

# **Distribuição de Probabilidades do Erro Amostral – Caso Normal**

# Objetivos de Aprendizagem

Os alunos devem ser capazes de:

- Compreender conceito de Distribuição de Probabilidades do Erro Amostral e suas características;
- Compreender o significado teórico da Margem de Erro;
- Aprender a dimensionar o tamanho de uma amostra, quando o objetivo for o de estimar a média populacional;

**Acompanhe, previamente, o PLANO DE AULA  
no BLACKBOARD!**

# DISTRIBUIÇÃO DO ERRO AMOSTRAL

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória (a.a.) da v.a.  $X$  que apresenta valor esperado igual a  $\mu$  e variância igual a  $\sigma^2$ .

Ainda, considere,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Defina  $e$  como sendo a diferença entre  $\bar{X}$  e o parâmetro  $\mu$ , isto é,

$$e = \bar{X} - \mu.$$

A quantidade anterior é chamada de **erro amostral da média**.

# DISTRIBUIÇÃO DO ERRO AMOSTRAL

Admitindo que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  seja uma amostra aleatória (a.a.) da v.a.  $X$  que apresenta valor esperado igual a  $\mu$  e variância igual a  $\sigma^2$ , não é difícil provar que

$$E(e) = E(\bar{X} - \mu) = E(\bar{X}) - \mu = \mu - \mu = 0$$

e que

$$Var(e) = Var(\bar{X} - \mu) = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

# DISTRIBUIÇÃO DO ERRO AMOSTRAL

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  for uma a.a. retirada da v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e, ainda, se  $e$  for definido como

$$\bar{X} - \mu$$

então

$$\frac{e}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

*Esse resultado segue do fato de que a distribuição de uma combinação linear de v.a. normais independentes também é normal.*

# DIMENSIONAMENTO DO TAMANHO DA AMOSTRA

Conhecendo o resultado anterior, podemos determinar qual a probabilidade de cometermos erros de determinadas magnitudes, a partir do seguinte resultado:

$$P(|e| < \varepsilon) = \gamma$$

ou,

$$P(-\varepsilon < e < \varepsilon) = \gamma$$

# DIMENSIONAMENTO DO TAMANHO DA AMOSTRA

Padronizando o *erro amostral da média*, vem que:

$$P\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{e}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

ou, ainda,

$$P(-z < Z < z) = \gamma$$

# DIMENSIONAMENTO DO TAMANHO DA AMOSTRA

Do *slide* anterior, não é difícil notar que

$$z = \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Assim, a **margem de erro**,  $\varepsilon$ , fica dada por

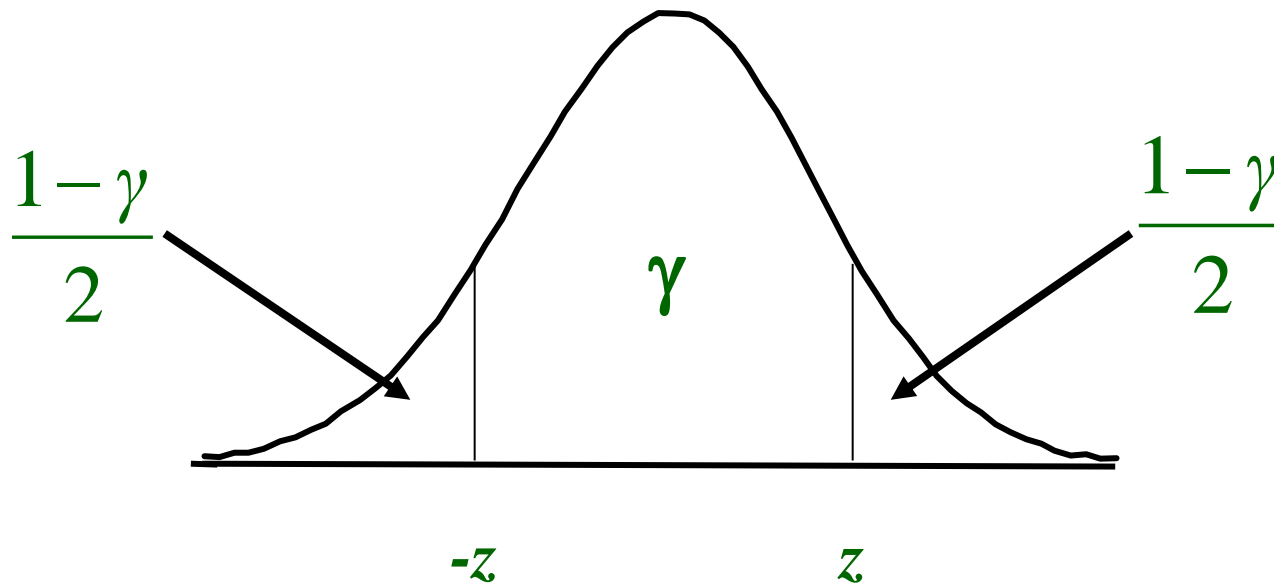
$$\varepsilon = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

E, por conseguinte, não é difícil ver que

$$n = \left( \frac{z \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$



# Observação



$\gamma$  - coeficiente de confiança;

$z$  - é um valor obtido da distribuição normal padrão.



# Exercícios

# Exercício 1

Após entrevistar 100 membros de uma categoria profissional, um pesquisador encontrou um salário médio de R\$ 1.582,85. Segundo alguns órgãos governamentais, o verdadeiro desvio padrão dos salários dessa categoria é da ordem de R\$ 256,70. Adotando um coeficiente de confiança de 95%, e assumindo que a variável de interesse tem distribuição normal, qual é a margem de erro desse estudo?

$$\varepsilon = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \times \frac{256,70}{\sqrt{100}} = 50,31$$

## Exercício 2

Seja  $X$  o salário dos trabalhadores de uma certa região e assuma que  $X$  tem distribuição normal. Definamos  $e = \bar{X} - \mu$  como sendo o erro amostral da média. Suponha que a variância dos salários dessa região seja 400 reais<sup>2</sup>.

- a) Determine a média e a variância de  $e$ .
- b) Que proporção das amostras de tamanho 25 terão erro amostral absoluto maior do que 2 reais? 61,7%
- c) E qual proporção das amostras de tamanho 100? 31,74%
- d) Nesse último caso, qual o valor de  $d$ , tal que  $P(|e| > d) = 0,01$ ?  
 $\cong 5,15$
- e) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a 1 real?  $\cong 1.537$

# Distribuição Normal : Valores de $P( Z \leq z ) = A(z)$

	Segunda decimal de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000