תרגילים נוספים לבחינה:

.1

ב. יהיו z ו- w מספרים מרוכבים המקיימים: $|z|=|w|=1$ ו- $z\cdot w\neq 1$.

הוכיחו שהמספר $\dfrac{z-w}{1-z\cdot w}$ הוא מספר ממשי.

נמקו בפרוט את תשובותיכם!

ב.

$|z|=|w|=1 \quad , \quad z\cdot w\neq 1$

$$\frac{z-w}{1-z\cdot w}=\frac{(z-w)\overline{(1-z\cdot w)}}{(1-z\cdot w)\overline{(1-z\cdot w)}}=\frac{(z-w)(1-\bar{z}\cdot\bar{w})}{|1-zw|^2}=$$

צמוד של סכום = סכום צמודים.
צמוד של מכפלה = מכפלת צמודים.
$|w|^2=w\cdot\bar{w}$

$$=\frac{z-z\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}-w+w\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}}{|1-zw|^2}$$

$$=\frac{z-|z|^2\cdot\bar{w}-w+\bar{z}\cdot|w|^2}{|1-z\cdot w|^2}=$$

$w\cdot\bar{w}=|w|^2$ $\qquad$ $|z|=|w|=1$

$$=\frac{z-\bar{w}-w+\bar{z}}{|1-z\cdot w|^2}=\frac{z+\bar{z}-(w+\bar{w})}{|1-z\cdot w|^2}=$$

$$=\frac{2\mathrm{Re}\,z-2\mathrm{Re}\,w}{|1-zw|^2}\in R$$

$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$

ממשיים $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}\,z,\ \mathrm{Re}\,w\\ |1-zw|^2\end{array}\right.$

.2

ב. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה: $z^2+2\bar{z}=-\mathrm{Re}(z)$

נמקו בפרוט את תשובותיכם.

ב. נסמן: $z=a+bi$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$ אז

$$(a+bi)^2+2(a-bi)=-a$$

$$\Rightarrow \quad a^2+2abi-b^2+2a-2bi=-a$$

$$\mathrm{Re}\ : \begin{cases} a^2-b^2+3a=0 \\ \cancel{2}ab-\cancel{2}b=0 \Rightarrow b(a-1)=0 \Rightarrow b=0 \text{ או } a=1 \end{cases}$$

$$b=0 \Rightarrow a^2+3a=0 \Rightarrow a(a+3)=0 \Rightarrow a=0 \text{ או } -3$$

$$a=1 \Rightarrow 1-b^2+3=0 \Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2$$

$$\Rightarrow \quad z=0,-3,1+2i,1-2i$$ 4 פתרונות.

.3

מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה: $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z^4=-2$

הציגו את הפתרונות בצורה אלגברית.

ב. 10

$$(1+\sqrt{3}\,i)z^4=-2$$

$$z^4=\frac{-2}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{-2(1-\sqrt{3}\,i)}{4}=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,i)$$

$$z^4=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)=1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2}$$

$$z=re^{i\theta}$$

$$r^4e^{i4\theta}=e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}\Rightarrow$$

$$r^4=1\Rightarrow r=1$$

$$4\theta=\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\quad k=0,1,2,3$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\quad k=0,1,2,3$$

$$k=0\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_1=e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}=0.866+0.5i$$

$$k=1\Rightarrow\theta_2=\frac{2}{3}\pi\Rightarrow z_2=e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}=-0.5+0.866i$$

$$k=2\Rightarrow\theta_3=\frac{7}{6}\pi\Rightarrow z_3=e^{i\cdot\frac{7}{6}\pi}=-0.866-0.5i$$

$$k=3\Rightarrow\theta_4=\frac{5}{3}\pi\Rightarrow z_4=e^{i\cdot\frac{5}{3}\pi}=0.5-0.866i$$

4.

נתונים שלושה וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ שונים מווקטור האפס ב- $\mathbb{R}^n$ וכך שמתקיים:

1. $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ אורתוגונאליים וגם $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ אורתוגונאליים.
2. $d(\underline{u},\underline{w})=d(\underline{v},\underline{w})=d(\underline{u},\underline{v})$
3. הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שווה 120°.

מהם ערכי a ו- b ממשיים עבורם מתקיים: $\|\underline{u}\|=a\|\underline{w}\|$ ו- $\|\underline{v}\|=b\|\underline{w}\|$?

נמקו בפרוט את תשובותיכם!

פתרון:

נתון:

(1) $\underline{u}\bullet\underline{w}=0$ ו- $\underline{v}\bullet\underline{w}=0$

(2) $\|\underline{u}-\underline{w}\|=\|\underline{v}-\underline{w}\|=\|\underline{u}-\underline{v}\|$

(3) $\frac{\underline{u}\bullet\underline{v}}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|}=-\frac{1}{2} \Leftarrow \underline{u}\bullet\underline{v}=-\frac{1}{2}\cdot\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$

מ- (2) נובע:

I) $\|\underline{u}-\underline{w}\|^2=\|\underline{v}-\underline{w}\|^2$ ו- II) $\|\underline{v}-\underline{w}\|^2=\|\underline{u}-\underline{v}\|^2$ כלומר,

I) $(\underline{u}-\underline{w})\bullet(\underline{u}-\underline{w})=(\underline{v}-\underline{w})\bullet(\underline{v}-\underline{w}) \Leftarrow$

$\underline{u}\bullet\underline{u}-2\underline{u}\bullet\underline{w}+\underline{w}\bullet\underline{w}=\underline{v}\bullet\underline{v}-2\underline{v}\bullet\underline{w}+\underline{w}\bullet\underline{w}$ ועל פי נתון (1) נקבל ש-

$\underline{u}\bullet\underline{u}+\underline{w}\bullet\underline{w}=\underline{v}\bullet\underline{v}+\underline{w}\bullet\underline{w}$ ולכן, $\underline{u}\bullet\underline{u}=\underline{v}\bullet\underline{v}$ כלומר, $\|\underline{u}\|^2=\|\underline{v}\|^2$

ולכן, $\|\underline{u}\|=\|\underline{v}\|$ (4).

II) $(\underline{v}-\underline{w})\bullet(\underline{v}-\underline{w})=(\underline{u}-\underline{v})\bullet(\underline{u}-\underline{v}) \Leftarrow$

$\underline{v}\bullet\underline{v}-2\underline{v}\bullet\underline{w}+\underline{w}\bullet\underline{w}=\underline{u}\bullet\underline{u}-2\underline{u}\bullet\underline{v}+\underline{v}\bullet\underline{v}$

על פי (1) נקבל ש- $\underline{w}\bullet\underline{w}=\underline{u}\bullet\underline{u}-2\underline{u}\bullet\underline{v}$

על פי (3) נקבל ש- $\|\underline{w}\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$ ועל פי (4) ש- $\|\underline{w}\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underline{v}\|^2=2\|\underline{v}\|^2$

לכן, $\|\underline{w}\|=\sqrt{2}\|\underline{v}\| \Leftarrow \|\underline{u}\|=\|\underline{v}\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\|\underline{w}\|$ ו- $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

.5

יהיו $\underline{u}$, $\underline{v}$ וקטורים שונים מ- $\underline{0}$ ב- R^n ובעלי אותה נורמה ו- $k\neq 0$ פרמטר ממשי. נתון שהמרחק בין $\underline{u}$ ל- $k\underline{v}$ שווה למרחק של $\underline{u}$ מהראשית ונתון שהזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ היא 60°, מצאו את ערכו של k.

פתרון:

10 א. הוכחת משפט

10 ב. $\underline{u},\underline{v} \in R^n$, $\underline{u},\underline{v} \neq \underline{0}$, $\|\underline{u}\| = \|\underline{v}\|$

$k \neq 0$

נתון $d(\underline{u}, k\underline{v}) = d(\underline{u}, \underline{0})$

$\Rightarrow \|\underline{u} - k\underline{v}\| = \|\underline{u} - \underline{0}\| \quad / (\ )^2$

$\Rightarrow \|\underline{u} - k\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2$

$\Rightarrow (\underline{u} - k\underline{v}) \cdot (\underline{u} - k\underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{u}$

$\Rightarrow \cancel{\underline{u} \cdot \underline{u}} - 2k\,\underline{u} \cdot \underline{v} + k^2\,\underline{v} \cdot \underline{v} = \cancel{\underline{u} \cdot \underline{u}}$

$\Rightarrow -2k\,\underline{u} \cdot \underline{v} + k^2 \|\underline{v}\|^2 = 0 \quad (1)$

$\theta = 60^\circ \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\cancel{*}$

כיוון ש- $\cos\theta = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{v}\|^2} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2}\|\underline{v}\|^2$

$\boxed{\|\underline{u}\| = \|\underline{v}\|}$

נציב ב- (1)

$-2k \cdot \frac{1}{2}\|\underline{v}\|^2 + k^2\|\underline{v}\|^2 = 0$

$\Rightarrow (-k + k^2)\|\underline{v}\|^2 = 0$

נתון $\|\underline{v}\|^2 \neq 0 \Leftarrow$

$k^2 - k = 0$

$\Rightarrow k = 0, 1$

נתון $0 \neq k \Leftarrow$ $k = 1$

.6

יהיו $\underline{v} = (1, 1, a)$ ו- $\underline{w} = (b, -1, 1)$ וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$, האורתוגונליים זה לזה, כאשר a ו- b הם פרמטרים ממשיים. בנוסף נתון כי המרחק בין שני הווקטורים הללו הוא $\frac{3}{\sqrt{2}}$. מהי הטענה הנכונה?

א. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

ב. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$.

ג. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$.

ד. $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

ה. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

פתרון:

נתונים: $\underline{v}\cdot\underline{w}=0$, $d(\underline{v},\underline{w})=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$0=\underline{v}\cdot\underline{w}=(1,1,a)\cdot(b,-1,1)=b-1+a$$

$$\Rightarrow a=1-b \quad (*)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=d(\underline{v},\underline{w})=\|\underline{v}-\underline{w}\|$$

$\Leftarrow$

$$\frac{9}{2}=\|\underline{v}-\underline{w}\|^2=(\underline{v}-\underline{w})\cdot(\underline{v}-\underline{w})=$$

$$=\|\underline{v}\|^2-2\underbrace{\underline{v}\cdot\underline{w}}_{(\text{נתון})=0}+\|\underline{w}\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2=$$

$$=(1^2+1^2+a^2)+(b^2+(-1)^2+1^2)=a^2+b^2+4$$

$\Leftarrow$ $a^2+b^2=\frac{1}{2}$

נציב את $(*)$: $(1-b)^2+b^2=\frac{1}{2}$

$$1-2b+2b^2=\frac{1}{2}$$

$$2b^2-2b+\frac{1}{2}=0$$

$$b_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}}{4}=\frac{2\pm 0}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a=1-b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

.7

מי מבין הקבוצות הבאות היא תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$?

א. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|(a+b)^2=0\}$.

ב. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|ab=0\}$.

ג. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a+b=1\}$.

ד. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|(a+b)^2=(a-b)^2\}$.

ה. $\{(t,t-1)|t\in\mathbb{R}\}$.

פתרון:

א. <u>תמ"ו</u>

$$(a+b)^2=0$$
$$\Leftarrow$$
$$a+b=0$$
$$\Leftarrow$$
$$b=-a$$

$$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (a+b)^2=0\} = \{(a,-a) \mid a\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1,-1) \mid a\in\mathbb{R}\} = Sp\{(1,-1)\}$$ תמ"ו

ב. <u>לא תמ"ו</u> אין סגירות לחיבור, לדוגמא:

$$(1,0),\ (0,1) \in \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid ab=0\}$$

כי: $1\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0$

אבל:

$$(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid ab=0\}$$

כי: $1\cdot 1=1\neq 0$

כי: $1\cdot 1=1\neq 0$

ג. <u>לא תמ"ו</u> כי $(0,0)$ לא בקבוצה

$$0+0=0\neq 1$$

ד. <u>לא תמ"ו</u>

$$(a+b)^2=(a-b)^2$$
$$\Leftarrow$$
$$\cancel{a^2}+2ab+\cancel{b^2}=\cancel{a^2}-2ab+\cancel{b^2}$$
$$\Leftarrow$$
$$4ab=0$$
$$\Leftarrow$$
$$ab=0$$

וכן הקבוצה ב' זהה לקבוצה ב-ד',

ה. <u>לא תמ"ו</u>. כי $(0,0)$ לא בקבוצה.

8.

א. פתרו מעל המרוכבים: $z^3+\bar{z}=0$. כתבו את כל הפתרונות בהצגה הקרטזית: $z=a+bi$.

ב. יהיו z,w מספרים מרוכבים. הוכיחו שהמספר $(z+\overline{w})(\overline{z}-w)$ הוא מדומה טהור אם ורק אם $|z|=|w|$.

פתרון:

נסמן $z=re^{i\theta}$ ונציב במשוואה

נסמן:
היא:

$$z^3+|z|=0$$

$$(re^{i\theta})^3+r=0$$

$$r^3e^{i(3\theta)}+r=0 \quad /:r(\neq 0)$$

(מותר כי מעוניינים בפתרונות השונים מ-0)

$$r^2e^{i(3\theta)}+1=0$$

$$r^2e^{i(3\theta)}=-1=e^{i\pi}$$

$$r^2=1 \Rightarrow r=1$$

$$3\theta=\pi+2\pi k \qquad k=0,1,2$$

$$\theta=\frac{\pi+2\pi k}{3} \qquad k=0,1,2$$

$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2=e^{i\pi}=-1 \qquad \frac{2\pi}{3}$

$z_3=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$z_1z_2z_3=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot(-1)\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}=(-1)e^{i\frac{6\pi}{3}}=$

$=(-1)e^{i(2\pi)}=(-1)\cdot 1=\boxed{-1}$

9.

הנתונים הבאים מתייחסים לשתי השאלות הבאות.

יהיו $\underline{u}, \underline{v} \in R^n$ שני וקטורי יחידה כך שמתקיימים: $\underline{u}$ אורתוגונלי ל- $\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u}$.

<u>שאלה 4</u>

מהי הטענה הנכונה?

א. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורים אורתוגונאליים זה לזה.

ב. $\underline{u} + \underline{v}$ הוא וקטור יחידה.

ג. $\underline{u} + \underline{v}$ ו- $\underline{u} - \underline{v}$ אינם אורתוגונאליים זה לזה.

ד. $\|\underline{u} - \underline{v}\| = 4$

ה. $\underline{u} - \underline{v}$ הוא וקטור יחידה.

פתרון:

<u>נתון</u>

$\|\underline{u}\| = \|\underline{v}\| = 1$

$\underline{u}\cdot(\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}) = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} + \frac{1}{2}\|\underline{u}\|^2 = 0$

$\Rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} + \frac{1}{2}\cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{u}\cdot\underline{v} = -\frac{1}{2}}$

לכן $\underline{u},\underline{v}$ לא אורתוגונליים זה לזה - <u>א' לא נכון.</u>

$\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \|\underline{u}\|^2 + 2\underline{u}\cdot\underline{v} + \|\underline{v}\|^2 =$

$= 1 + 2(-\frac{1}{2}) + 1 = 1 \Rightarrow \|\underline{u}+\underline{v}\| = 1$

⇐ <u>ב' נכון</u>

$(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) = \|\underline{u}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 = 1 - 1 = 0$

לכן $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$ אורתוגונליים זה לזה

⇐ <u>ג' לא נכון</u>

$(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) = \|\underline{u}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 = 1-1=0$

לכן $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{v}-\underline{u}$ אורתוגונליים ובפרט

$\Leftarrow$ ג לא נכון

$\|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = (\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) = \|\underline{u}\|^2 - 2\underline{u}\cdot\underline{v} + \|\underline{v}\|^2 =$

$= 1-2(-\frac{1}{2})+1 = 3$

$\Rightarrow \|\underline{u}-\underline{v}\| = \sqrt{3}$

$\Leftarrow$ ב,ה לא נכונים

.10

יהיו $\underline{u},\underline{v}$ וקטורים ב- R^n השונים מווקטור האפס, ו- k סקלר ממשי.

איזו טענה <u>איננה</u> נכונה?

א. אם $\underline{u},\underline{v}$ וקטורי יחידה האורתוגונליים זה לזה, ו- k מספר ממשי שונה מאפס כך שמתקיים: $\|\underline{u}+k\underline{v}\| = 2k-1$, אז $k=4$.

ב. אם $\|\underline{u}-k\underline{v}\| = \|\underline{u}+k\underline{v}\|$, אז $\underline{u},\underline{v}$ אורתוגונליים זה לזה לכל $k \neq 0$.

ג. אם $\underline{u},\underline{v}$ וקטורי יחידה האורתוגונליים זה לזה, אז קיימים בדיוק שני ערכי k שונים עבורם מתקיים: $\|k\underline{u}+(1-k)\underline{v}\| = \sqrt{5}$.

ד. אם $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $\underline{v}$ וקטור יחידה, ו- k מספר ממשי כך שמתקיים: $d(\underline{u},k\underline{v})=2$, אז $\|\underline{u}\| \leq 2$.

ה. אם $\underline{u},\underline{v}$ אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה, ומתקיים: $\|\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\| = \sqrt{5}$, אז: $\|\underline{u}\| = \|\underline{v}\| = \sqrt{10}$.

פתרון:

נתונים: $k\in\mathbb{R}$, $0\ne\underline{u}\in\mathbb{R}^n$, $0\ne\underline{v}\in\mathbb{R}^n$

א. נתון: $k\ne 0$ $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $\|\underline{u}\|=\|\underline{v}\|=1$

$\|\underline{u}+k\underline{v}\|=2k-1$

$$\Rightarrow \|\underline{u}+k\underline{v}\|^2=(2k-1)^2$$

$$\Rightarrow (\underline{u}+k\underline{v})\cdot(\underline{u}+k\underline{v})=4k^2-4k+1$$

$$\|\underline{u}\|^2+2k\,\underline{u}\cdot\underline{v}+k^2\|\underline{v}\|^2=4k^2-4k+1$$

$$1^2+2k\cdot 0+k^2\cdot 1=4k^2-4k+1$$

$$k^2+1=4k^2-4k+1$$

$$3k^2-4k=0$$

$$k(3k-4)=0 \qquad /:k \ (\text{נתון } k\ne 0)$$

$$3k-4=0$$

$k=4/3 \Rightarrow$ זה הערך היחיד (והמתאים לשאלה)

ב. נתון: $\|\underline{u}+k\underline{v}\|=\|\underline{u}-k\underline{v}\|$

$$\Leftarrow \|\underline{u}+k\underline{v}\|^2=\|\underline{u}-k\underline{v}\|^2$$

$$(\underline{u}+k\underline{v})\cdot(\underline{u}+k\underline{v})=(\underline{u}-k\underline{v})\cdot(\underline{u}-k\underline{v})$$

$$\cancel{\|\underline{u}\|^2} + 2k\underline{u}\cdot\underline{v} + \cancel{k^2\|\underline{v}\|^2} = \cancel{\|\underline{u}\|^2} - 2k\underline{u}\cdot\underline{v} + \cancel{k^2\|\underline{v}\|^2}$$

$$4k\,\underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \quad / : 4k(\neq 0) \quad \Leftarrow$$

נתון

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$$

ולכן $\underline{u}$ אנכי ל- $\underline{v}$.

(2) נתונים $\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \quad \|\underline{u}\| = \|\underline{v}\| = 1$

$$\|k\underline{u} + (1-k)\underline{v}\| = \sqrt{5}$$

$$\|k\underline{u} + (1-k)\underline{v}\|^2 = 5 \quad \Leftarrow$$

$$(k\underline{u} + (1-k)\underline{v})\cdot(k\underline{u} + (1-k)\underline{v}) = 5$$

$$k^2\|\underline{u}\|^2 + 2k(1-k)\underline{u}\cdot\underline{v} + (1-k)^2\cdot\|\underline{v}\|^2 = 5$$

$$k^2\cdot 1^2 + 2k(1-k)\cdot 0 + (1-k)^2\cdot 1^2 = 5$$

$$k^2 + (1-k)^2 = 5$$

$$k^2 + (1 - 2k + k^2) = 5$$

$$2k^2 - 2k - 4 = 0$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k-2)(k+1) = 0$$

$k = 2, -1$

וזה ג' נכון.

(ג') נתונים: $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $\|\underline{v}\|=1$

$d(\underline{u},k\underline{v})=2$

$\Rightarrow \|\underline{u}-k\underline{v}\|=2$

$\Rightarrow \|\underline{u}-k\underline{v}\|^2=4$

$\Rightarrow (\underline{u}-k\underline{v})\cdot(\underline{u}-k\underline{v})=4$

$\|\underline{u}\|^2-2k\,\underline{u}\cdot\underline{v}+k^2\cdot\|\underline{v}\|^2=4$

$\|\underline{u}\|^2-2k\cdot 0+k^2\cdot 1=4$

$\|\underline{u}\|^2=4-k^2\le 4$

$\boxed{\text{כי: } k^2\ge 0}$

ולכן טענה ד' נכונה:

$\|\underline{u}\|\le 2$

לכן ד' נכון.

(ה) נתונים: $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $\|\underline{u}\|=\|\underline{v}\|$

$\|\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\|=\sqrt{5}$

$\Rightarrow \|\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\|^2=5$

$(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v})\cdot(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v})=5$

$(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v})\cdot(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v})=5$

$\frac{1}{4}\|\underline{u}\|^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{1}{4}\|\underline{v}\|^2=5$

$\frac{1}{4}\|\underline{u}\|^2+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}\|\underline{v}\|^2=5$

נציב $\|\underline{u}\|=\|\underline{v}\|$ (נתון):

$\frac{1}{2}\|\underline{u}\|^2=5$

$\|\underline{u}\|^2=10$

$\Rightarrow \|\underline{u}\|=\|\underline{v}\|=\sqrt{10}$ וזה ה' נכון

.11

נתונה המשוואה $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$. מהי הטענה הנכונה?

א. למשוואה הנתונה יש בדיוק ארבעה פתרונות שונים, שסכומם 2π.

ב. למשוואה הנתונה יש בדיוק ארבעה פתרונות שונים, המהווים סדרה הנדסית, כאשר מנת הסדרה היא i.

ג. למשוואה הנתונה יש בדיוק ארבעה פתרונות שונים, המהווים סדרה הנדסית, כאשר מנת הסדרה היא $\frac{\pi}{2}$.

ד. אם $z = z^*$ הוא פתרון של המשוואה הנתונה אז $|z^*| = \sqrt{2}$.

ה. אם $z = z^*$ הוא פתרון של המשוואה הנתונה אז $z^* = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$.

פתרון:

$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} = 1 - i\sqrt{3}$ נסמן:

$r_0 = |z_0| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\tan\theta_0 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta_0 = -\frac{\pi}{3}, \cancel{\frac{2\pi}{3}}$

ברביע רביעי ברביע שני

$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ לכן:

$z = re^{i\theta}$ נסמן:

אזי:

$(re^{i\theta})^4 = 2e^{-i\pi/3}$

$r^4 e^{i(4\theta)} = 2e^{-i\pi/3}$

$r^4 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[4]{2}$

$4\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad k = 0,1,2,3$

$\theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} = \frac{-\pi + 6\pi k}{12}$

$k=0 \quad z_1=\sqrt[4]{2}\,e^{-\frac{\pi}{12}i}$

$k=1 \quad z_2=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{5\pi}{12}i}$

$k=2 \quad z_3=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{11\pi}{12}i}$

$k=3 \quad z_4=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{17\pi}{12}i}$

ה' יחס בין שני פתרונות עוקבים

$$\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi(k+1)}{2}\right)}}{\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=\boxed{i}$$

ו' בין 4 הפתרונות מהווים סדרה הנדסית שמנתה i (ד' נכון ; ג' לא נכון)

ג' לא נכון: סכום 4 הפתרונות הוא 0.

ד' לא נכון, כי אין z^* כמו שלנו:
$$|z^*| = \sqrt[4]{2} \neq \sqrt{2}$$

ה' לא נכון, כי לפיה יש ממשי ומדומה, שונים מאפס ($1-z^*$ ממשי ואינו אפס מאפס).

הערה הוכחה מלאה שסכום הפתרונות הוא 0:

$$z_1+z_2+z_3+z_4=\sqrt[4]{2}\left(e^{-\frac{\pi}{12}i}+e^{\frac{5\pi}{12}i}+e^{\frac{11\pi}{12}i}+e^{\frac{17\pi}{12}i}\right)=$$
$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)=$$
$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+\right. \quad (*)$$
$$\left.+i\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)\right)=$$

$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$$

לכן:

$$\begin{cases}-\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\\ -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\pi\right)=\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)\end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0\\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)=0\end{cases}$$

ולכן סכום הקוסינוסים ב(*) הוא: 0.

בדיוק אותו הדבר קורה עם הסינוסים

ולכן גם סכומם הוא: 0.

לכן סכום 4 הפתרונות הוא 0.

.12

נגדיר על R^3 פעולות חיבור וכפל:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \oplus (\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{f})$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \otimes (\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{be}, \boldsymbol{ae}+\boldsymbol{bd}, \boldsymbol{cf})$$

לכל $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}), (\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{R}^3$.

איזו טענה <u>איננה</u> נכונה?

א. מתקיימת סגירות בכפל.

ב. פעולת הכפל שהוגדרה היא פעולה קומוטטיבית (חילופית).

ג. מתקיימת דיסטריבוטיביות (פילוג) ב- R^3 עם פעולות החיבור והכפל האלה.

ד. קיים איבר ניטרלי לכפל (איבר יחידה).

ה. לכל איבר ב- R^3 השונה מ-(0,0,0) קיים הפכי ב- R^3.

<u>פתרון שאלה 12: ה'</u>

פתרון:

א׳ טענה <u>נכונה</u> נשלים ההגדרה (מוגדרת) הכפל, החיבור והתוצאה ב-R.

(ב׳) $(d,e,f)\otimes(a,b,c)=(da-eb, db+ea, fc)=$
$=(ad-be, ae+bd, cf)=(a,b,c)\otimes(d,e,f)$

לכן יש <u>קומוטטיביות בכפל</u>, <u>ולכן נכון</u>.

(ג׳)
$(a,b,c)\otimes((d,e,f)+(g,h,i))=$
$=(a,b,c)\otimes(d+g, e+h, f+i)=$
$=(a(d+g)-b(e+h), a(e+h)+b(d+g), c(f+i))=$
$=(ad+ag-be-bh, ae+ah+bd+bg, cf+ci)$

[illegible]:

$$\big((a,b,c)\otimes(d,e,f)\big)\oplus\big((a,b,c)\otimes(g,h,i)\big)=$$
$$=(ad-be,\ ae+bd,\ cf)\oplus(ag-bh,\ ah+bg,\ ci)=$$
$$=(ad-be+ag-bh,\ ae+bd+ah+bg,\ cf+ci)$$

ומהשוואת הרכיבים מתקיים שיש שוויון

ולכן ב נכון

(ג) נראה שיש יחידה, כלומר שיש $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

כך שלכל $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$(a,b,c)\otimes(x,y,z)=(a,b,c)$$

$$(ax-by,\ ay+bx,\ cz)=(a,b,c)$$

$$\begin{cases} ax-by=a \\ bx+ay=b \\ cz=c \end{cases}$$

כיוון שזה נכון לכל $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

נבחר $(a,b,c)=(1,0,0)$ ונקבל:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

נבחר $(a,b,c)=(0,0,1)$ ונקבל:

$$\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ z=1 \end{cases}$$

כלומר לא יש סתירה, המכפלה מתקיימת:

$(x,y,z)=(1,0,1)$

נבדוק שזה אכן איבר יחידה:

$$(a,b,c)\otimes(1,0,1)=(a\cdot 1-b\cdot 0,\ a\cdot 0+b\cdot 1,\ c\cdot 1)=$$
$$=(a,b,c)$$

ומכאן אכן $(1,0,1)$ איבר יחידה. <u>ד' נכון.</u>

ה) יהי $(0,0,0)\neq(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

אז ישנו הפכי $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ המקיים:

$$(a,b,c)\otimes(x,y,z)=(1,0,1)$$

$$(ax-by,\ ay+bx,\ cz)=(1,0,1)$$

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \\ cz=1 \end{cases}$$

אם $c=0$ אזי יש סתירה למטרתנו,

כלומר לדוגמה: $(0,1,0)$ אין הפכי

כי אם נניח שיש לו הפכי (x,y,z) נקבל:

$$(0,1,0)\otimes(x,y,z)=(1,0,1)$$

$$(0\cdot x-y\cdot 1,\ 0\cdot y+1\cdot x,\ 0\cdot z)=(1,0,1)$$

$$(-y,\ x,\ 0)=(1,0,1)$$

נקבל ברכיב השלישי: $1=0$. סתירה.

<u>לכן ה' לא נכון.</u>