

Yet Another Math for DS Course

Домашка №7

Сигма-алгебра (продвинутая группа)

За эту домашку можно набрать 10 баллов. Два дополнительных балла бонусные и плюсятся к общему результату. Стоимость каждой задачи указана в скобочках. Баллы между пунктами внутри задачи распределяются равномерно, если около них не указано иного.

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеханы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затехана. Затехать домашку можно в overleaf, typora, colab, notion или другом любом удобном для вас сервисе.

Задача 1 (2 балла). Правильная монетка подбрасывается бесконечное количество раз. Вася наблюдает за результатами подбрасываний до тех пор, пока не выпадет три орла подряд. Пусть T – случайный момент времени, когда Вася прекратил наблюдение, и \mathcal{F}_T – сигма-алгебра событий различных Васей. Приведите пример двух нетривиальных (отличных от \emptyset и Ω) событий, входящих в \mathcal{F}_T .

Задача 2 (4 балла). На службе у Людовика XIV находятся три прославленных королевских мушкетёра: Атос, Портос и Арамис. Каждый из них – рациональный агент, обладающий списком событий \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3 о военной тактике, который он умеет различать. Все эти списки являются σ -алгебрами, построенными на одном и том же пространстве элементарных исходов. Приехавший из Гаскони, молодой и необузданный д'Артаньян мечтает обучиться военной тактике и стать лучшим в этом деле! Король отдаёт молодое дарование в обучение трём мушкетёрам.

- а) Предположим, что д'Артаньян прошёл последовательное качественное обучение. То есть он сначала узнал всё, что знает Атос, потом всё, что знает Портос, потом всё, что знает Арамис. То есть, д'Артаньян обладает списком событий $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$. Является ли этот список событий σ -алгеброй?
- б) Предположим, что д'Артаньян прошёл параллельное обучение и, из-за мешанины в голове, он усвоил только тот материал, который одновременно давали все три мушкетёра. То есть д'Артаньян обладает списком событий $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$. Является ли этот список σ -алгеброй?

Задача 3 (4 балла). Сначала подбрасывается кубик. Если выпала нечётная грань, то подбрасываем монетку один раз. Если чётная – то два. Пусть X – количество подбрасываний монетки, а Y – количество выпавших орлов.

1. Сколько элементов в $\sigma(X)$?
2. Сколько элементов в $\sigma(Y)$?
3. Измерима ли X относительно $\sigma(Y)$?
4. Измерима ли Y относительно $\sigma(X)$?