

Yet Another Math for DS Course

Домашка №3

LU-разложение и разложение Холецкого (продвинутая группа)

За эту домашку можно набрать 10 баллов. Два дополнительных балла бонусные и плюсуются к общему результату. Стоимость каждой задачи указана в скобочках. Баллы между пунктами внутри задачи распределяются равномерно, если около них не указано иного.

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеканы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затекана. Затекать домашку можно в overleaf, typora, colab, notion или другом любом удобном для вас сервисе.

Задача 1 (2 балла). Выясните, является ли матрица ниже строго регулярной. Если это так, найдите для неё LU-разложение с перестановочной матрицей P, т.е. $PA = LU$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 2 (2 балла). Найдите LU-разложение матрицы в случае его существования:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Найдите все $a \in \mathbb{R}$, для которых не существует LU-разложения A.

Задача 3 (2 балла). Напомню, что разложение Холецкого применяется для симметричных положительно определённых матриц. Найдите разложение Холецкого для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4 (1 балл). Пусть Q – ортогональная матрица. Докажите, что $\det(Q) = \pm 1$.

Задача 5 (1 балл). Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix}$$

вычислите A^* и найдите A^*A .

Задача 6 (2 балла). Найдите все ортогональные матрицы $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Покажите, что они имеют вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$