

מבחן ראשון
 מרכיבים:
 ספר עמוד 100
 שאלה 6:

הוכיחו שאם מספר מרוכב z הוא שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים אז גם \bar{z} הוא שורש של הפולינום.

שאלה 9:

9. חשבו את הביטויים הבאים:

$$\frac{i^3 - i^4 + i^9}{2 - i^5 + i^7} \quad .9.2$$

$$\frac{(-3+2i)(7+3i)}{1+i} \quad .9.1$$

$$\left| \frac{3+i}{2-i} \right| \quad .9.4$$

$$\left(\frac{1+i}{2-i} \right)^3 \quad .9.3$$

שאלה 12:

12. חשבו בעזרת ההציגה הקוטבית את הביטויים הבאים:

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \right)^8 \quad .12.3$$

$$\frac{(1-i)^5}{(2+2i)^4} \quad .12.2$$

$$(1-i)^6 \quad .12.1$$

שאלה 14:

14. פתרו את המשוואות הבאות:

$$4z^2 + 4z + 1 - 4i = 0 \quad .14.1$$

$$z^4 = -16 \quad .14.2$$

$$2z^2 + z + 1 = 0 \quad .14.3$$

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \quad .14.4$$

$$(z+1) (z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6) = 0 \quad .14.5$$

שאלה 17:

17. יהיו z ו- w מספרים מרוכבים המקיימים: $|z| = |w| = 1$ ו- $z \cdot w \neq 1$.

הוכיחו שהמספר $\frac{z-w}{1-z \cdot w}$ הוא מספר ממשי.

דף מאגר ראשון:

8. רשמו הצגה קרטזית למספרים המרוכבים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 & \text{ב.} \\ (\sqrt{3}+i)^7 & \text{א.} \end{array}$$

9. מצאו את כל הפתרונות למשוואות הבאות ותארו אותם כוקטורים במישור המרוכב:

$$z^6 = \frac{1-i}{1+(\sqrt{3})i} \quad \text{ג.} \quad z^4 = -8 + 8(\sqrt{3})i \quad \text{ב.} \quad z^5 - (\sqrt{3} - 3i)z = 0 \quad \text{א.}$$

1. יהיו z_1, z_2, \dots, z_k מספרים מרוכבים כך ש- $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_k| = 1$. הוכיחו ש-

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

הוכחה לפתרון:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_k| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_k} \right|$$

2. הוכיחו כי אם $|z| \leq 1$ אז $|\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + 2z^2)| < 4$

הוכחה: היעזרו באינטואיציה המשולש $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ובכך ש $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

1. הוכיחו: א. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

ב. $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad \text{ג.}$$

$$\underline{w} = (-1, 4, 2, 5) \quad \text{ו} \quad \underline{v} = (2, 4, 0, -3) , \quad \underline{u} = (-1, 2, 1, 3) \quad .2$$

.5 \underline{u} – 3 \underline{v} + 2 \underline{w} , 2 \underline{u} – 5 \underline{v} .2.1

מהם ערכי x, y, z כך ש- $x\underline{u} + 2y\underline{v} - z\underline{w} = 0$ ו- z סקלרים). .2.2

$$2x\underline{u} + y\underline{v} - z\underline{w} = (1, -2, 1, 2) \quad .2.3$$

מה התנאים על a, b, c ו- d אם ידוע שקיים x, y, z כך ש- .2.4

$$2x\underline{u} + y\underline{v} - z\underline{w} = (a, b, c, d)$$

הוכיחו שלכל \underline{u} ו- \underline{v} וקטורים ב- \mathbb{R}^n מתקיים: .8

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\underline{u} \bullet \underline{v} \quad .8.1$$

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 2\|\underline{u}\|^2 + 2\|\underline{v}\|^2 \quad .8.2$$

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 4\underline{u} \bullet \underline{v} \quad .8.3$$

מצאו הצגה פרמטרית ומשוואתות ל- .23

.23.1. הימשך דרך $(1, -2)$ ובכיוון $(4, -3)$.

.23.2. הימשך דרך $(1, 2, 3)$ ובכיוון $(4, 5, 6)$.

שאלות נוספות תרגיל 4

נתונים שלושה וקטורים \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} שונים מוקטור האפס ב- \mathbb{R}^n וכן שמתקדים:

1. \underline{u} ו- \underline{w} אורתוגונליים וגם \underline{u} ו- \underline{v} אורתוגונליים.

$$d(\underline{u}, \underline{w}) = d(\underline{v}, \underline{w}) = d(\underline{u}, \underline{v}) \quad .2$$

3. הזווית בין הוקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שווה 120° .

מהם ערכי a ו- b ממשיים עבורם מתקיים: $\|\underline{v}\| = b\|\underline{w}\|$ ו- $\|\underline{u}\| = a\|\underline{w}\|$

נקטו בפירות את תשובותיכם!

תרגיל 5:

יהיו \underline{u} , \underline{v} וקטורים שונים מ- $\underline{0}$ ב- \mathbb{R}^n ובعلي אותה נורמה $\|\cdot\|$ $\neq \|\cdot\|_F$ פרמטר ממשי. נתון שהמרחב בין \underline{u} ל- \underline{v} שווה למרחק של $\|\cdot\|$ מהראשית ונתון שהזווית בין \underline{u} ל- \underline{v} היא 60° . מצאו את ערכו של k .

תתי מרחב:

ספר עמוד 126:

.1. בדקו האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא תת-מרחב של \mathbb{R}^2 , מרחב וקטורים מעל \mathbb{R} .
אם כן הוכחו אחרת הביאו דוגמה נגדית.

$\{(a, a^2) / a \in \mathbb{R}\}$.1.2	$\{(a, b) / ab = 0\}$.1.1
$\{(a, b) / 2a + 3b = 2\}$.1.4	$\{(a, b) / a + b = 0\}$.1.3
$\{(a, b) / a^2 + b^2 \leq 2\}$.1.6	$\{(a, b) / a \geq 0 \wedge b \geq 0\}$.1.5
$\{t(2,3) + (4,6) / t \in \mathbb{R}\}$.1.8	$\{(a, b) / a^2 + b^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$.1.7
		$\{t(2,3) + (1,-1) / t \in \mathbb{R}\}$.1.9

.2. בדקו האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא תת-מרחב של \mathbb{R}^3 , מרחב וקטורים מעל \mathbb{R} .
אם כן הוכחו אחרת הביאו דוגמה נגדית.

$\{(a, b, c) / a + 2b - c = 1\}$.2.2	$\{(a, b, c) / a = 2b\}$.2.1
$\{(a, b, c) / a \leq c\}$.2.4	$\{(a, b, c) / ab + bc = 0\}$.2.3
$\{(x, y, z) / \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}\}$.2.6	$\{(a, b, 4a - 3b) / a, b \in \mathbb{R}\}$.2.5
$\{t(1,2,-1) + (1,3,0) / t \in \mathbb{R}\}$.2.8	$\{(x, y, z) / ix - y + (1+i)z = 0\}$.2.7
		$\{t_1(1,2,-1) + t_2(1,3,0) / t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.2.9
		$\{t_1(1,2,-1) + t_2(1,3,0) + (1,0,0) / t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.2.10