מאגר שאלות לבחינה באלגברה ליניארית.

מספרים מרוכבים:

בספר המצורף לאתר: עמוד 100-101:

תרגילים: 6,7,8,9,

10.2 הראו כי המספר הנתון בשאלה שווה לצמוד שלו ובכך תראו שהמספר ממשי.

10.3,

12,13,14,16,17,18

1. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$:

א. $\frac{1}{2i}$ ב. $\frac{2+3i}{7-3i}$ ג. $\left(\frac{1}{3-i}\right)^2$

2. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$:

i^{-1} i^{2005} i^n i^{28} i^{27} i^{26} i^{25} $(1+i+i^2+i^3)^{100}$

3. בכל סעיף פתרו את המשוואה באמצעות הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית.
בדקו את תשובתכם ע"י הצבת הפתרונות שמצאתם במשוואה הנתונה

א. $z^2+2z+2=0$ ב. $z^2-z+1=0$

4. נתונים $z_2=3+4i$, $z_1=1-5i$. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית:

א. $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$ ב. $\frac{z_1}{\overline{\overline{z_2}}}$ ג. $\frac{z_1}{|z_2|}$ ד. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

5. א. הוכיחו שמספר מרוכב z הוא מספר ממשי אם ורק אם $z=\bar{z}$.

ב. יהי $z\neq 2$ מספר מרוכב. הוכיחו שהמספר $\frac{z+2}{z-2}$ הוא ממשי אם ורק אם z הוא מספר ממשי.

הדרכה לפתרון: סמנו $w=\frac{z+2}{z-2}$ והראו ש- $w=\bar{w}$ אם ורק אם $z=\bar{z}$.

6. רשמו הצגה קוטבית ($re^{i\theta}$) למספרים המרוכבים הבאים:

א. $-6+\left(6\sqrt{3}\right)i$ ב. $2-4i$

7. נתונים $z_2=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)i$ $z_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ רשמו הצגה קוטבית ל- z_1, z_2 ול- $\dfrac{{z_1}^5}{{z_2}^2}$.

8. רשמו הצגה קרטזית למספרים המרוכבים הבאים:

א. $(\sqrt{3}+i)^7$ ב. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$

9. מצאו את כל הפתרונות למשוואות הבאות ותארו אותם כוקטורים במישור המרוכב:

א. $z^5-(\sqrt{3}-3i)z=0$ ב. $z^4=-8+8\left(\sqrt{3}\right)i$ ג. $z^6=\dfrac{1-i}{1+\left(\sqrt{3}\right)i}$

10. בעזרת הצגה קוטבית של מספרים מרוכבים הוכיחו את הנוסחאות לכל $\alpha\in R$:

$$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

1. יהיו $z_1,z_2...z_k$ מספרים מרוכבים כך ש- $|z_1|=|z_2|=...=|z_k|=1$. הוכיחו ש- $|z_1+z_2+...+z_k|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+...+\dfrac{1}{z_k}\right|$.

הדרכה לפתרון: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

2. הוכיחו כי אם $|z|\le 1$ אז $\left|\mathrm{Im}\left(1-\bar{z}+2z^2\right)\right|<4$.

הדרכה: היעזרו באי שוויון המשולש $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ובכך ש $|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$.

1. הוכיחו: א. $|\mathrm{Re}\,z|\le|z|$

ב. $|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$,

ג. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$

תרגילים נוספים.

1. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$: א. $(3-2i)^2$ ב. $(1+2i)(4-6i)^2$

2. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$: א. $\dfrac{1}{4-7i}$ ב. $\dfrac{9+2i}{3-5i}$

3. רשמו את המספר המרוכב $\left(\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^{102}\right)^2$ הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$:

4. בכל סעיף פתרו את המשוואה באמצעות הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית. $z^2+iz+2=0$

5. מצאו את הדרך הקלה ביותר לחשב את $|-2i(3+i)(2+4i)(1+i)|$ **הדרכה לפתרון:** $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

6. נתונים $z_1=1-5i, \quad z_2=3+4i$. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית:

א. $\dfrac{1}{z_1}$ ב. $\dfrac{z_1}{z_2}$ ג. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$

7. מצאו את כל פתרונות המשוואה $z+i=i(\bar{z}-i)$. **הדרכה:** הציגו את z בצורה קרטזית: $z=a+bi$ ומצאו את a,b.

9. א. חשבו את מכפלת כל שורשי היחידה מסדר 3 .
(כלומר, חשבו את הערך של $z_0\cdot z_1\cdot z_2$ כאשר z_0,z_1,z_2 הם שורשי המשוואה $z^3=1$) $z^3=1$
ב.(רשות) חשבו את מכפלת כל שורשי היחידה מסדר m (m טבעי). הפרידו למקרים m זוגי ו- m אי-זוגי. $z^m=1$

10. רשמו הצגה קוטבית $(re^{i\theta})$ למספרים המרוכבים הבאים:

א. $2i$ ב. -4 ג. $5+5i$ ד. $-3-3i$ ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $4+3i$

11. רשמו הצגה קרטזית למספרים המרוכבים הבאים : א. $(1+i)^{12}$ ב. $(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^{-6}$

12. מצאו את כל הפתרונות למשוואות הבאות ותארו אותם כוקטורים במישור המרוכב:

א. $z^2=-i$ ב. $z^3=-27$ ג. $z^3=1+\left(\sqrt{3}\right)i$

13. א. מצאו את הפתרונות של המשוואה $z^2=1-i$, רשמו אותם בצורה קרטזית ($a+bi$).
ב. פתרו את המשוואה הבאה באמצעות הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית: $z^2+4z+4i=0$

ווקטורים:

בספר המצורף לאתר: עמודים 69-73

תרגילים: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16,17,18
21,22,23,24,2526,33

מרחב ווקטורי ותת מרחב:

בספר המצורף לאתר: עמוד 125

תרגילים: 1-7

ללא סעיף א

פתרונות:

מספרים מרוכבים:

1. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$:

א. $\frac{1}{2i}$ ב. $\frac{2+3i}{7-3i}$ ג. $\left(\frac{1}{3-i}\right)^2$

א. $\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2i(-i)}=-\frac{i}{2}$

ב. $\frac{2+3i}{7-3i}=\frac{(2+3i)(7+3i)}{(7-3i)(7+3i)}=\frac{14+27i-9}{7^2+3^2}=\frac{5+27i}{58}=\frac{5}{58}+\frac{27}{58}i$

ג. $\left(\frac{1}{3-i}\right)^2=\frac{1}{9-6i-1}=\frac{1}{8-6i}=\frac{8+6i}{(8-6i)(8+6i)}=\frac{8+6i}{8^2+6^2}=\frac{8+6i}{100}=\frac{8i}{100}+\frac{6}{100}i$

2. רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה קרטזית $(a+bi)$:

i^{-1} i^{2005} i^n i^{28} i^{27} i^{26} i^{25} $(1+i+i^2+i^3)^{100}$

נשים לב כי $i^1=1,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1$ וכן כי $i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1^k=1$ לכל k שלם.

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$$

$$i^{2005}=i^{4\cdot 501}\,i=\left(i^4\right)^{501}\cdot i=i$$

באופן כללי מתקיים $i^n=\begin{cases}1 & n=4k+0\\ i & n=4k+1\\ -1 & n=4k+2\\ -i & n=4k+3\end{cases}$ ולכן החישובים הבאים מיידיים:

$$i^{28}=i^{4\cdot 7}=1$$
$$i^{27}=i^{4\cdot 6+3}=i^3=-i$$
$$i^{26}=i^{4\cdot 6+2}=i^2=-1$$
$$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i$$
$$\left(1+i+i^2+i^3\right)^{100}=\left(1+i-1-i\right)^{100}=(0)^{100}=0$$

באותו אופן נשים לב כי לכל k מתקיים $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0$ ולכן

$$(i+i^2+\ldots+i^{100}+i^{101}+i^{102})^2=(i^{101}+i^{102})^2=(i-1)^2=i^2-2i+1=2-2i$$

3. בכל סעיף פתרו את המשוואה באמצעות הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית.
בדקו את תשובתכם ע"י הצבת הפתרונות שמצאתם במשוואה הנתונה

א. $z^2+2z+2=0$ **ב.** $z^2-z+1=0$

א. $z^2+2z+2=0$

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

הצבה:

$$(-1+i)^2+2(-1+i)+2=(1-2i-1)-2+2i+2=0$$

$$(-1-i)^2+2(-1-i)+2=(1+2i-1)-2-2i+2=0$$

ב. $z^2-z+1=0$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

הצבה:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)+1=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}-\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}+\frac{2}{4}=0$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)+1=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}-\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}+\frac{2}{4}=0$$

א. $\frac{\overline{z_1}}{z_2}=\frac{\overline{1-5i}}{3+4i}=\frac{1+5i}{3+4i}=\frac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4i+15i+20}{3^2+4^2}=\frac{23+11i}{25}=\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i$

ב. $\frac{z_1}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i\right)}=\frac{23}{25}-\frac{11}{25}i$

ג. $\frac{z_1}{|z_2|}=\frac{1-5i}{|3+4i|}=\frac{1-5i}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(1-5i)}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}-i$

ד. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|1-5i|}{|3+4i|}=\frac{\sqrt{1^2+5^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{26}}{5}$

נסמן $w=\frac{z+2}{z-2}$.

$$w=\overline{w}\ \Leftrightarrow\ \frac{z+2}{z-2}=\overline{\left(\frac{z+2}{z-2}\right)}\ \Leftrightarrow\ \frac{z+2}{z-2}=\frac{\overline{z+2}}{\overline{z-2}}\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{z+2}{z-2}=\frac{\overline{z}+\overline{2}}{\overline{z}-\overline{2}}\ \Leftrightarrow\ \frac{z+2}{z-2}=\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}-2}\ \Leftrightarrow\ (z+2)(\overline{z}-2)=(\overline{z}+2)(z-2)$$

$$\Leftrightarrow\ z\overline{z}+2\overline{z}-2z-4=z\overline{z}-2\overline{z}+2z-4\ \Leftrightarrow\ 4\overline{z}=4z\ \Leftrightarrow\ \overline{z}=z$$

הערה: במהלך ההוכחה נעזרנו ב"כללי הצמוד" : $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ובכך ש $\overline{2}=2$ (כי 2 הוא מספר ממשי).

א. $-6+\left(6\sqrt{3}\right)i$ $\quad z=-6+6\sqrt{3}i \Leftarrow z$ **ברביע השני**

$|z|=\sqrt{(-6)^2+(6\sqrt{3})^2}=12$

$tg(\theta)=\frac{6\sqrt{3}}{-6}=-\sqrt{3}$ ו- z ברביע השני $\Leftarrow$ $\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$

לכן : $z=-6+6\sqrt{3}i=12\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]=12e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ב. $2-4i$ $\quad z=2-4i \Leftarrow z$ **ברביע הרביעי**

$|z|=\sqrt{(2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

$tg(\theta)=\frac{-4}{2}=-2$ ו- z ברביע הרביעי $\Leftarrow$ לפי המחשבון $\theta\cong-1.107$

לכן : $z=2-4i=2\sqrt{5}[\cos(-1.107)+i\sin(-1.107)]=2\sqrt{5}e^{-i1.107}$

א) $z_1 \Leftarrow z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$ **ברביע הראשון**

☜ $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3$

☜ $tg(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ו- z_1 ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

לכן : $z_1 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z \Leftarrow z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ **ברביע הראשון**

☜ $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$

☜ $tg(\theta) = 1$ ו- z_2 ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

לכן : $z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\boxed{z_3 = \frac{{z_1}^5}{{z_2}^2}}$$

$$z_5 = \frac{{z_1}^5}{{z_2}^2} = \frac{(3e^{i\frac{\pi}{6}})^5}{(2e^{i\frac{\pi}{4}})^2} = \frac{243}{4}e^{\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{4}\right)i} = \frac{243}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}$$

א. $(\sqrt{3}+i)^7$

שלב 1 : צורה קוטבית של $\sqrt{3}+i$

$$\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=2$$

$tg(\theta)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ו- $\sqrt{3}+i$ ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta=\frac{\pi}{6}$

לכן : $\sqrt{3}+i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

שלב 2 : נוסחא MOIVRE DE

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{-7}=(2)^7\left[e^{i\frac{\pi}{6}}\right]^7=128e^{i\frac{7\pi}{6}}=128e^{-i\frac{5\pi}{6}}=128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\left(-64\sqrt{3}-64i\right)$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{-7}=\left(-64\sqrt{3}-64i\right)$$

ב. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

שלב 1 : צורה קוטבית של $\frac{1-i}{1+i}$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

שלב 2 : נוסחא MOIVRE DE

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8=\left[e^{-i\frac{\pi}{2}}\right]^8=e^{-i4\pi}==e^{i0}=1$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8=1$$

א. $z^5-(\sqrt{3}-3i)z=0$

$z^5-(\sqrt{3}-3i)z=0 \;\Leftrightarrow\; z\left[z^4-(\sqrt{3}-3i)\right]=0 \;\Leftrightarrow\; z^4=(\sqrt{3}-3i)$ או $z=0$.

נמצא את פתרונות המשוואה $z^4=(\sqrt{3}-3i)$.

שלב 1: צורה קוטבית של $\sqrt{3}-3i$

☜ $\left|\sqrt{3}-3i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(3)^2}=2\sqrt{3}$

☜ $tg(\theta)=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ ו- $\sqrt{3}-3i$ **ברביע הרביעי** $\Leftarrow$ $\theta=-\frac{\pi}{3}$

לכן: $\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

שלב 2: פתרונות של $z^4=(\sqrt{3}-3i)$

נסמן $z=re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^4=(\sqrt{3}-3i)$ בצורה $r^4e^{i4\theta}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^4=2\sqrt{3} \\ 4\theta=-\frac{\pi}{3}+2\pi k \end{cases}$ לכן פתרונותיה הם:

$$z_k=\sqrt[4]{2\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k=0,1,2,3$$

$$z_k=\sqrt[4]{2\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)},\qquad k=0,1,2,3$$

$$\begin{cases} z_0=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \\ z_1=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ z_2=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{11\pi}{12}} \\ z_3=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{6\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{17\pi}{12}} \end{cases}$$

בסיכום: פתרונות המשוואה הנתונה הם הפתרונות שרשמנו למעלה בתוספת הפתרון $z=0$.

ב. $z^4=-8+8\sqrt{3}i$

שלב 1: צורה קוטבית של $-8+8\sqrt{3}i$

☜ $\left|-8+8\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=16$

☜ $tg(\theta)=-\sqrt{3}$ ו- $-8+8\sqrt{3}i$ **ברביע השני** $\Leftarrow$ $\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$

לכן : $-8+8\sqrt{3}i=16e^{i\frac{2\pi}{3}}$

שלב 2: פתרונות של $z^4=-8+8\sqrt{3}i$.

נסמן $z=re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^4=-8+8\sqrt{3}i$ **בצורה** $r^4e^{i4\theta}=16e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^4=16 \\ 4\theta=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \end{cases}$ לכן פתרונותיה הם:

$$z_k=\sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)},\qquad k=0,1,2,3$$

$$\begin{cases} z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{cases}$$

ג. $z^6 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

שלב 1**:** צורה קוטבית של $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

צורה קוטבית של $\omega_1 = 1-i$

$|\omega_1| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$tg(\theta) = -1$ ו- ω_1 ברביע הרביעי $\Leftarrow$ $\theta = -\frac{\pi}{4}$

לכן : $\omega_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

צורה קוטבית של $\omega_2 = 1+i\sqrt{3}$

$|\omega_2| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

$tg(\theta) = \sqrt{3}$ ו- ω_2 ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta = \frac{\pi}{3}$

לכן : $\omega_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

צורה קוטבית של $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ היא: $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

שלב 2**:** פתרונות של $z^6 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

נסמן $z = re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^6 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ בצורה $r^6e^{i6\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 6\theta = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k \end{cases}$ **לכן פתרונותיה הם:**

$$z_k = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{2k\pi}{6}\right)} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$\begin{cases} z_0 = 2^{-\frac{1}{12}} e^{-i\frac{7\pi}{72}} \\ z_1 = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\frac{17\pi}{72}} \\ z_2 = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\frac{41\pi}{72}} \\ z_3 = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{3\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\frac{65\pi}{72}} \\ z_4 = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\frac{89\pi}{72}} \\ z_5 = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{5\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{12}} e^{i\frac{113\pi}{72}} \end{cases}$$

הוכחה:

$$e^{i3\alpha}=\left(e^{i\alpha}\right)^3\Rightarrow$$

$$\cos(3\alpha)+i\sin(3\alpha)=\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^3\underset{(*)}{=}\cos^3\alpha+3\cos^2\alpha\cdot i\sin\alpha+3\cos\alpha\cdot\left(i\sin\alpha\right)^2+\left(i\sin\alpha\right)^3=$$

$$\left(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha\right)+i\left(3\cos^2\alpha\ \sin\alpha-\sin^3\alpha\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos(3\alpha)=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha=\cos\alpha\ (\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)= \\ \qquad\qquad \cos\alpha\ (\cos^2\alpha-3(1-\cos^2\alpha))=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \\ \\ \sin(3\alpha)=3\cos^2\alpha\ \sin\alpha-\sin^3\alpha=\sin\alpha\ (3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)= \\ \qquad\qquad \sin\alpha\ (3(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{cases}$$

הסבר לשוויון (*) : נעזרנו בנוסחה $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

דרך נוספת (ארוכה יותר ואלגנטית פחות...):

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\cos(3\alpha)=\frac{e^{i3\alpha}+e^{-i3\alpha}}{2},\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},\sin(3\alpha)=\frac{e^{i3\alpha}-e^{-i3\alpha}}{2i}$$

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3-3\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=$$

$$=4\left(\frac{\left(e^{i\alpha}\right)^3+3\left(e^{i\alpha}\right)^2e^{-i\alpha}+3e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}\right)^2+\left(e^{-i\alpha}\right)^3}{8}\right)-\frac{3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}}{2}=$$

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3-3\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=$$

$$=4\left(\frac{\left(e^{i\alpha}\right)^3+3\left(e^{i\alpha}\right)^2e^{-i\alpha}+3e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}\right)^2+\left(e^{-i\alpha}\right)^3}{8}\right)-\frac{3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}}{2}=$$

$$=\frac{e^{i3\alpha}+3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}+e^{-i3\alpha}}{2}-3\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=\frac{e^{i3\alpha}+e^{-i3\alpha}}{2}=\cos(3\alpha)$$

$$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}-4\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^3=$$

$$=\frac{3e^{i\alpha}-3e^{-i\alpha}}{2i}-4\left(\frac{\left(e^{i\alpha}\right)^3-3\left(e^{i\alpha}\right)^2e^{-i\alpha}+3e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}\right)^2-\left(e^{-i\alpha}\right)^3}{-8i}\right)=$$

$$=\frac{3e^{i\alpha}-3e^{-i\alpha}}{2i}+\left(\frac{e^{i3\alpha}-3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}-e^{-i3\alpha}}{2i}\right)=\frac{e^{i3\alpha}-e^{-i3\alpha}}{2i}=\sin(3\alpha)$$

הערה: בדרך הראשונה אתם מפתחים את הנוסחאות, בדרך השניה אתם צריכים לדעת מראש את הנוסחאות כדי להוכיח אותן. זו עוד סיבה לכך שדרך הפתרון הראשונה עדיפה.

אתגר: פתחו נוסחאות ל- $\sin 4\alpha,\ \cos 4\alpha$.

א. $(3-2i)^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4 = 5-12i$

ב.

$$\begin{aligned}(1+2i)(4-6i)^2 &= (1+2i)(16-48i+36i^2) = (1+2i)(16-48i-36)\\ &= (1+2i)(-20-48i) = -20-48i-40i+96\\ &= 76-88i\end{aligned}$$

א. $\frac{1}{4-7i} = \frac{4+7i}{(4-7i)(4+7i)} = \frac{4+7i}{4^2+7^2} = \frac{4+7i}{65} = \frac{4}{65}+\frac{7}{65}i$

$$(i+i^2+\ldots+i^{100}+i^{101}+i^{102})^2 = (i^{101}+i^{102})^2 = (i-1)^2 = i^2-2i+1 = 2-2i$$

$z^2+iz+2=0$

$$z_{1,2} = \frac{-i\pm\sqrt{(i)^2-4\cdot1\cdot2}}{2} = \frac{-i\pm\sqrt{-9}}{2} = \frac{-i\pm3i}{2} \Rightarrow z_{1,2} = -2i, i$$

הצבה

$$(-2i)^2+i(-2i)+2 = -4+2+2 = 0$$

$$i^2+i\cdot i+2 = -1-1+2 = 0$$

$$\begin{aligned}|-2i(3+i)(2+4i)(1+i)| &= |-2i||3+i||2+4i||1+i| = 2\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2}\\ &= 2\sqrt{10}\sqrt{20}\sqrt{2} = 2\sqrt{400} = 2\cdot20 = 40\end{aligned}$$

א. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1-5i} = \frac{1+5i}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{1+5i}{1^2+5^2} = \frac{1}{26}+\frac{5}{26}i$

ב. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-5i}{3+4i} = \frac{1-5i}{3+4i} = \frac{(1-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i-15i-20}{3^2+4^2} = \frac{-17-19i}{25} = -\frac{17}{25}-\frac{19}{25}i$

ג. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(-\frac{17}{25}-\frac{19}{25}i\right)} = -\frac{17}{25}+\frac{19}{25}i$

א. *שלב 1*: צורה קוטבית של 1 $1=e^{i0}$

***שלב 2*:** פתרונות המשוואה $z^3=1=e^{i0}$ הם:

$$z_k=e^{i\frac{2k\pi}{3}},\qquad k=0,1,2$$

$$\begin{cases} z_0=e^{i0} \\ z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_2=3e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$

לכן $z_0z_1z_2=e^{i0}e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\left(0+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i2\pi}=1$

ב. פתרונות המשוואה $z^m=1=e^{i0}$ הם:

$$z_k=e^{i\frac{2k\pi}{m}},\qquad k=0,1..m-1$$

$$z_0z_1\dots z_{m-1}=e^{i0}e^{i\frac{2\pi}{m}}\dots e^{i\frac{2(m-1)\pi}{m}}=e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2\pi k}{m}}=e^{i\frac{2\pi}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-1}k\right)}\underset{(*)}{=}e^{i\frac{2\pi}{m}\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)}$$

$$=e^{i\pi(m-1)}=\begin{cases}1 & m=2l+1\\ -1 & m=2l\end{cases}$$

הסבר לשוויון (*): נוסחת סכום n איברים ראשונים בסדרה חשבונית (סדרה שבה $a_{k+1}-a_k$ הוא מספר קבוע): $a_1+a_2+...a_n=(a_1+a_n)\frac{n}{2}$. כאן: $a_1=0,\quad a_n=m-1,\quad n=m$

א. $2i$ $\qquad z = 0+2i \Leftarrow z$ **ברביע הראשון**

☜ $|z| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$

$tg(\theta)$ ☜ לא מוגדר ו- z ברביע הראשון $\Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

לכן: $z = 2i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

ב. -4 $\qquad z = -4 \Leftarrow z$ **ברביע השני**

☜ $|z| = \sqrt{(-4)^2+0^2} = 4$

☜ $tg(\theta) = \frac{0}{-4} = 0$ ו- z ברביע השני $\Leftarrow \theta = \pi$

לכן: $z = -4 = 4[\cos(\pi)+i\sin(\pi)] = 4e^{i\pi}$

ג. $5+5i$ $\qquad z = 5+5i \Leftarrow z$ **ברביע הראשון**

☜ $|z| = \sqrt{(5)^2+(5)^2} = 5\sqrt{2}$

$tg(\theta) = \frac{5}{5} = 1$ ☜ ו- z ברביע הראשון $\Leftarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

לכן: $z = 5+5i = 5\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ד. $-3-3i$ $\qquad z = -3-3i \Leftarrow z$ **ברביע השלישי**

☜ $|z| = \sqrt{(3)^2+(3)^2} = 3\sqrt{2}$

$tg(\theta) = \frac{-3}{-3} = 1$ ☜ ו- z ברביע השלישי $\Leftarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

לכן: $z = -3-3i = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

ה. $2\sqrt{3}-2i$ $\qquad z = 2\sqrt{3}-2i \Leftarrow z$ **ברביע הרביעי**

☜ $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4$

$tg(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ☜ ו- z ברביע הרביעי $\Leftarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

לכן: $z = 2\sqrt{3}-2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ו. $4+3i$

$z = 4+3i \Leftarrow z$ **ברביע הראשון**

☜ $|z| = \sqrt{(4)^2+(3)^2} = 5$

$tg(\theta) = \frac{3}{4}$ ☜ ו- z ברביע הראשון $\Leftarrow$ לפי המחשבון $\theta \cong 0.64$

לכן: $z = 4+3i = 5[\cos(0.64)+i\sin(0.64)] = 5e^{i0.64}$

א. $(1+i)^{12}$

שלב 1: צורה קוטבית של $1+i$

☜ $|1+i|=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

☜ $tg(\theta)=1$ ו- $1+i$ ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

לכן : $1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

שלב 2: נוסחא DE MOIVRE

$$(1+i)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{12}=64e^{i\frac{12\pi}{4}}=64e^{i3\pi}=-64$$

$$(1+i)^{12}=-64$$

ב. $(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})^{-6}$

שלב 1: צורה קוטבית של $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$

☜ $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

☜ $tg(\theta)=1$ ו- $1+i$ ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

לכן : $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

שלב 2: נוסחא DE MOIVRE

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6}=(1)^{-6}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{-6}=e^{-i\frac{6\pi}{4}}=e^{-i\frac{3\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6}=i$$

א. $z^2=-i$

שלב 1: צורה קוטבית של $-i$ $\qquad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

שלב 2: פתרונות של $z^2=-i$.

נסמן $z=re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^2=-i$ בצורה $r^2e^{i2\theta}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^2=1 \\ 2\theta=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \end{cases}$ לכן פתרונותיה הם:

$$z_k=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2}\right)}, \qquad k=0,1$$

$$\begin{cases} z_0=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \\ z_1=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$$

ב. $z^3=-27$

שלב 1: צורה קוטבית של -27 $\qquad -27=27e^{i\pi}$

שלב 2: פתרונות של $z^3=-27$.

נסמן $z=re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^3=-27$ בצורה $r^3e^{i3\theta}=27e^{i\pi}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^3=27 \\ 3\theta=\pi+2\pi k \end{cases}$ לכן פתרונותיה הם:

$$z_k=3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,1,2$$

כלומר

$$\begin{cases} z_0=3e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_1=3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}=3e^{i\pi} \\ z_2=3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{cases}$$

ג. $z^3=1+\left(\sqrt{3}\right)i$

שלב 1: צורה קוטבית של $1+i\sqrt{3}$

☜ $\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

☜ $tg(\theta)=\sqrt{3}$ ו- $1+i\sqrt{3}$ ברביע הראשון $\Leftarrow$ $\theta=\frac{\pi}{3}$

לכן: $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

שלב 2: פתרונות של $z^3=1+\sqrt{3}i$

נסמן $z=re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^3=1+\sqrt{3}i$ בצורה $r^3e^{i3\theta}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^3=2 \\ 3\theta=\frac{\pi}{3}+2\pi k \end{cases}$ לכן פתרונותיה הם:

$$z_k=\sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k=0,1,2$$

$$\begin{cases} z_0=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{9}} \\ z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{9}} \\ z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{13\pi}{9}} \end{cases}$$

פתרון:

א. ***שלב 1***: צורה קוטבית של $1-i$

☜ $|1-i|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=2^{0.5}$

$tg(\theta)=-1$ ☜ ו- $1-i$ ברביע הרביעי $\Leftarrow$ $\theta=-\frac{\pi}{4}$

לכן: $1-i=2^{0.5}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

שלב 2: פתרונות של $z^2=1-i$.

נסמן $z=re^{i\theta}$.

נרשום את המשוואה $z^2=1-i$ בצורה $r^2e^{i2\theta}=2^{0.5}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

המשוואה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases} r^2=2^{0.5} \\ 2\theta=\frac{-\pi}{4}+2\pi k \end{cases}$ לכן פתרונותיה הם:

$$z_k=2^{0.25}e^{i\left(\frac{-\pi}{8}+\frac{2k\pi}{2}\right)}=2^{0.25}e^{i\left(\frac{-\pi}{8}+k\pi\right)},\qquad k=0,1$$

$$z_0=2^{0.25}e^{\frac{-\pi}{8}i},\qquad z_1=2^{0.25}e^{\frac{7\pi}{8}i}$$

רישום בצורה קרטזית:

$$z_0=2^{0.25}e^{\frac{-\pi}{8}i}=2^{0.25}(\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{8}\right))\approx 1.19(0.92+(-0.38)i)\approx 1.09-0.45i$$

$$z_1=2^{0.25}(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right))\approx 1.19(-0.92+0.38i)\approx -1.09+0.45i$$

ב. נפתור את המשוואה $z^2+4z+4i=0$:

$$z_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16i}}{2}=-2\pm 2\sqrt{1-i}\underset{(*)}{=}-2\pm 2(1.09-0.45i)$$

$z_1=0.18-0.9i,\quad z_2=-4.18+0.9i$.

14. הוכיחו כי לכל מספר ממשי $\alpha \neq n\frac{\pi}{2}$ $\quad n \in \mathbf{Z},$ $\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+\mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1-\mathbf{i}\tan(n\alpha)}$

לכל $\theta \neq n\frac{\pi}{2}$ מספר ממשי מתקיים

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta\,(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}i) = \cos\theta\,(1+i\,tg\theta\,)$$

ולכן $e^{-i\theta} = \cos(-\theta)(1+i\tan(-\theta)) = \cos\theta(1-i\tan\theta)$

(השתמשנו בזוגיות $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ובאי זוגיות $\tan(-\theta)=-\tan\theta$)

לכן:

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \frac{(1+i\tan\alpha)^n}{(1-i\tan\alpha)^n} = \frac{(\cos\alpha)^n(1+i\tan\alpha)^n}{(\cos\alpha)^n(1-i\tan\alpha)^n} =$$

$$= \frac{(\cos\alpha(1+i\tan\alpha))^n}{(\cos\alpha(1-i\tan\alpha))^n} = \frac{(e^{i\alpha})^n}{(e^{-i\alpha})^n} = \frac{e^{in\alpha}}{e^{-in\alpha}} = \frac{\cos(n\alpha)(1+i\tan n\alpha)}{\cos(n\alpha)(1-i\tan n\alpha)} == \frac{(1+i\tan n\alpha)}{(1-i\tan n\alpha)}$$

1. יהיו $z_1, z_2 ... z_k$ מספרים מרוכבים כך ש- $|z_1|=|z_2|=...=|z_k|=1$. הוכיחו ש-

$|z_1+z_2+...+z_k| = \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_k}\right|$.

הדרכה לפתרון: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

היות ו- $|z_1|=|z_2|=...=|z_k|=1$ נובע כי לכל z_i: $\frac{1}{z_i} = \frac{\bar{z}_i}{z_i\bar{z}_i} = \frac{\bar{z}_i}{|z_i|^2} = \frac{\bar{z}_i}{1} = \bar{z}_i$.

לכן $\left|\sum_i \frac{1}{z_i}\right| = \left|\sum_i \bar{z}_i\right| = \left|\overline{\sum_i z_i}\right| \underset{(*)}{=} \left|\sum_i z_i\right|$ ההצדקה לשוויון (*) היא הטענה שהוכחנו בסעיף א'.

2. הוכיחו כי אם $|z| \leq 1$ אז $\left|\mathbf{Im}\left(1-\bar{z}+2z^2\right)\right| < 4$.

הדרכה: היעזרו באי שוויון המשולש $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ ובכך ש $|\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$.

נשים לב היות ו-1 מספר ממשי נובע:

$$\mathrm{Im}(1-\bar{z}+2z^2) = \mathrm{Im}(-\bar{z}+2z^2)$$

ונזכור בתרגיל קודם הוכחנו: $|\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$

וכן ידוע $|z|=|\bar{z}|$ וראינו בשאלה קודמת ש- $|z^n|=|z|^n$ בפרט $|z^2|=|z|^2$

ולכן:

$$\left|\mathrm{Im}\left(1-\bar{z}+2z^2\right)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(-\bar{z}+2z^2\right)\right| \leq \left|-\bar{z}+2z^2\right| \leq \left|-\bar{z}\right| + \left|2z^2\right| =$$

$$= |\bar{z}| + 2|z^2| = |z| + 2|z|^2 \leq 1+2 = 3 < 4$$

1. הוכיחו:

א. $|\mathrm{Re}\,z| \le |z|$

ב. $|\mathrm{Im}\,z| \le |z|$,

ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z| \le |z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$

א. נסמן $z = x + yi$ אזי $\mathrm{Re}\,z = x$

היות ולכל x, y **ממשים קיים** $x^2 \le x^2 + y^2$

$|\mathrm{Re}\,z| \le |z| \Leftrightarrow |\mathrm{Re}\,z|^2 \le |z|^2 \Leftrightarrow x^2 \le x^2 + y^2$

ב. $|\mathrm{Im}\,z| \le |z|$, **היות ולכל** x, y **ממשים קיים** $y^2 \le x^2 + y^2$

$|\mathrm{Im}\,z| \le |z| \Leftrightarrow |\mathrm{Im}\,z|^2 \le |z|^2 \Leftrightarrow y^2 \le x^2 + y^2$

ג. (*) $\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z| \le |z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$

נסמן $z = x + yi$.

<u>נוכיח את אי השוויון</u> $|z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$:

צריך להוכיח כי $|x + iy| \le |x| + |y|$. **נוכיח את זה:**

מתקיים $|x + iy|^2 = x^2 + y^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$ **ולכן** $|x + iy| \le |x| + |y|$.

<u>נוכיח את אי השוויון</u> $\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z| \le |z|$

צריך להוכיח כי

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x + y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|x + y| \le \sqrt{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow (x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \le 2x^2 + 2y^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x - y)^2$$

אי השיוויון האחרון תמיד נכון. לכן $\frac{1}{\sqrt{2}}|x + y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$.

ווקטורים: