Ciência dos dados

PROPRIEDADES DE

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

quando há combinação linear de variáveis aleatórias

Montgomery e Runger (6ª. Edição) : Capítulo 5 – Seção 5-4
Magalhães e Lima (7ª. Edição): Capítulo 5

Objetivos de Aprendizagem

Os alunos devem ser capazes de:

- Reconhecer as variáveis aleatórias de interesse em um problema qualquer.
- Aplicar propriedades de esperança e variância quando há combinação linear entre variáveis aleatórias.

Acompanhe, previamente, o PLANO DE AULA no BLACKBOARD!

Motivação Prática

Você foi designado pelo seu grupo de Acionamentos para comprar os componentes para o projeto final.

Depois de cotar em diversas lojas, apurou-se que um pacote com mil peças de resistor de carbono 1/8w tem o preço distribuído como uma normal com média 21 reais e desvio padrão de 2 reais, ou seja, $X \sim N(21; 4)$.

Já um pacote de jumpers/fios macho-fêmea com 40 unidades de 20 cm tem o preço distribuído como uma normal com média 18,90 reais e desvio padrão de 1,50 reais, ou seja, $Y \sim N(18,90; 2,25)$.

Dado que você vai precisar dos componentes citados acima, se todos os grupos (n) comprarem aleatóriamente em alguma loja, qual será a média e o desvio padrão do gasto dos grupos?

No fundo, desejamos saber: Qual é μ_G e σ_G, em que:

$$G = X + Y,$$

e X e Y são definidos pelos modelos citados acima.

Inicialmente, assuma que os preços dos produtos sejam independentes.

Assuma também que haja 100 grupos. Assim, simule $n = 100$ valores de cada uma das variáveis aleatórias (X e Y) respeitando as distribuições delas.

Propriedades da Esperança

Sejam a e b constantes e X e Y variáveis aleatórias:

a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

b) $E(aX+bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$

Se X e Y são **independentes** ou **dependentes**, os resultados acima são sempre válidos!!

Propriedades da Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias:

a) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

b) $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

sendo $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Se X e Y são **independentes**, então

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Insper

Propriedades da Variância

Sejam a e b constantes e X e Y variáveis aleatórias:

a) $Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$

b) $Var(aX-bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) - 2abCov(X,Y)$

sendo $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Se <u>X e Y são **independentes**</u>, então

$$Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$$

$$Var(aX-bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$$

Exemplo 2

Em uma determinada loja de roupas, o preço médio da calça jeans é de R$ 118,00, com um desvio-padrão associado a essa variável de R$ 22,00.

a) Defina a variável aleatória X em termos do problema.

b) Uma mãe de trigêmeas entra nessa loja e deseja comprar uma calça jeans para cada filha, mas para evitar brigas, comprará todas iguais. Qual o gasto total esperado dessa mãe e respectivo desvio padrão?

c) Uma outra mãe de três filhas entra nessa loja e deseja comprar uma calça jeans para cada filha. Como suas filhas não têm gostos iguais, fará escolhas independentes e não necessariamente iguais. Qual o gasto total esperado dessa outra mãe e respectivo desvio padrão?

DEIXE TODOS OS RESULTADOS TEÓRICOS EXPLICITAMENTE DEMONSTRADOS NA SUA RESOLUÇÃO.

Propriedades da Esperança e Variância

Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias quaisquer, então

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

$$Var(X+Y+Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) + \\ + 2Cov(X,Y) + 2Cov(X,Z) + 2Cov(Y,Z)$$

Propriedades da Esperança e Variância

Sejam X_1, X_2, ..., X_k variáveis aleatórias **independentes**, então

$$E(X_1 + \cdots + X_k) = E(X_1) + \cdots + E(X_k)$$

$$Var(X_1 + \cdots + X_k) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_k)$$

Exercícios

Exercício 1

Um processo industrial pode ser executado em duas etapas independentes. O tempo gasto em cada etapa segue uma distribuição com média de 5 horas e desvio-padrão de 10 horas.

Um engenheiro resolveu modificar o processo de produção fazendo com que seja executado numa única fase, cujo tempo de execução é o dobro da primeira etapa do processo atual.

Vale a pena adotar o processo proposto pelo engenheiro?

R: Atual: $E(T) = 10$ e $DP(T) = 14{,}14$
Novo: $E(T) = 10$ e $DP(T) = 20$

Exercício 2

Uma pessoa irá comprar uma camisa e uma calça. Os dois produtos serão adquiridos numa mesma loja. O preço da camisa segue uma distribuição aproximadamente normal de média \$45,00 e desvio-padrão \$3,00. O preço da calça segue uma distribuição aproximadamente normal de média \$60,00 e desvio-padrão \$5,00. Sabe-se ainda que a correlação entre os preços da camisa e da calça é da ordem de 0,25.

a) Uma pessoa possui apenas \$95,00 para comprar a camisa e a calça, indo a um único estabelecimento escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de conseguir comprar os dois produtos? Considere que o gasto total com a compra de uma calça e uma camisa também segue uma distribuição aproximadamente normal. **6,06%**

b) Indo a um único estabelecimento, qual a probabilidade de se pagar mais caro na camisa do que na calça? **0,18%**

Insper

Exercício 3

O preço de compra, em reais, de cada unidade da matéria-prima M1 não é fixo (único), pois pode variar de região para região brasileira. Neste caso, assuma que o preço de M1 pode ser modelado por uma distribuição normal com média 15 reais e desvio padrão 3 reais.

a) Qual é o menor valor cobrado pela matéria-prima M1 referente aos 39% dos locais mais careiros? $P(M1 > x) = 0{,}39$. Assim, $x = 15{,}84$.

b) Um determinado produto, que será lançado no mercado, é composto por três unidades de mesmo valor da matéria-prima M1. Ainda, na fabricação desse produto, há um custo fixo de 30 reais por produto produzido. O valor comercializado de cada produto será definido para que se tenha um lucro de 35% sobre o valor da etiqueta. Encontre a esperança, variância e distribuição do valor comercializado de cada produto.

os parâmetros da distribuição Normal de V: valor de venda

➔ média = 115,3833 e variância = 191,7089

Exercício 4

Dentre os clientes de uma seguradora, 25% são mulheres. Do histórico da empresa, sabe-se que 20% das mulheres acabam acionando o seguro para alguma indenização, enquanto que apenas 10% dos homens acionam o seguro para isso.

Para definir o preço do seguro a seguradora usa a informação de que a indenização de um acidente provocado por mulheres é da ordem de R$800,00, enquanto que a indenização de acidentes causados por homens é da ordem de R$2000,00. Obviamente se não ocorrer acidentes, não há indenização.

a) Qual é a distribuição de probabilidades do gasto com indenizações de uma apólice qualquer? Se há 10.000 pessoas na carteira, quanto se espera gastar com indenização considerando independência entre as pessoas? Com que desvio-padrão? R: E(X) = 1,9 milhões e DP(X) = 54,4 mil

b) Admitindo que, em cada apólice, incida um custo fixo de R$50, qual deve ser o preço médio de uma apólice para que a seguradora garanta um lucro médio de R$100 por apólice? R: 340 reais