

מבחן ראשון
מרוכבים:
ספר עמוד 100
שאלה 6:

הוכיחו שאם מספר מרוכב z הוא שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים אז גם \bar{z} הוא שורש של הפולינום.

שאלה 9:

9. חשבו את הביטויים הבאים:

$$\frac{i^3 - i^4 + i^9}{2 - i^5 + i^7} \quad .9.2 \qquad \frac{(-3 + 2i)(7 + 3i)}{1 + i} \quad .9.1$$

$$\left| \frac{3 + i}{2 - i} \right| \quad .9.4 \qquad \left(\frac{1 + i}{2 - i} \right)^3 \quad .9.3$$

שאלה 12:

12. חשבו בעזרת ההצגה הקוטבית את הביטויים הבאים:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right)^8 \quad .12.3 \qquad \frac{(1 - i)^5}{(2 + 2i)^4} \quad .12.2 \qquad (1 - i)^6 \quad .12.1$$

שאלה 14:

14. פתרו את המשוואות הבאות:

$$4z^2 + 4z + 1 - 4i = 0 \quad .14.1$$

$$z^4 = -16 \quad .14.2$$

$$2z^2 + z + 1 = 0 \quad .14.3$$

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \quad .14.4$$

$$z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 = 0 \quad .14.5 \quad (\text{רמז: כפלו את המשוואה ב- } z + 1)$$

שאלה 17:

17. יהיו z ו- w מספרים מרוכבים המקיימים: $|z| = |w| = 1$ ו- $z \cdot w \neq 1$.

הוכיחו שהמספר $\frac{z-w}{1-z \cdot w}$ הוא מספר ממשי.

דף מאגר ראשון:

8. רשמו הצגה קרטזית למספרים המרוכבים הבאים:

א. $(\sqrt{3} + i)^7$ ב. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

9. מצאו את כל הפתרונות למשוואות הבאות ותארו אותם כוקטורים במישור המרוכב:

א. $z^5 - (\sqrt{3} - 3i)z = 0$ ב. $z^4 = -8 + 8(\sqrt{3})i$ ג. $z^6 = \frac{1-i}{1+(\sqrt{3})i}$

1. יהיו z_1, z_2, \dots, z_k מספרים מרוכבים כך ש- $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_k| = 1$. הוכיחו ש-

הדרכה לפתרון: $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_k} \right| = \left| \frac{\bar{z}_1}{z_1 \cdot \bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} + \dots + \frac{\bar{z}_k}{z_k \cdot \bar{z}_k} \right|$

2. הוכיחו כי אם $|z| \leq 1$ אז $\left| \operatorname{Im}(1 - \bar{z} + 2z^2) \right| < 4$.

הדרכה: היעזרו באי שוויון המשולש $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ובכך ש- $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

1. הוכיחו: א. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

ב. $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

ג. $\frac{1}{\sqrt{2}} |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

2. יהיו $\underline{u} = (-1, 2, 1, 3)$, $\underline{v} = (2, 4, 0, -3)$ ו- $\underline{w} = (-1, 4, 2, 5)$

2.1. חשבו את הווקטורים הבאים: $2\underline{u} - 5\underline{v}$, $5\underline{u} - 3\underline{v} + 2\underline{w}$

2.2. מהם ערכי x, y ו- z כך ש- $-\underline{xu} + 2\underline{yv} - \underline{zw} = \underline{0}$ (סקלרים).

2.3. מצאו x, y ו- z כך ש- $2\underline{xu} + \underline{yv} - \underline{zw} = (1, -2, 1, 2)$

2.4. מה התנאים על a, b, c ו- d אם ידוע שקיימים x, y ו- z כך ש-

$$2\underline{xu} + \underline{yv} - \underline{zw} = (a, b, c, d)$$

8. הוכיחו שלכל \underline{u} ו- \underline{v} ווקטורים ב- R^n מתקיים:

8.1. $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\underline{u} \bullet \underline{v}$

8.2. $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 2\|\underline{u}\|^2 + 2\|\underline{v}\|^2$

8.3. $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 4\underline{u} \bullet \underline{v}$

23. מצאו הצגה פרמטרית ומשוואה/ות ל-

23.1. הישר דרך $(1, -2)$ ובכיוון $(4, -3)$.

23.2. הישר דרך $(1, 2, 3)$ ובכיוון $(4, 5, 6)$.

שאלות נוספות תרגיל 4

נתונים שלושה ווקטורים \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} שונים מווקטור האפס ב- R^n וכך שמתקיים:

1. \underline{u} ו- \underline{w} אורתוגונאליים וגם \underline{v} ו- \underline{w} אורתוגונאליים.

2. $d(\underline{u}, \underline{w}) = d(\underline{v}, \underline{w}) = d(\underline{u}, \underline{v})$

3. הזווית בין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שווה 120° .

מהם ערכי a ו- b ממשיים עבורם מתקיים: $\|\underline{u}\| = a\|\underline{w}\|$ ו- $\|\underline{v}\| = b\|\underline{w}\|$?

נמקו בפרוט את תשובותיכם!

תרגיל 5:

יהיו \underline{u} , \underline{v} וקטורים שונים מ- $\underline{0}$ ב- R^n ובעלי אותה נורמה ו- $k \neq 0$ פרמטר ממשי. נתון שהמרחק בין \underline{u} ל- $k\underline{v}$ שווה למרחק של \underline{u} מהראשית ונתון שהזווית בין \underline{u} ל- \underline{v} היא 60° , מצאו את ערכו של k .

תתי מרחב:

ספר עמוד 126:

1. בדקו האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא תת-מרחב של R^2 , מרחב וקטורים מעל R .

אם כן הוכיחו אחרת הביאו דוגמה נגדית.

- | | | | |
|----------------------------------|-----|--|-----|
| $\{(a, a^2) / a \in R\}$ | 1.2 | $\{(a, b) / ab = 0\}$ | 1.1 |
| $\{(a, b) / 2a + 3b = 2\}$ | 1.4 | $\{(a, b) / a + b = 0\}$ | 1.3 |
| $\{(a, b) / a^2 + b^2 \leq 2\}$ | 1.6 | $\{(a, b) / a \geq 0 \text{ ו- } b \geq 0\}$ | 1.5 |
| $\{t(2, 3) + (4, 6) / t \in R\}$ | 1.8 | $\{(a, b) / a^2 + b^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$ | 1.7 |
| | | $\{t(2, 3) + (1, -1) / t \in R\}$ | 1.9 |

2. בדקו האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא תת-מרחב של R^3 , מרחב וקטורים מעל R .

אם כן הוכיחו אחרת הביאו דוגמה נגדית.

- | | | | |
|---|-----|---|------|
| $\{(a, b, c) / a + 2b - c = 1\}$ | 2.2 | $\{(a, b, c) / a = 2b\}$ | 2.1 |
| $\{(a, b, c) / a \leq c\}$ | 2.4 | $\{(a, b, c) / ab + bc = 0\}$ | 2.3 |
| $\left\{ (x, y, z) / \begin{matrix} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{matrix} \right\}$ | 2.6 | $\{(a, b, 4a - 3b) / a, b \in R\}$ | 2.5 |
| $\{t(1, 2, -1) + (1, 3, 0) / t \in R\}$ | 2.8 | $\{(x, y, z) / ix - y + (1 + i)z = 0\}$ | 2.7 |
| | | $\{t_1(1, 2, -1) + t_2(1, 3, 0) / t_1, t_2 \in R\}$ | 2.9 |
| | | $\{t_1(1, 2, -1) + t_2(1, 3, 0) + (1, 0, 0) / t_1, t_2 \in R\}$ | 2.10 |