# 第 2 章：数据

- 《**机器学习**》(第1-2章), 周志华, 清华大学出版社, 2016
- **《数据挖掘导论》**(第2版)，陈封能等著，段磊等译，机械工业出版社，2019
- 《**机器学习精讲**》（看第1章），安德烈-布可夫著，人民邮电出版社，2020

# 什么是数据?

- **数据集：** 一组含有特征(属性)的数据对象(样本)的集合
- **样本：** 由一组**特征(属性)**所描述的一个对象
  - **样本**通常由**特征**和**标记**组成（监督学习）
  - **样本**也成为**示例**、记录、点、向量、模式、事件、案例、实例、观测、实体
- **特征(属性)：** 描述样本或对象在某方面的表现或性质的事项
  - 例如：某个人的身高、北京某一时刻的气温等等
  - **特征**也叫做**属性**、变量、特性、字段、维
  - 属性因对象而已，或随时间而变化

特征

标记

10个样本

| *Tid* | 偿还债务 | 婚姻状态 | 纳税收入 | 欺诈 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Yes | Single | 125K | No |
| 2 | No | Married | 100K | No |
| 3 | No | Single | 70K | No |
| 4 | Yes | Married | 120K | No |
| 5 | No | Divorced | 95K | Yes |
| 6 | No | Married | 60K | No |
| 7 | Yes | Divorced | 220K | No |
| 8 | No | Single | 85K | Yes |
| 9 | No | Married | 75K | No |
| 10 | No | Single | 90K | Yes |

个人是否存在欺诈的调查表

# 数据的数学表示

- 一般地，令 $D=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_m\}$ 表示 $m$ 个样本的数据集，每个样本由 $d$ 个属性描述，则每个样本 $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1};x_{i2};\ldots;x_{id})$ 是 $d$ 维样本空间$\mathcal{X}$中的一个**向量**，$\boldsymbol{x}_i\in\mathcal{X}$，其中$x_{ij}$是 $\boldsymbol{x}_i$ 在第 $j$ 个属性上的取值，$d$ 称为样本 $\boldsymbol{x}_i$ 的**维数**。$(\boldsymbol{x}_i,y_i)$表示第 $i$ 个样例，$y_i$ 是样本$\boldsymbol{x}_i$的标记(有时也称标签或标注)。
- 如下表，样本数 m=17，$\boldsymbol{x}_1=($青绿；蜷缩；浊响；清晰；凹陷；硬滑$)$
- $x_{21}=$“乌黑” 是 $\boldsymbol{x}_2$ 在第1个属性上的取值

描述西瓜的6个特征/属性

| 编号 | 色泽 | 根蒂 | 敲声 | 纹理 | 脐部 | 触感 | 好瓜 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 青绿 | 蜷缩 | 浊响 | 清晰 | 凹陷 | 硬滑 | 是 |
| 2 | 乌黑 | 蜷缩 | 沉闷 | 清晰 | 凹陷 | 硬滑 | 是 |
| 3 | 乌黑 | 蜷缩 | 浊响 | 清晰 | 凹陷 | 硬滑 | 是 |
| 6 | 青绿 | 稍蜷 | 浊响 | 清晰 | 稍凹 | 软粘 | 是 |
| 7 | 乌黑 | 稍蜷 | 浊响 | 稍糊 | 稍凹 | 软粘 | 是 |
| 10 | 青绿 | 硬挺 | 清脆 | 清晰 | 平坦 | 软粘 | 否 |
| 14 | 浅白 | 稍蜷 | 沉闷 | 稍糊 | 凹陷 | 硬滑 | 否 |
| 15 | 乌黑 | 稍蜷 | 浊响 | 清晰 | 稍凹 | 软粘 | 否 |
| 16 | 浅白 | 蜷缩 | 浊响 | 模糊 | 平坦 | 硬滑 | 否 |
| 17 | 青绿 | 蜷缩 | 沉闷 | 稍糊 | 稍凹 | 硬滑 | 否 |

标记（label）

样本

# 特征(属性)的类型

# 特征的取值

- 特征的取值是指派给一个特征的数字或符号
  - **样本-->姓名：张三、年龄：18、性别：男**
  - **特征：**{姓名、年龄、性别}，**取值：**{张三、18、男}
- 相同的特征可以有不同的取值
  - **特征：**{姓名、身高}，**取值：**{张三、175cm}；{李四、180cm}
- 不同的特征可以有相同的取值
  - **特征：**{年龄、排名}，**取值：**{18、18}

# 特征(属性)的类型 (测量标度的类型)

| 属性类型 | | 描述 | 例子 | 操作 |
|---|---|---|---|---|
| 分类的(定性的) | 标称 | 标称属性的值只是不同的名字，即标称值只提供足够的信息以区分对象(=，≠) | 邮政编码、雇员 ID 号、眼球颜色、性别 | 众数、熵、列联相关、$\chi^2$检验 |
| | 序数 | 序数属性的值提供足够的信息确定对象的序(<，>) | 矿石硬度{好，较好，最好}、成绩、街道号码 | 中值、百分位、秩相关、游程检验、符号检验 |
| 数值的(定量的) | 区间 | 对于区间属性，值之间的差是有意义的，即存在测量单位(+，－) | 日历日期、摄氏或华氏温度 | 均值、标准差、皮尔逊相关、$t$ 和 $F$ 检验 |
| | 比率 | 对于比率变量，差和比率都是有意义的(*，/) | 绝对温度、货币量、计数、年龄、质量、长度、电流 | 几何平均、调和平均、百分比变化 |

- 定性属性不具有数的大部分性质
- 定量属性用数表示，并且具有数的大部分性质，可以是连续值或整数值

参考：《数据挖掘导论》(第2版)，陈封能等著，段磊等译，机械工业出版社，2019，第2章

# 特征的类型（测量标度的类型）

- **标称类型** Nominal
  - **只能区分样本之间的不同**，例如：学号、籍贯、邮政编码
- **序数类型** Ordinal
  - **能够对样本之间的顺序进行区分**，例如：排名、年级、衣服的号码{S, M, L, XL, XXL}
- **区间类型** Interval
  - **能够对样本在坐标系上的相对距离进行度量**，例如：日历上的日期、摄氏或华氏温度等
- **比率类型** Ratio
  - **能够对样本在坐标系上的绝对位置进行标定**，例如：开尔文温度、 长度、时间、质量、货币单位等

# 特征的类型的本质区别

- 特征类型的本质区别是其所对应的**操作**不同
  - **相异性:** $=$ $\neq$
  - **序:** $<$ $>$
  - **加法:** $+$ $-$
  - **乘法:** $*$ $/$
- 不同的特征类型适用不同的操作
  - **标称类型：** 相异性
  - **序数类型：** 相异性、序
  - **区间类型：** 相异性、序、加法
  - **比率类型：** 相异性、序、加法、乘法

下方属性类型拥有上方属性类型上的所有性质与操作

(属性类型的定义是累积的)

# 特征的类型

- **标称类型** Nominal　　适用符号：= ≠
  - 例如：学号、籍贯、邮政编码
- **序数类型** Ordinal　　适用符号：= ≠ < >
  - 例如：排名、年级、衣服的号码{S, M, L, XL, XXL}
- **区间类型** Interval
  - 有顺序，可以比大小，数据的差值有意义，但比例没有意义，可以加减，不能乘除（但可以算平均值）
  - 例如：日历上的日期、摄氏或华氏温度等
- **比率类型** Ratio
  - 有顺序，可以比大小，数据差值和比率都有意义，可以四则运算。例如：开尔文温度、长度、时间、年龄、质量等

# 区间类型和比率类型的区别

- 举个栗子：“**10°的水的温度是5°水温度的两倍**” 这句话是否成立?
  - 摄氏温度?
    - 摄氏温度（° C）是**区间尺度，没有绝对零点。**
    - **冰水混合物的温度定为0摄氏度**（0不代表无，通常是一个分界值），**沸水的温度定为100摄氏度**。有顺序，可以比大小，**数据的差值有意义**，可以加减，不能乘除。可以说10℃比5℃高，且高5℃，但是不能说是两倍
  - 开尔文温度（绝对温度）？
    - 具有绝对零点（0K = -273.15° C），因此可以进行倍数比较。
    - 可以说 20K 是 10K 的 2 倍

➢ 摄氏温度或华氏温度的的零度是硬性规定的，其比率是无物理意义的

# 区间类型和比率类型的区别

- 类似的例子
  - 小明的身高比全班的平均身高高3公分，小磊的身高比平均身高高6公分
  - 是否能说：“小磊的身高是小明身高的2倍”?
  - **“比全班平均身高高 X cm”** 其实是一个 **区间尺度**，因为它是相对于平均身高（一个人为设定的基准）的测量，并没有绝对零点，不能进行倍数比较。因此，**说 6 cm 是 3 cm 的 2 倍** 仅适用于增量，而不能说小磊的身高是小明的 2 倍。

| | |
|---|---|
| • **区间类型：** | 向异性、序、加法 |
| • **比率类型：** | 向异性、序、加法、乘法 |

# 区间类型和比率类型的特点

- 区间类型（interval-scaled）属性特点：
  - 例：温度属性，一般表示：10℃~15℃。
  - 1. 用相等的单位尺度度量，区间属性的值有序，可以为正、0、负。（值的秩评定）
  - 2. 允许比较与定量评估值之间的差。
  - 3. 区间标度属性是数值的，中心趋势度量中位数和众数，还可以计算均值。
- 比率类型（ratio-scaled）属性特点：
  - 1. 具有固有零点的数值属性。（也就是该种属性中会有固有的为 0 的值）
  - 2. 一个值是另一个的倍数（或比率）。
  - 3. 值是有序的。（可以计算差、均值、中位数、众数）
  - 例：度量重量、高度、速度和货币量（例如 100 元是 1 元的 100 倍）的属性。

# 特征类型的其它分类方式：离散与连续

- 用值的个数描述属性
- **离散特征**（**Discrete Feature**）
  - 具有有限或无限可数个值， 例：邮政编码, 计数, 所采集文档的单词集…
  - 常常使用整数变量表示
  - 可以是分类的（定性的）也可以是数值的（定量的）
- **连续特征**（**Continuous Feature**）
  - 取实数值的特征，例：温度、高度、重量…
  - 在实际使用中，实数只能用有限的精度测量与表示
  - 连续特征常常用浮点变量表示

# 特征类型的其它分类方式：离散与连续

- **二元特征（Binary Feature）**
  - 仅仅具有两个值的特征，常常使用**0**或**1**表示
  - 例：性别、对错、选课与否...
  - 二元属性是离散特征的一种特殊情形

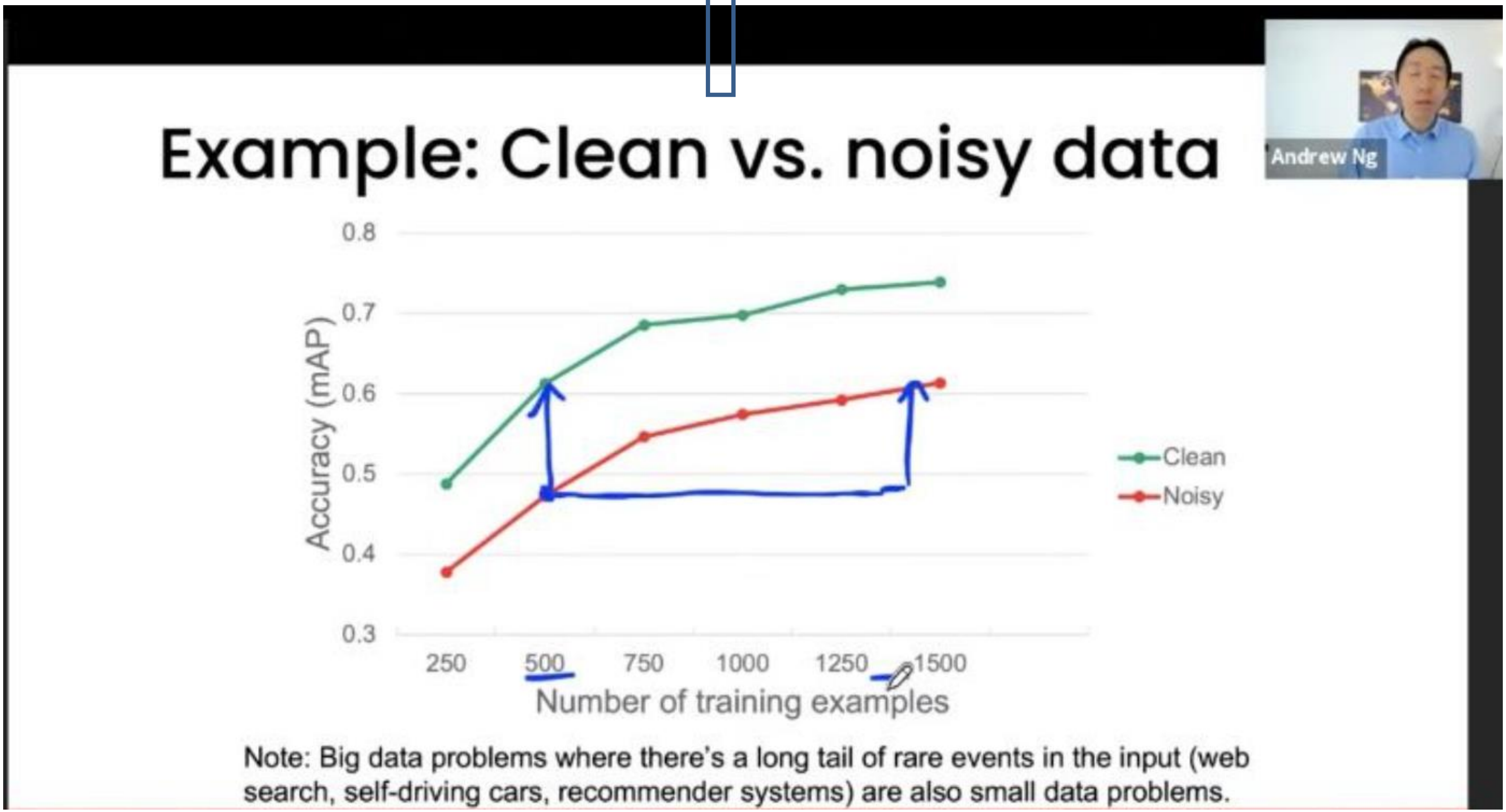
- **非对称特征（Asymmetric Binary Feature）**
  - 出现非0值才重要的特征，其状态的结果不是同等重要
  - 只有非0值才重要的二元特征称为非对称二元特征
  - 例：体检结果阳性(1)与阴性(0)，大部分情况下该属性都为0，因此我们一般只关注属性为1的情况，所以这个就是非对称的二元特征(属性)。

# 数据质量的重要性

- 在样本小于10000的情况下，保证数据标注的一致性，可以提升效果。达到相同的效果，需要的数据量也会减少。
- 无法获得更多数据的时候，提高数据质量至关重要。
- 清洗脏数据与扩大一倍数据集带来的提升效果相当。
- 大部分的情况，训练数据都在10000条以下（小数据）。提升数据质量带来的效果提升比大数据集更明显
- 即使像网络搜索、自动驾驶和推荐系统这些大数据任务，其中有很多的长尾事件其实也是小数据问题。

# 数据的质量的重要性

- 调优模型的效果提升<调优数据质量的效果提升
- 调优数据比调优模型更有效



# 数据的质量的重要性

- **好的数据是指：**

- 标签定义的一致性：（定义标签y是不清晰的）
- 覆盖所有的代表性案例：（对输入x的覆盖面）
- 生产环境数据分布变化的及时反馈（分布覆盖数据漂移和概念漂移）
- 合适的数据集大小

# 样本的相似性和相异性

参考：《数据挖掘导论》(第2版)，陈封能等著，段磊等译，机械工业出版社，2019，第2章

# 样本相似性和相异性

- 相似度和相异度的基本概念
- 相异度 (距离(Distances))
- 相似度（Similarities）
- 相关性（Correlation）

# 相似度和相异度的度量

- 相似度 (similarity)
  - 两个样本相似程度的**数值化**度量
  - 两个样本越相似，他们之间的相似性就越高
  - 相似度是非负的，**通常**取值范围在[0, 1]

- 相异度 (dissimilarity)
  - 两个样本之间差异程度的**数值化**度量
  - 两个样本越相似，他们之间的相异性越低
  - 相异度是非负的，取值在[0,1]和[0, ∞)均有

- 通常术语**距离（distance）**用作**相异度**的同义词

# 数据相似性和相异性

- 相似度和相异度的基本概念
- **距 离（Distances)**
- 相似性（Similarities）
- 相关性（Correlation）

# 简单属性(单一特征)的相似度和相异度

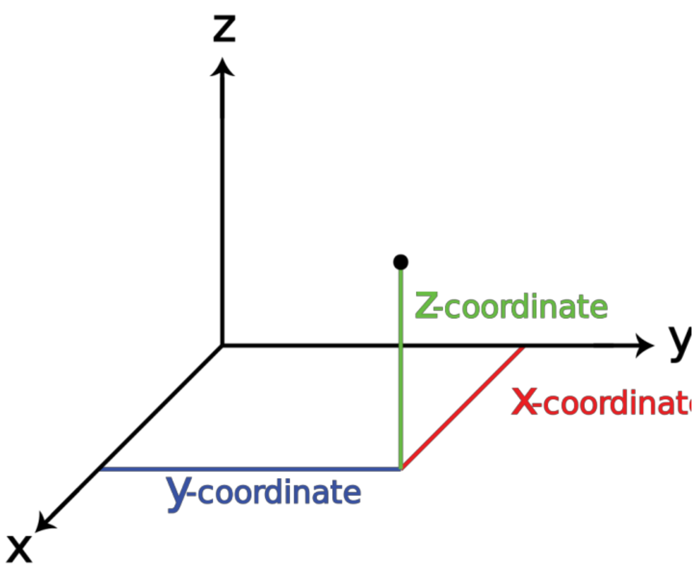
- $x$ 和 $y$ 分别对应两个样本的某一个属性值

常用简单属性的相似度和相异度

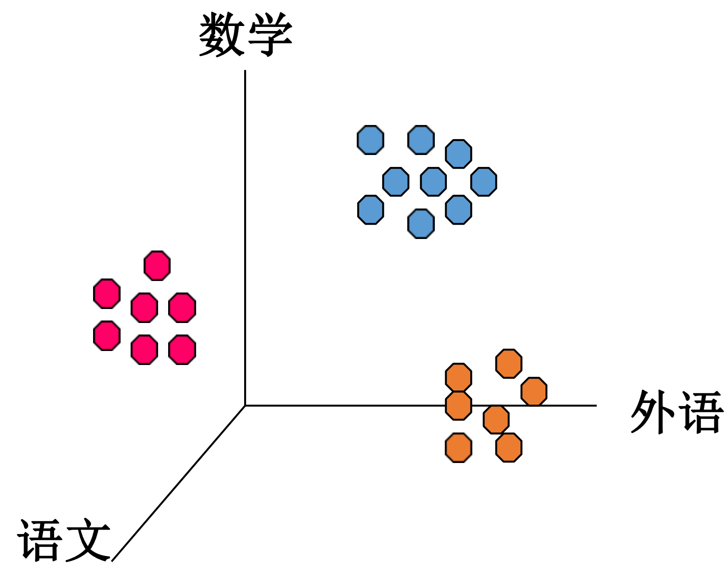
| 属性类型 | 相异度 | 相似度 |
|---|---|---|
| 标称的 | $d=\begin{cases}0 & \text{如果 } x=y \\ 1 & \text{如果 } x\neq y\end{cases}$ | $s=\begin{cases}1 & \text{如果 } x=y \\ 0 & \text{如果 } x\neq y\end{cases}$ |
| 序数的 | $d=\frac{\lvert x-y\rvert}{(n-1)}$<br>值映射到整数 0 到 $n-1$，其中 $n$ 是值的个数 | $s=1-d$ |
| 区间或比率的 | $d=\lvert x-y\rvert$ | $s=-d$，$s=\frac{1}{1+d}$，$s=\mathrm{e}^{-d}$，<br>$s=1-\frac{d-\text{min\_d}}{\text{max\_d}-\text{min\_d}}$ |

# 坐标系与维度

- 在真实空间的坐标系下，空间中每一个点都可以表达为 **(x, y, z)** 的三维向量。
- 类似地，对于数据当中的每一个样本，都可以看作以特征为坐标系的高维空间中的一个点。




<x,y,z>




<语文,数学,外语>

# 欧氏距离 Euclidean Distance

- 欧几里德距离

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$$

其中 $n$ 是对象的数据维度(属性的个数)， $x_k$ 和 $y_k$ 分别是数据对象 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的第 $k$ 个属性。

四个点的 $x$ 和 $y$ 坐标

| 点 | $x$ 的坐标 | $y$ 的坐标 |
|---|---|---|
| p1 | 0 | 2 |
| p2 | 2 | 0 |
| p3 | 3 | 1 |
| p4 | 5 | 1 |

# 闵氏距离 Minkowski Distance

- 闵可夫斯基距离
  - 闵氏距离的欧式距离的一种**泛化**，欧式距离是闵氏距离的一种特例

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

闵可夫斯基
1864—1909

其中 $n$ 是对象的数据维度（属性的个数），$x_k$ 和 $y_k$ 分别是数据对象 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的第 $k$ 个属性。

# 闵氏距离 Minkowski Distance

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

- r=1, 曼哈顿距离，**L1范数，L1-norm**

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

- **r=2, 欧氏距离，L2范数，L2-norm**

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

- r=∞，上确界距离，**∞范数，L-norm**
  - 对象各个属性之间的最大距离，即上确界。

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty = \lim_{r \to \infty} \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

# 距离的典型特性

- 距离（如欧几里得距离）满足以下三个特性：
  1. **非负性**： 对于任意 $p$ 和 $q$，存在 $d(p, q) \geq 0$；当且仅 当 $p = q$ 时 $d(p, q) = 0$ .
  2. **对称性**：对于任意 $p$ 和 $q$ ， $d(p, q) = d(q, p)$.
  3. **三角不等式**：对于任意 $p$， $q$ 和 $r$， $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.
  - 其中 $d(p, q)$ 是 $p$ 和 $q$ 之间的距离。
- 满足上述三个特性的距离也成为一种度量 (metric)

# 数据相似性

- 相似度和相异度的基本概念
- 距　离（Distances）
- **相似性（Similarities）**
- 相关性（Correlation）

# 数据对象之间的相似度性质

如果 $s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是数据点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的相似度

1）仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时 $s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=1$。$(0\leqslant s\leqslant 1)$（非负性）

2）对于所有 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，$s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=s(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$。（对称性）

# 二元数据的相似度度量

- 对两个二元向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n$，值取0或1，两个对象的比较可以生成如下的四个量：

$f_{01}$= $\boldsymbol{x}$ 取 0 且 $\boldsymbol{y}$ 取 1 的属性数， $f_{10}$ = $\boldsymbol{x}$ 取 1 且 $\boldsymbol{y}$ 取 0 的属性数, $f_{00}$ = $\boldsymbol{x}$ 取 0 且 $\boldsymbol{y}$ 取 0 的属性数， $f_{11}$ = $\boldsymbol{x}$ 取 1 且 $\boldsymbol{y}$ 取 1 的属性数

- **简单匹配系数**（Simple Matching Coefficient, **SMC**）定义如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{SMC} &= \text{值匹配的属性个数} / \text{属性个数} \\ &= (f_{11} + f_{00}) / (f_{01} + f_{10} + f_{11} + f_{00}) \end{aligned}$$

- SMC通常在0和1之间取值，0代表对象一点也不相似，1代表对象完全相同。SMC对出现和不出现的都计数，因此，SMC对仅包含是非题的测验中发现问题回答相似的学生。
- 如果样本的属性都是**对称的二值离散型属性**，则样本间的距离可用简单匹配系数计算。
- **对称的二值离散型属性是指属性取值为1或者0同等重要**，例如：性别就是一个对称的二值离散型属性，即：用1表示男性，用0表示女性；或者用0表示男性，用1表示女性是等价的，属性的两个取值没有主次之分。

# 二元数据的相似度度量-Jaccard 系数（非对称的二元属性的对象）

- Jaccard 系数

$$J = \frac{\text{匹配个数}}{\text{00匹配中不涉及的属性个数}} = \frac{f_{11}}{f_{01} + f_{10} + f_{11}}$$

- 如果每个非对称的二元属性对应于商店的一种商品，则1表示该商品被购买，0表示该商品未被购买。由于未被顾客购买的商品数远大于被购买的商品数，因此，简单匹配系数(SMC)会判定所有的事务都是类似的。Jaccard值越大说明相似度越高。
- **Jaccard系数来处理仅包含非对称的二值离散型属性**。不对称的二值离散型属性是指属性取值为1或者0不是同等重要，例如：是否是癌症的结果，因此通常用1来表示阳性结果，而用0来表示阴性结果。

# 二元数据的相似度度量

- SMC和Jaccard系数

$x =$ (1 0 0 0 0 0 0 0 0 0)

$y =$ (0 0 0 0 0 0 1 0 0 1)

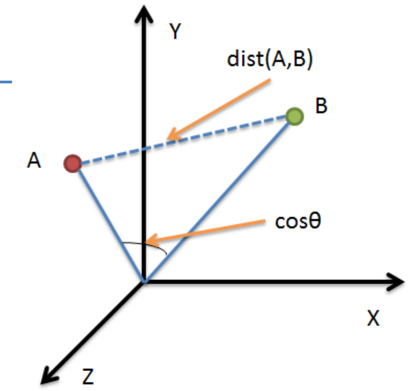
SMC = (F11 + F00) / (F01 + F10 + F11 + F00)

= (0+7) / (2+1+0+7) = 0.7

$J = (F_{11}) / (F_{01} + F_{10} + F_{11}) = 0 / (2 + 1 + 0) = 0$

- 当你和你的朋友在商场相遇时，你会不会说：
  - “**咱俩真是有猿粪！商场里面的上万种商品，咱们基本上都没有买。**”

# 余弦相似度 Cosine Similarity




如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个文档向量，则

$$\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\langle \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|'}$$

其中′表示向量或者矩阵的转置，$<\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}>$表示两个向量的内积：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$$

且$\|\boldsymbol{x}\|$是向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle} = \sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}$ 。

- 在向量的点积当中，0-0匹配是没有贡献的，因此，**余弦相似度和Jaccard系数一样，适用于非对称属性**。同时，余弦相似度**还可以处理非二元向量**。
- 欧式距离衡量空间点的直线距离，余弦距离衡量点在空间的方向差异。

# 余弦相似度 Cosine Similarity

- Example:

$d_1$ = **3 2 0 5 0 0 0 2 0 0**
$d_2$ = **1 0 0 0 0 0 0 1 0 2**

$d_1 \bullet d_2$= 3*1 + 2*0 + 0*0 + 5*0 + 0*0 + 0*0 + 0*0 + 2*1 + 0*0 + 0*2 = 5

$||d_1||$ = (3*3+2*2+0*0+5*5+0*0+0*0+0*0+2*2+0*0+0*0)$^{\mathbf{0.5}}$ = (42) $^{\mathbf{0.5}}$ = 6.481

$||d_2||$ = (1*1+0*0+0*0+0*0+0*0+0*0+0*0+1*1+0*0+2*2) $^{\mathbf{0.5}}$ = (6) $^{\mathbf{0.5}}$ = 2.245

cos( $d_1$, $d_2$) = 0.3150

# 数据相似性

- 相似度和相异度的基本概念
- 距　离（Distances）
- 相似性（Similarities）
- **相关性（Correlation）**

# 相关性 Correlation

- 相关性被用于测量两个变量(高度和重量)之间或两个对象之间的关系

- 若两个数据对象中的值来自不同的属性，可使用**相关性来度量属性之间的相似度**

Features 相关

相似/相异 Samples

| *Tid* | Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Yes | Single | 125K | No |
| 2 | No | Married | 100K | No |
| 3 | No | Single | 70K | No |
| 4 | Yes | Married | 120K | No |
| 5 | No | Divorced | 95K | Yes |
| 6 | No | Married | 60K | No |
| 7 | Yes | Divorced | 220K | No |
| 8 | No | Single | 85K | Yes |
| 9 | No | Married | 75K | No |
| 10 | No | Single | 90K | Yes |

抽烟和肺病的**相似性**

抽烟和肺病的**相关性**

# 相关性 Correlation

- 皮尔森相关系数 Pearson's Correlation
  - 度量两个变量之间的线性相关性

$$\mathrm{corr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{covariance}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\mathrm{standard\_deviation}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{standard\_deviation}(\boldsymbol{y})} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

**协方差与标准差之比**

$$\mathrm{covariance}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$

$$\mathrm{standard\_deviation}(\boldsymbol{x}) = s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}$$

$$\mathrm{standard\_deviation}(\boldsymbol{y}) = s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2}$$

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的均值　　$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的均值

# 皮尔森系数的局限性

- 对于**非线性的相关性**难以建模
- X = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)
- Y = ( 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9)

负相关　　正相关

$Y = X^2$

- Mean(X) = 0, Mean(Y) = 4

- 皮尔森相关系数 Correlation

= (-3)(5)+(-2)(0)+(-1)(-3)+(0)(-4)+(1)(-3)+(2)(0)+3(5)

= **-15 + 0 + 3 +** 0 **- 3 + 0 + 15**

= 0 (即相关度为0)