

Yet Another Math for DS Course

Домашка №4

Разложение по строке и ранг матрицы (классная группа)

Добро пожаловать в очередную домашку. За неё можно набрать 10 баллов. Стоимость каждой задачи указана в скобках. Баллы между пунктами внутри задачи распределяются равномерно, если около них не указано иного.

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеханы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затехана. Затехать домашку можно в overleaf, typora, colab или другом любом удобном для вас сервисе.

Задача 1 (2 балла). Для матрицы A найдите определитель с помощью разложения по второй строке:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача 2 (4 балла). Рассмотрим матрицу размера 4×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Найдите строковый ранг матрицы A . Покажите при его поиске все промежуточные преобразования строк.
- Найдите столбцовый ранг матрицы A . Явно покажите, какие столбцы линейно выражаются через другие.
- Найдите минорный ранг матрицы (наибольший порядок ненулевого минора) матрицы A . При его поиске вычислите все требуемые миноры.
- Найдите скелетное разложение матрицы A . Вычислите её факторный и тензорный ранг. В явном виде запишите перемножаемые вектора и матрицы.

Задача 3 (2 балла). В задаче классификации категориальный признак с k значениями закодирован при помощи k дамми-признаков, так что каждая строка матрицы $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ имеет ровно одну единицу и остальные нули.

- а) Найдите ранг матрицы X .
- б) Объясните, почему использование всех k дамми-признаков в регрессионной модели приводит к мультиколлинеарности (*дамми-ловушке*).
- в) Предложите корректный способ кодирования признака, чтобы избежать дамми-ловушки, и объясните, как изменится ранг матрицы.

Задача 4 (2 балла). У Морфеуса есть матрица A . Он построил матрицу алгебраических дополнений \hat{A} и хочет найти её определитель $\det \hat{A}$ и ранг $\text{rk}(\hat{A})$.

Помогите ему. Выразите их через $\det A$ и $\text{rk}(A)$.