מספרים מרוכבים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z=x+iy$ | $Re(z)=x$ | $Im(z)=y$ | $z\in C, x, y\in R$ |
| $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$ | | $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$ | |
| $z_1\cdot z_2=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)$ | | $z^{-1}=\frac{x}{(x^2+y^2)}-\frac{y}{x^2+y^2}i=\frac{\overline{z}}{\lvert z^2\rvert}$ | |
| $\frac{z_1}{z_2}=z1\cdot z_2^{-1}=\left[x_1\cdot\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)-y_1\cdot\left(\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)\right]+\left[x_1\cdot\left(\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)+y_1\cdot\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)\right]i$ | | | |
| $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{(x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2)+i(-x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)}{x_2^2+y_2^2}$ | | | |
| $\overline{z}=x-iy$ | $\overline{\overline{z}}=z$ | $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ | $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ |
| $z+\overline{z}=2Re(z)=2x$ | $z-\overline{z}=2Im(z)i=2yi$ | $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in R$ | $a\in R, z\in C\rightarrow\overline{az}=a\overline{z}$ |
| $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_n}$ | $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}$ | | $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ |
| $\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ | $\lvert z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert$ | $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$ | $Re(z)\leq\lvert Re(z)\rvert\leq\lvert z\rvert$<br>או<br>$x\leq\lvert x\rvert\leq\lvert z\rvert$ |
| $Im(z)\leq\lvert Im(z)\rvert\leq\lvert z\rvert$<br>או<br>$y\leq\lvert y\rvert\leq\lvert z\rvert$ | $\lvert z\rvert\leq\lvert Re(z)\rvert+\lvert Im(z)\rvert$<br>או<br>$\lvert z\rvert\leq\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ | $\lvert z\rvert=0\Leftrightarrow z=0\wedge 0\leq\lvert z\rvert$ | $\lvert z_1\cdot z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$ |
| $\lvert z_1+z_2\rvert\leq\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$ | $\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$ | $\lvert az\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert z\rvert, a\in R, z\in C$ | $\overline{(z^{-1})}=(\overline{z})^{-1}$ |
| $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{(\overline{z_1})}{(\overline{z_2})}$ | $\lvert -z^{-1}\rvert=\lvert z^{-1}\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$ | $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ | $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ | $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ | $r=\sqrt{x^2+y^2}$ |
| הצגה אלגברית:<br>$z=x+iy$ | הצגה קוטבית:<br>$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ | כאשר ה-<br>x<br>קטן מי אפס מוסיפים<br>π | θ<br>לא יכולה להיות גדולה יותר<br>מ<br>2π |
| $z=re^{i\theta}$ הצגת אוולר | $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ | $\overline{z}=\overline{r\cdot e^{i\theta}}=r\cdot e^{-i\theta}$ | $z^{-1}=(re^{i\theta})^{-1}=\frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}$ |
| $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ | $z^n=r^n\cdot e^{in\theta}$ | $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ | |

שורש של מספר מרוכב:

| | | |
|---|---|---|
| ההפרש בין פתרון 1 לשני הוא $\frac{2\pi}{n}$ | $z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},k=0,1,\dots,n-1$ | $z^n=z_0=r\cdot e^{i\theta}$ |

וקטורים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a(b\underline{u})=(ab)\underline{u}$ <br> $a,b\in R$ | $\lambda\cdot\underline{v}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1\\ \lambda\cdot a_2\\ \dots\\ \lambda\cdot a_n\end{pmatrix},\lambda\in R$ | $\underline{v}+\underline{u}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ a_2+b_2\\ \dots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}$ | $\underline{v}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix},\underline{u}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}$ |
| $\underline{v}\cdot\underline{u}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\dots+a_n\cdot b_n$ | | $a(\underline{u}+\underline{v})=a\underline{u}+a\underline{v}$ <br> $a\in R$ | $(a+b)\underline{u}=a\underline{u}+b\underline{u}$ <br> $a,b\in R$ |
| $\underline{v}=0\Leftrightarrow 0=\Vert\underline{v}\Vert\wedge\Vert\underline{v}\Vert\geq 0$ | $\Vert\underline{v}\Vert=\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$ | | $(\underline{u}+\underline{v})\cdot\underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{w}+\underline{v}\cdot\underline{w}$ |
| | $\Vert\underline{v}+\underline{u}\Vert\leq\Vert\underline{v}\Vert+\Vert\underline{u}\Vert$ | $\lvert\underline{u}\cdot\underline{v}\rvert\leq\Vert\underline{v}\Vert\cdot\Vert\underline{u}\Vert$ | $\Vert\lambda\cdot\underline{v}\Vert=\lvert\lambda\rvert\cdot\Vert\underline{v}\Vert$ |
| אם הווקטורים באותו כיוון או שאחד מהם = 0 $\Vert\underline{v}+\underline{u}\Vert=\Vert\underline{v}\Vert+\Vert\underline{u}\Vert$ | | אם הווקטור האחד הוא מכפלה סקלרית של השני $\lvert\underline{u}\cdot\underline{v}\rvert=\Vert\underline{v}\Vert\cdot\Vert\underline{u}\Vert$ | |
| $\underline{v}\cdot\underline{u}=\Vert\underline{v}\Vert\cdot\Vert\underline{u}\Vert\cdot\cos\theta$ <br> $\Vert\underline{v}+\underline{u}\Vert^2=$ <br> $\Vert\underline{v}\Vert^2+2\underline{v}\cdot\underline{u}+\Vert\underline{u}\Vert^2$ | המרה של וקטור לווקטור היחידה $\frac{\underline{v}}{\Vert\underline{v}\Vert}=\begin{matrix}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}}\\ \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}}\\ \dots\\ \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}}\end{matrix}$ | | וקטור היחידה $\Vert\underline{e}\Vert=1$ |
| אם $\Vert\underline{v}+\underline{u}\Vert^2=\Vert\underline{v}\Vert^2+\Vert\underline{u}\Vert^2$ הווקטורים מאונכים זה לזה | וקטור ה-0 אורטוגונלי לכול הווקטורים שהם לא וקטור ה-0 | | אורטוגונלים: $\underline{v}\cdot\underline{u}=0$ |
| $0\leq d(\underline{v},\underline{u})\wedge d(\underline{v},\underline{u})=0\Leftrightarrow\underline{u}=\underline{v}$ | | $d(\underline{v},\underline{u})=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\dots+(a_n-b_n)^2}$ | |
| $d(\underline{u},\underline{w})\leq d(\underline{u},\underline{v})+d(\underline{v},\underline{w})$ | | $d(\underline{v},\underline{u})\geq 0$ | $d(\underline{v},\underline{u})=d(\underline{u},\underline{v})=\Vert\underline{v}-\underline{u}\Vert$ |
| ישר הניקבע ע"י וקטור שונה מ-0 הוא הישר היחיד העובד דרך הווקטור והראשית | | וקטור <br> u <br> על הישר שקובע את <br> v <br> אם ורק אם <br> $\underline{u}=t\cdot\underline{v},t\in R$ | |

הצגה פרמטרית של ישרים ומישורים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ישר העובר דרך הראשית: | הצגה אלגברית: <br> $y=ax$ | הצגה פרמטרית: <br> $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ at\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}t$ | $l:p+t\cdot\underline{v}$ |
| המרה מאלגברית לפרמטרית: | $y=ax+b$ <br> $x=t,\ y=at+b$ | $l:\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ at+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}t$ | |

| | | |
|---|---|---|
| המרה מפרמטרית לאלגברית: | $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ | $x=a+tc\quad y=b+td$<br>$t=\frac{x-a}{c}\quad t=\frac{y-b}{d}$ -> $\frac{x-a}{c}=\frac{y-b}{d}$<br>ואז נקבל ביטוי מהצורה<br>$y=ax+b$ |
| מציאת משוואת ישר בצורה פרמטרית בהינתן 2 נקודות | $l:P+t(-P+Q)$ | |

בתלת מימד:

| | | |
|---|---|---|
| $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c\\d\\f\end{pmatrix}$ | מישור מוגדר ע"י 2 וקטורים שלא על אותו הישר | משוואת המישור העובר בראשית:<br>$\pi:t\cdot\underline{v}+s\cdot\underline{u}$<br>$ax+by+cz=0$ |

| | |
|---|---|
| המרה מפרמטרי לאלגברי: | המרה מאלגברי לפרמטרי: |
| $ax+by+cz=d$<br>$x=t\,;\,y=s$<br>$at+bs+cz=d$<br>$z=\frac{-at-bs+d}{c}$<br>$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\s\\\frac{-at}{c}-\frac{bs}{c}+\frac{d}{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{-a}{c}\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{-b}{c}\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{d}{c}\end{pmatrix}$ | $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$<br>$x=a_1t+b_1s+c_1$<br>$y=a_2t+b_2s+c_2$<br>$z=a_3t+b_3s+c_3$<br>נבודד את<br>t, s<br>ב-2 משוואת ונציב במשוואה ה-3<br>ונקבל ביטוי בסיגנון הזה<br>$ax+by+cz=d$ |

| |
|---|
| משוואת מישור על ידי 3 נקודות (יש לשים לב ש-3 הנקודות לא על אותו הישר)<br>S,Q,P<br>הם 3 הנקודות<br>t1, t2<br>הם 2 הפרמטרים |
| $\pi:P+t_1(Q-P)+t_2(S-P)$ או $\pi:S+t_1(P-S)+t_2(Q-S)$ או $\pi:Q+t_1(P-Q)+t_2(S-Q)$ |
| ואז נקבל משו בסגנון |
| $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}t_2$ |

נוסחאות הכפל המקוצר:

| | | |
|---|---|---|
| $(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)$ | $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ | $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ |
| $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ | | |
| $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ | | |
| נוסחת השורשים: | $ax^2+bx+c=0$<br>$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$ | |

מרחבים וקטורים:

| | | |
|---|---|---|
| שדה — F | $f \in F$ | שדה – קבוצה של איברים (רציונליים, מרוכבים וכו) |
| מרכב – E וקטורי | $(f_1, f_2, \dots, f_n) \in E$ | מרחב וקטורי – קבוצת אובייקטים המורכבים מאיברים השייכים לשדה |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| שייכות | לכל $v, u \in E$ | $u \oplus v \in E$ | חילופיות | לכל $v, u \in E$ | $u \oplus v = v \oplus u$ |
| אסוצאטיביות | לכל $v, u, w \in E$ | | $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ | | |
| איבר ה-0 | אייבר נטרלי לחיבור | | לכל $u, 0 \in E$ | $u \oplus 0 = u$ | |
| אייבר נגדי | לכל אובייקט במרחב דרוש שייהיה בין זוג אייבר נגדי | | | | $u \oplus -u = 0$ |

| | |
|---|---|
| חוקי חיבור מתתיחסים לחיבור בין 2 אובייקטים | חוקי כפל מתייחסים כפל בין אובייקט וסקלר הנלקח מהשדה |

| | | |
|---|---|---|
| לכל $u \in E, \lambda \in F$ | מתקיים $\lambda \otimes u \in E$ | דוגמה $5 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ |
| פילוג: | $\lambda, \mu \in F$ | $u, v \in E$ |
| $(\lambda + \mu) \otimes u = (\lambda \otimes u) \oplus (\mu \otimes u)$ | $\lambda \otimes (\mu \otimes u) = (\lambda \otimes \mu) \otimes u$ | $\lambda \otimes (u \oplus v) = (\lambda \otimes u) \oplus (\lambda \otimes v)$ |
| איבר יחיד | לכל $u \in E$ | מתקיים $1_F \otimes u = u$ |

| | | |
|---|---|---|
| דוגמה לשאלה | $R = E$<br>$Q = F$ | מרחב וקטורי מעל R<br>Q |

| | | | |
|---|---|---|---|
| אייבר נטרלי הוא יחיד | לכל אייבר יש אייבר נגדי | $v + v = v \rightarrow v = 0$ | לכל $a \cdot 0 = 0, a \in F$ |
| $(-a) \cdot \underline{u} = a \cdot (-\underline{u}) = -(a \cdot \underline{u})$ | $1 \cdot \underline{u} = -\underline{u}$ | $a \cdot \underline{u} = \underline{0} \Leftrightarrow a = \vee \underline{u} = \underline{0}$ | $0 \cdot \underline{u} = \underline{0}$ |
| $\underline{u} - (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} - \underline{v}) - \underline{w}$ | $\underline{u} + (-\underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$ | $-(\underline{u} + \underline{v}) = (-\underline{u}) + (-\underline{v})$ | $-(-\underline{u}) = \underline{u}$ |
| | $a(\underline{u} - \underline{v}) = a\,\underline{u} - a\,\underline{v}$ | $\underline{u} - \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{v}$ | $\underline{u} - (\underline{v} - \underline{w}) = (\underline{u} - \underline{v}) + \underline{w}$ |

תתי מרחבים:

כדי להוכיח שמרחב הוא תת מרחב של מרחב צריך שיתקימו 3 הסעיפים הבאים

- תת המרחב מכיל את אייבר ה-0
- סגירות לחיבור
- סגירות לכפל בסקלר

| | | |
|---|---|---|
| סגירות לחיבור | אם $\underline{w}1, \underline{w}2 \in W$ | אז $\underline{w}1 + \underline{w}2 \in W$ |
| סגירות לכפל בסקלר | אם $k \in F \wedge \underline{w} \in W$ | אז $k \cdot \underline{w} \in W$ |

טריגונומטריה:

| | | |
|---|---|---|
| $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ | $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ | $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin(\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$ | $\cos(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ | $\tan(\pi - \alpha) = \cot(\alpha)$ | $\cot(\pi - \alpha) = \tan(\alpha)$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ | $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ | $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ | $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$ |
| $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ | |

| | |
|---|---|
| $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ | $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ |
| $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ | $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$ |

| | |
|---|---|
| $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$ | $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ |
| $\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2-\cot(\alpha)}$ | $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$ |
| $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)$ | $\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$ |

קבוצות של מספרים:

| $N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R\subseteq C$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C | R | Q | Z | N |
| מרוכבים | ממשיים | רציונליים | שלמים | טבעיים |
| $5+8i,3-9i,\ldots$ | $\frac{5}{2},8,\sqrt{2},\pi,\ldots$ | $\frac{5}{2},\frac{8}{1},\frac{2}{13},\ldots$ | $\ldots,-1,0,1,\ldots$ | $1,2,\ldots$ |