

Yet Another Math for DS Course

Домашка №8

Условное ожидание и мартингалы (продвинутая группа)

За эту домашку можно набрать 10 баллов. Два дополнительных балла бонусные и плюсятся к общему результату. Стоимость каждой задачи указана в скобках. Баллы между пунктами внутри задачи распределяются равномерно, если около них не указано иного.

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеханы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затехана. Затехать домашку можно в overleaf, typora, colab, notion или другом любом удобном для вас сервисе.

Задача 1 (5 баллов). Пусть X_1, \dots, X_{100} независимы и равномерны на $[0; 1]$. Пусть $L = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{80}\}$ и $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \dots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \dots, X_{100}\}$.

1. Найдите вероятности $\mathbb{P}(L > R|L)$ и $\mathbb{P}(L > R|R)$ и $\mathbb{P}(L > R|M)$, $\mathbb{P}(L > R|L, M)$.
2. Найдите ожидания $\mathbb{E}(X_1|L)$, $\mathbb{E}(X_1|\min\{X_1, \dots, X_{100}\})$.
3. Найдите ожидание $\mathbb{E}(\min\{X_1, \dots, X_{100}\}|\max\{X_1, \dots, X_{100}\})$.
4. Найдите ожидание $\mathbb{E}(\min\{X_1, \dots, X_{100}\}|X_1)$.
5. Нарисуйте условную функцию распределения $\mathbb{P}(X_1 \leq t|L)$.

Задача 2 (5 баллов). Есть две команды гладиаторов-вампиров. У каждого из них своя сила. Если вампир силы a убивает вампира силы b (что происходит с вероятностью $\frac{a}{a+b}$), то его сила увеличивается на b .

Соревнование между командами построено в форме отдельных поединков. От каждой команды выдвигается по одному участнику, победитель возвращается в свою команду и начинается следующий поединок. Допускается неоднократное участие одного вампира в поединках.

Пусть в первой команде n_x участников с суммарной силой X_0 , а во второй n_y участников с суммарной силой Y_0 . Пусть X_n – суммарная сила первой команды после n поединков.

1. Докажите, что X_n – мартингал
2. Верно ли, что к моменту $n_x + n_y$ игра закончится?
3. Найдите вероятность выигрыша первой команды.