das latas esteja fora das especificações do fabricante.

Exemplo 3

Supondo as hipóteses a seguir, calcule e interprete o valor-p.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu > \mu_0$$

$$n = 30;\ s = 6;\ \mu_0 = 30;\ \bar{x} = 31{,}87;\ \alpha = 0{,}05$$

Resp.:

$$\text{valor} - \text{p} = P\left(t_{(29)} > 1{,}707\right) = 4{,}92\% < 5\% \Rightarrow \text{rejeita } H_0!$$

Insper

Exemplo 4

Supondo as hipóteses a seguir, calcule e interprete o valor-p.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu < \mu_0$$

$$n = 30;\ s = 6;\ \mu_0 = 30;\ \bar{x} = 28{,}13;\ \alpha = 0{,}05$$

Resp.:

$$\text{valor} - \text{p} = P\left(t_{(29)} < -1{,}707\right) = P\left(t_{(29)} > 1{,}707\right) =$$
$$= 4{,}92\% < 5\% \Rightarrow \text{rejeita } H_0!$$

Exemplo 5

Supondo as hipóteses a seguir, calcule e interprete o valor-p.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu \neq \mu_0$$

$$n = 30; \; s = 6; \;\; \mu_0 = 30; \;\; \bar{x} = 31{,}87; \;\; \alpha = 0{,}05$$

Resp.:

$$\text{valor} - \text{p} = 2 * P\left(t_{(29)} > 1{,}707\right) = 2 * 4{,}92\% =$$
$$= 9{,}84\% > 5\% \Rightarrow \text{NÃO rejeita } H_0!$$

Insper

Exercícios

Exercício 1

O índice de poluição no município de Curitiba segue uma distribuição normal com média e variância desconhecidas. O departamento ambiental deseja estimar o índice médio de poluição no município. Para isso, ele medirá a poluição em uma amostra de dias escolhidos aleatoriamente.

a) Pretende-se extrair, em Curitiba, uma amostra aleatória de 16 dias. Em uma cidade com características similares, verificou-se que o índice médio de poluição é de 90 u.m.. Construa uma regra de decisão para concluir se Curitiba é ou não mais poluída do que a outra cidade. Adote um nível de significância de 10%.

Rejeitamos a hipótese nula H0 se t_obs pertencer a Região Crítica (RC)!! RC={t_obs> 1.340 }

Exercício 1 (cont.)

b) Interprete os erros do tipo I e II relacionados ao teste acima, em termos do problema em questão.

c) Extraída uma amostra aleatória de 16 dias verificou-se, em Curitiba, um índice médio amostral de poluição de 95 u.m., com desvio padrão amostral igual a 10 u.m.. Conclua o T.H. por meio da construção da R.C. e por meio do valor-p.

α= 0.1 Valor-p= 0.0320

Rejeitamos a hipótese nula H0 se valor-p < α!!

Conclusão: Como nos resultados acima vemos que valor-p < α, então há evidências de que Curitiba é mais poluída do qu a outra cidade, com pelo menos 90% de confiança!!

Exercício 1 (cont.)

d) Descreva as suposições necessárias para as conclusões acima serem confiáveis.

e) Um técnico resolveu medir a poluição em 16 dias consecutivos. A amostra obtida satisfaz as suposições necessárias para a realização do teste? Por quê?

Exercício 2

O volume diário de negócios da corretora K. B. Sashata, em reais, segue uma distribuição normal. O diretor da corretora deseja fazer inferências sobre o volume médio negociado por ela diariamente.

a) Numa corretora de mesmo porte verificou-se que, em média, o volume negociado diariamente é de R$ 116.000,00. Formule as hipóteses de um teste para verificar essas duas corretoras apresentam, diariamente, o mesmo volume de negociações.

b) Interprete os erros tipo I e tipo II relacionados ao teste acima, em termos do problema em questão.

c) Extraída uma amostra de 25 dias, verificou-se que o volume médio negociado diariamente na corretora K. B. Sashata é igual a R$ 115.000,00, com desvio padrão amostral igual a R$2.000,00. Conclua o teste descrito no item (a) com base no cálculo do valor-p e via RC.

t_obs= -2.5 RC={t_obs< -2.064 ou t_obs> 2.064} Valor-p= 0.01965

Exercício 3

Em 2012, antes dos supermercados deixarem de distribuir sacolas plásticas gratuitamente para os consumidores, o consumo mensal de sacolas plásticas na cidade de São Paulo por adulto era, em média, de 25 sacolas plásticas.

No mesmo ano, os estabelecimentos passaram a cobrar pelo uso das mesmas e depois voltaram atrás. Alguns anos se passaram e uma ONG da área de sustentabilidade deseja avaliar se essas idas e vindas deixaram o consumidor um pouco mais consciente com o meio ambiente.

Para avaliar se consumo está mais consciente, verifique se o consumo de sacolas plásticas reduziu, em média, em mais do que 15% após todo esse período, ao nível de significância de 1%?

A ONG monitorou, por um mês, 100 adultos moradores da cidade e observou que o consumo médio amostral de sacolas plásticas entre eles foi de 20,01 unidades e com desvio amostral de 6 unidades.

t_obs= -2.067 RC={t_obs< -2.3646} Valor-p= 0.02069

Insper