Федеральное агентство связи
ордена Трудового Красного Знамени
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра радиотехнических систем

Практикум
по дисциплине

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Москва, 2016 г

Оглавление

1 Состав задания

В состав задания входит четыре задачи:

1. Задача на определение спектральной плотности мощности случайного процесса на выходе линейной системы $S_{\eta}\left(\omega\right)$.
2. Задача на обнаружение полностью детерминированного сигнала в наблюдаемой выборке. Решается по трем критериям – идеального наблюдателя, Байеса и Неймана-Пирсона.
3. Задача на обнаружение полностью детерминированного сигнала в наблюдаемой выборке с помощью согласованного фильтра.
4. Задача на оценку неэнергетического параметра сигнала (его задержки) оптимальной по критерию максимума функции правдоподобия.

2 Правила оформления

1.Титульный лист должен быть оформлен по установленной МТУСИ форме.
2. К каждой задаче обязательно писать название и техническое задание по варианту.
3. Допускается оформление как в письменном, так и в печатном виде на листах формата А4.
4. При оформлении формул не допускается копирование программного кода из системы Mathcad. Формульные вычисления требуется оформлять в Microsoft Equation или MathType.

3 Прохождение случайных процессов через линейные системы

3.1 Задание

Случайный процесс $\xi(t)$ с ковариационной функцией $C_\xi(\tau)$ проходит через линейную систему с комплексной передаточной функцией $H(j\omega)$. На выходе линейной системы наблюдается случайный процесс $\eta(t)$. Требуется исходя из варианта определить спектральную плотность мощности (СПМ) сигнала на выходе линейной системы $S_\eta(\omega)$.

Из теории анализа случайных процессов известна взаимосвязь СПМ на входе линейной системы и СПМ на её выходе:

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2, \qquad (1)$$

где $S_\xi(\omega)$- СПМ на входе линейной системы (СМП случайного процесса $\xi(t)$).

СПМ на входе случайного процесса на входе линейной системы находится как преобразование Фурье ковариационной функции:

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (2)$$

Передаточная функция $H(j\omega)$ находится по принципиальной схеме линейной системы методом комплексных амплитуд.

3.2 Варианты

Виды ковариационной функции представлены в таблице *1*, варианты задания - в таблице 2. Вариант выбирается по номеру в списке журнала группы. **Номер принципиальной схемы линейной системы соответствует варианту и выдаётся преподавателем**, номер вида ковариационной функции задан для каждого варианта отдельно (см. таблицу 2).

Таблица 1

Вариант	$C_\xi(\tau)$
1	$\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
2	$e^{-\alpha\tau^2}, \alpha = const$
3	$e^{-\beta\|\tau\|}, \beta = const$

Таблица 2

Вариант	Номер ковариационной функции
1	1
2	3
3	1
4	1
5	1
6	1
7	2

8	3
9	1
10	3
11	3
12	2
13	3
14	3
15	2
16	3
17	2
18	2
19	2
20	2
21	3
22	2
23	3
24	2
25	1
26	3
27	1
28	3
29	1
30	1

4 Обнаружение детерминированного сигнала на фоне аддитивного белого гауссовского шума

4.1 Теоретические сведения

Имеются две гипотезы H_0, утверждающая, что в полученная выборка содержит только шум, и H_1, говорящая о наличии сигнала в приятной выборке:

$$H_0 : y_i = n_i \ ,$$
$$H_1 : y_i = x_i + n_i \ , i = 1 \div N$$

где x_i - отсчёт полезного сигнал, n_i - белый гауссовский шум с нулевым средним $(m=0)$ и дисперсией $\sigma_ш^2$, N - длина полученной выборки y_N.

Исходя из критерия минимума среднего риска решение о наличии или отсутствии сигнала в наблюдаемой выборке принимается на основе сравнения отношения правдоподобия (логарифма отношения правдоподобия) с некоторым порогом С.
Запишем логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln\left[\frac{\omega(y_N / H_1)}{\omega(y_N / H_1)}\right] \geq< \ln C, \tag{3}$$

где $\omega(\mathbf{y_N} / H_1)$ и $\omega(\mathbf{y_N} / H_0)$ - условная функция плотности вероятности наблюдаемой выбоки при условии гипотез H_1 и H_0 соответственно. При выполнении условия «$\geq$» принимается решение в пользу гипотезы H_1, при «$<$» - в пользу гипотезы H_0.

Запишем $\omega(\mathbf{y_N} / H_1)$ с учётом независимости отсчётов принятой выборки и линейного преобразования функции плотности вероятности (ФПВ) $\omega(\mathbf{y_N} / H_1)$ реализации выборки $y_i = x_i + n_i$ в ФПВ шума $w_ш(\dot{y}_i - \dot{u}_i(s))$ выборки $n_i = y_i - x_i$:

$$\omega(\mathbf{y_N} / H_1) = \prod_{i=1}^{N} \omega(y_i / H_1) = \prod_{i=1}^{N} w_ш(y_i - x_i) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш} e^{\frac{-(y_i - x_i)^2}{2\sigma_ш^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш}\right)^N e^{\frac{-\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i)^2}{2\sigma_ш^2}}.$$

$\omega(\mathbf{y_N} / H_0)$ - представляет собой ФПВ шума, поэтому:

$$\omega(\mathbf{y_N} / H_0) = \prod_{i=1}^{N} \omega(y_i / H_0) = \prod_{i=1}^{N} w_ш(y_i - x_i) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш} e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_ш^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш}\right)^N e^{\frac{-\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{2\sigma_ш^2}}.$$

Перепишем выражение (3):

$$\ln\left[\frac{\omega(y_N / H_1)}{\omega(y_N / H_1)}\right] = \ln\left[e^{\frac{-\sum_{i=1}^{N}\left[(y_i - x_i)^2 - y_i^2\right]}{2\sigma_ш^2}}\right] = \ln\left[e^{\frac{-\sum_{i=1}^{N}\left[2y_i x_i - x_i^2\right]}{2\sigma_ш^2}}\right] = \frac{-\sum_{i=1}^{N}\left[2y_i x_i - x_i^2\right]}{2\sigma_ш^2} \geq< \ln C,$$

Так как $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = E$ - энергия сигнала, то окончательно получим:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i \geq< \sigma_{ш}^2 \ln C + \frac{E}{2} \ . \quad (4)$$

Обозначим $\lambda = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i$ и назовём λ статистикой, введём новый порог, равный $C_1 = \sigma_{ш}^2 \ln C + \frac{E}{2}$. Новый порог является некоторым математическим преобразованием над абсолютным порогом.

С учётом введённых обозначений:

$$\lambda \geq< C_1 . \quad (5)$$

В домашнем задании студенту требуется рассчитать на основании исходных данных по варианту статистику λ, порог C, порог C_1 и на основании правила (5) принять гипотезу H_1 или H_0.

Расчёт абсолютного порога предполагается по следующим критериям:

4.2 Критерий идеального наблюдателя

При использовании критерия идеального наблюдателя порог вычисляется по следующей формуле:

$$C = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \ , \ C_1 = \sigma_{ш}^2 \ln\left[\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \quad (6)$$

где $P(H_0), P(H_1)$ - априорные вероятности справедливости гипотезы H_0 и H_1 соответственно.

4.3 Критерий Байеса

В данном случае

$$C = \frac{(\pi_{01} - \pi_{00}) P(H_0)}{(\pi_{10} - \pi_{11}) P(H_1)} \ , \ C_1 = \sigma_{ш}^2 \ln\left[\frac{(\pi_{01} - \pi_{00}) P(H_0)}{(\pi_{10} - \pi_{11}) P(H_1)}\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \quad (7)$$

где π - показатель качества, π_{01} - показатель качества при ложной тревоге, π_{00} - при верном принятии гипотезы H_0 (принятие решения об отсутствии сигнала в принятой выборке), π_{10} - при пропуске цели, π_{11} - при верном принятии гипотезы H_1 (принятие решения о наличии сигнала в принятой выборке).

4.4 Критерий Неймана-Пирсона

Остановимся подробнее на нахождении порога по критерию Неймана-Пирсона.
Для сигнала с известной начальной фазой функция плотности вероятности (ФПВ) статистики является гауссовой и имеет следующий вид:

$\omega(\lambda / H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi E \sigma_{ш}}} e^{\frac{-\lambda^2}{2E\sigma_{ш}^2}}$ - ФПВ статистики при условии гипотезы H_0.

$\omega\left(\lambda / H_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi E}\sigma_ш} e^{\frac{-(\lambda - E)^2}{2E\sigma_ш^2}}$ - ФПВ статистики при условии гипотезы H_1. $\sigma_\lambda^2 = E\sigma_ш^2$ и $m_\lambda = E$ - соответственно дисперсия и математическое ожидание статистики λ (E - энергия сигнала),

Как известно из критерия Неймана-Пирсона вероятность ложной тревоги определяется как:

$$P_{лтр} = \int_{C_{НП}}^{\infty} \omega\left(\lambda / H_0\right) d\lambda = \int_{C_{НП}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi E}\sigma_ш} e^{\frac{-\lambda^2}{2E\sigma_ш^2}} d\lambda \ , \tag{8}$$

где $C_{НП}$ - порог по Нейману-Пирсону.

Выразим статистику λ в долях энергии сигнала $\lambda = \nu E$ и учтём, что $\sigma_ш^2 = N_0 / 2$, N_0 - спектральная плотность мощности (СПМ) шума. Выполнив подстановку в (8), придём к интегралу следующего вида:

$$P_{лтр} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E}{N_0}} \int_{C_{НП}/E}^{\infty} e^{\frac{-\nu^2 E}{N_0}} d\nu \ . \tag{9}$$

Решение интеграла (9) удобнее всего искать, приведя его к виду дополнительной функции ошибки:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt \ .$$

Для этого проведём ещё одну замену: $t = \nu \sqrt{\frac{E}{N_0}}$. После замены:

$$P_{лтр} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{C_{НП}}{E}\sqrt{\frac{E}{N_0}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{C_{НП}}{E}\sqrt{\frac{E}{N_0}}}^{\infty} e^{-t^2} dt \tag{10}$$

Определим относительный порог через функцию обратную дополнительной функции ошибок: $ercfinv(x) = erfc^{-1}(x)$:

$$\frac{C_{НП}}{E} \sqrt{\frac{E}{N_0}} = erfcinv\left(2P_{лтр}\right). \tag{11}$$

Зная отношение сигнал-шум E / N_0 и энергию принимаемого сигнала, можно вычислить порог:

$$C_{НП} = \frac{E \cdot erfcinv\left(2P_{лтр}\right)}{\sqrt{\frac{E}{N_0}}} \ . \tag{12}$$

$C_{НП}$ требуется подставить в (4) и принять решение об отсутствии или наличии сигнала в принятой выборке.

Так как в задании требуется построение графиков зависимости вероятности пропуска цели и правильного обнаружения от отношения сигнал-шум, то запишем выражение для определения вероятности пропуска цели исходя их критерия Неймана-Пирсона:

$$P_{пц} = \int_{-\infty}^{C_{НП}} \omega(\lambda / H_1) d\lambda = \int_{-\infty}^{C_{НП}} \frac{1}{\sqrt{2\pi E}\sigma_ш} e^{\frac{-(\lambda - E)^2}{2E\sigma_ш^2}} d\lambda \ . \tag{13}$$

Проведя с выражением (13) все те же преобразования, что и с выражением (8), получим следующее математическое представление вероятности пропуска цели через дополнительную функцию ошибок:

$$P_{пц} = 1 - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\left(\frac{C_{НП}}{E}-1\right)\sqrt{\frac{E}{N_0}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{2} erfc\left[\left(\frac{C_{НП}}{E} - 1\right)\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right]. \tag{14}$$

Правильное обнаружение и пропуск цели составляют полную группу событий. следовательно:

$$P_{обн} = 1 - P_{пц} \ . \tag{15}$$

При решении задачи предполагается нахождение порога $C_1 = C_{НП}$, вероятностей правильного обнаружения и пропуска цели для конкретного значения ОСШ. Статистику λ следует сравнить с порогом $C_1 = C_{НП}$ без каких-либо преобразований:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \geq< C_1 = C_{НП} \tag{16}$$

Также в задании требуется построить графики зависимости порога $C_1 = C_{НП}$, $P_{пц}$ и $P_{обн}$ от ОСШ $\frac{E}{N_0}$. Вероятности следует выводить в логарифмическом масштабе (10^0, 10^{-1}, 10^{-2},…), отношение сигнал-шум в дБ.

Пример программы на Matlab, рассчитывающей порог, вероятность пропуска цели, вероятность правильного обнаружения и строящий необходимые графики разобран ниже.

4.5 Пример программы по расчёту характеристик обнаружителя Неймана-Пирсона

```
x=[-1 1 1 1  -1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1]; %полезный сигнал
y=[-1.1249 2.4790 0.1392 1.7847 -0.6914 0.7661 -0.0570 0.7159 0.9133 -0.4694 -0.8078 0.1777 -1.0942 -0.6638...
    0.0953 0.7117 -0.6499 -0.8359 2.0360 1.4245 1.9594 0.6842 -0.5714 -0.0360 2.8779 1.9407 -0.2127 0.1241 -0.6801 -1.5583 -1.3114]; %принятая выборка
E=sum(x.^2); %энергия полезного сигнала
%Критерий Неймана-Пирсона
Pltr=0.001;%вероятность ложной тревоги
EsN0Db=1:1:30;%диапазон отношения сигнал-шум в дБ
EsN0=10.^(EsN0Db/10);%перевод отношения сигнал-шум из дБ в "разы"
Cnp_otnos=erfcinv(2*Pltr);%нахождение относительного порога по Нейману-Пирсону
Cnp=E*erfcinv(2*Pltr)./sqrt(EsN0);%нахождение порога C1 по Нейману-Пирсону
Ppc=1-0.5*erfc(Cnp_otnos-sqrt(EsN0));%нахождение вероятности пропуска цели
Pobn=1-Ppc;%нахождение вероятности правильного обнаружения
```

```
EsN01Db=15;%ввод конкретного значения отношения сигнал-шум (ОСШ) для расчёта
EsN01=10.^(EsN01Db/10);% перевод конкретного ОСШ из дБ в разы
Cnp1=E*erfcinv(2*Pltr)./sqrt(EsN01); %нахождение абсолютного порога для ОСШ=15 дБ
Ppc1=1-0.5*erfc(Cnp_otnos-sqrt(EsN01)); %нахождение вероятности пропуска цели для
ОСШ=15 дБ
Pobn1=1-Ppc1;%определение вероятности правильного обнаружения для ОСШ=15ДБ
%Построениие графика зависимости вероятности пропуска цели и вероятности
%правильного обнаружения от ОСШ
figure(1)
semilogy(EsN0Db,Ppc,EsN0Db,Pobn,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('ОСШ')
ylabel('P_п_ц, P_о_б_н')
legend('вероятность пропуска цели','вероятность правильного обнаружения')
%Построение графика зависимости абсолютного порога по Нейману-Пирсону от
%ОСШ
figure(2)
plot(EsN0Db,Cnp,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('ОСШ')
ylabel('C_н_п')
```

Графики иллюстрирующие необходимые зависимости для выполнения задания продемонстрированы на рисунках 1, 2.

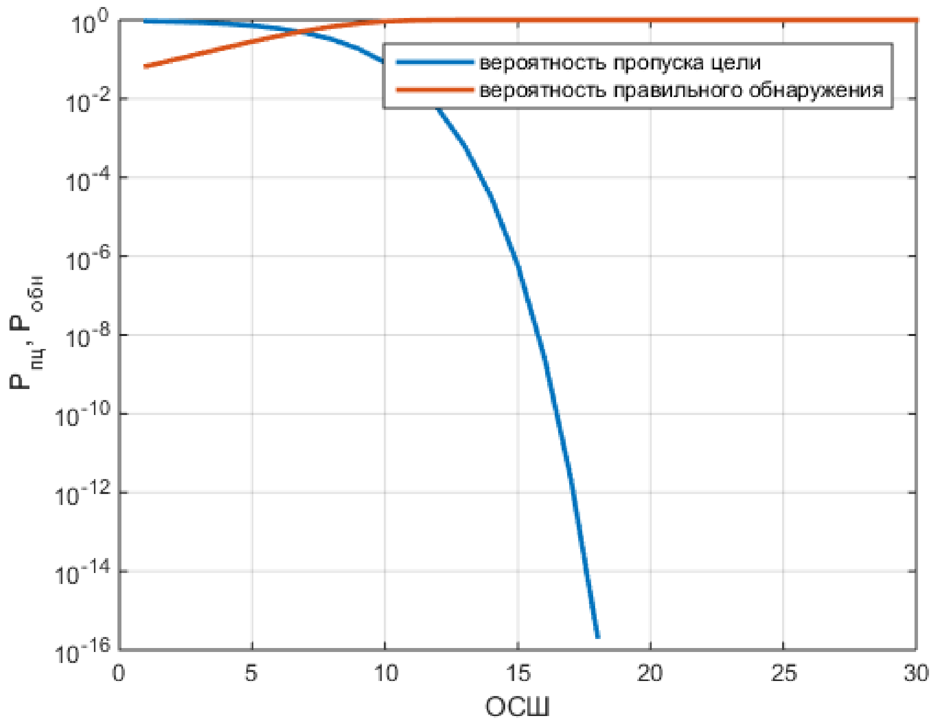

Рисунок 1. Зависимость вероятности пропуска цели и вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум

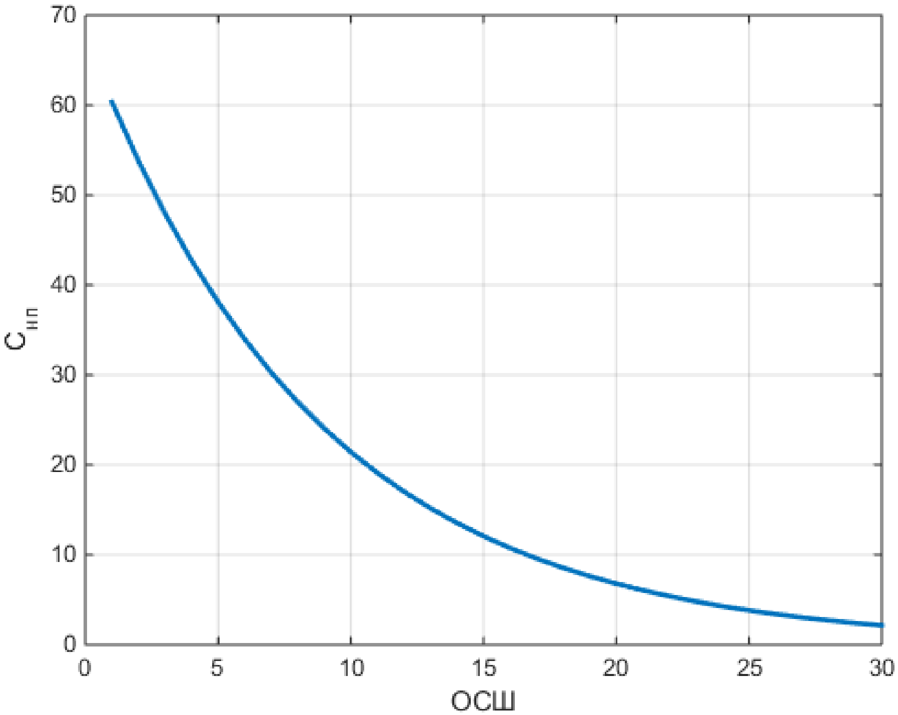

Рисунок 2.Зависимость абсолютного порога Неймана-Пирсона от отношения сигнал-шум

4.6 Обнаружение с помощью согласованного фильтра

В данном задании предполагается принятие решения о наличии или отсутствии сигнала в принятой выборке по отклику согласованного фильтра (СФ). Пример программы расчёта отклика согласованного фильтра приведён ниже. График отклика СФ показан на рисунке 3. В данном случае отклик присутствует, поэтому принимаем решение о наличии сигнала в принятой выборке.

```
x=[-1 1 1 1  -1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1];%полезный сигнал
y=[-1.1249 2.4790 0.1392 1.7847 -0.6914 0.7661 -0.0570 0.7159 0.9133 -0.4694 -0.8078 0.1777 -1.0942 -0.6638...
    0.0953 0.7117 -0.6499 -0.8359 2.0360 1.4245 1.9594 0.6842 -0.5714 -0.0360 2.8779 1.9407 -0.2127 0.1241 -0.6801 -1.5583 -1.3114];%принятая выборка
%Согласованный фильтр (СФ)
h=wrev(x);%получение импульсной характеристики для СФ
ysf=conv(y,h);%нахождение выхода СФ, путем вычисления свертки наблюдаемой выборки и импульсной характеристики согласованного фильтра
%Построение графика отклика СФ
figure(1)
plot(1:length(ysf),ysf)
grid on
xlabel('t')
ylabel('y_с_ф')
```

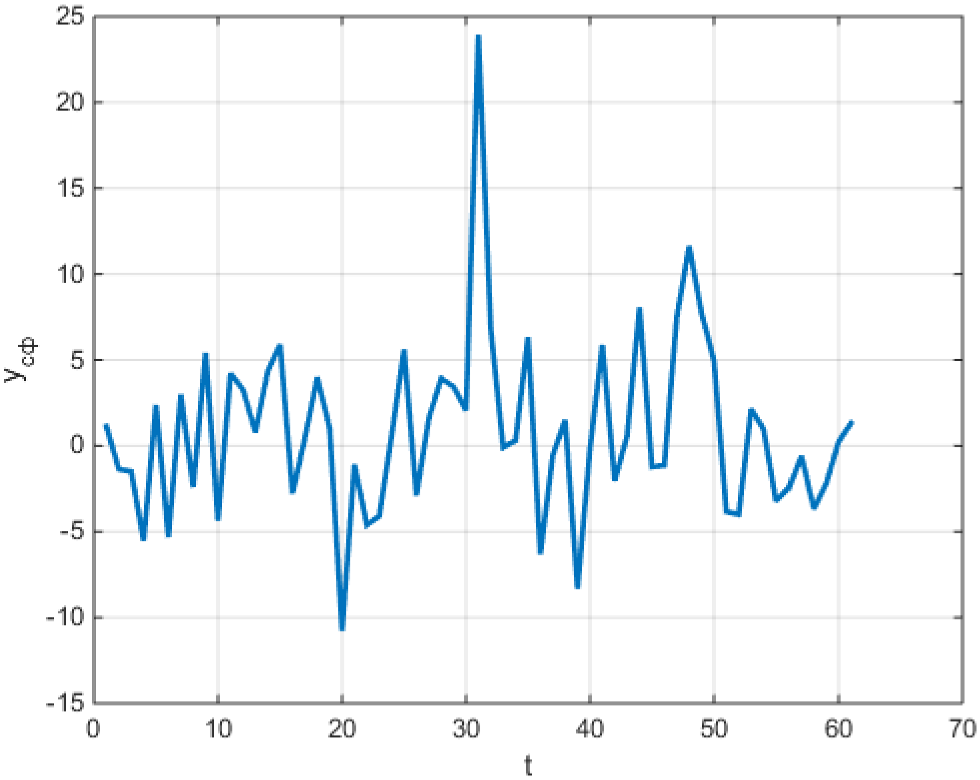

Рисунок 3. Отклик согласованного фильтра

4.7 Варианты

Дисперсия $\sigma_ш^2$ предполагается единичной для всех вариантов. Также конкретное ОСШ $E/N_0 = 15$ дБ и диапазон ОСШ для построения графиков $E/N_0 = 3:30$ дБ с шагом 1 тоже одинаковы для всех вариантов.
Номер варианта выбирается в соответствии со списком по журналу группы. Варианты представлены в таблице *3*.

Таблица 3

Номер варианта	Номер последовательностей полезного сигнала и принимаемой выборки	$P_{лтр}$	$P(H_1)$	$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{01} & \pi_{00} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix}$
1	1	0.001	0.75	$\begin{pmatrix} 2.1 & 0.15 \\ 3 & 0.15 \end{pmatrix}$
2	30	0.0007	0.2	$\begin{pmatrix} 7 & 0.05 \\ 4 & 0.04 \end{pmatrix}$
3	2	0.002	0.9	$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 3.005 & 0 \end{pmatrix}$
4	16	0.001	0.32	$\begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix}$
5	18	0.003	0.4	$\begin{pmatrix} 1.57 & 0.06 \\ 2.5 & 0.07 \end{pmatrix}$
6	25	0.0045	0.15	$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 1.57 & 0 \end{pmatrix}$
7	5	0.0009	0.815	$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$
8	6	0.0025	0.72	$\begin{pmatrix} 5 & 0.2 \\ 10 & 0.2 \end{pmatrix}$
9	7	0.0005	0.69	$\begin{pmatrix} 5.512 & 0.034 \\ 11.08 & 0.034 \end{pmatrix}$
10	21	0.006	0.21	$\begin{pmatrix} 1.15 & 0.01 \\ 2.33 & 0.01 \end{pmatrix}$
11	29	0.0009	0.1	$\begin{pmatrix} 2 & 0.08 \\ 1 & 0.08 \end{pmatrix}$
12	3	0.0035	0.85	$\begin{pmatrix} 0.55 & 0 \\ 1.74 & 0 \end{pmatrix}$

13	15	0.0015	0.95	$\begin{pmatrix} 3 & 0.1 \\ 6 & 0.1 \end{pmatrix}$
14	10	0.006	0.81	$\begin{pmatrix} 4.12 & 0.01 \\ 3.1 & 0.01 \end{pmatrix}$
15	4	0.005	0.87	$\begin{pmatrix} 4.35 & 0.07 \\ 4.56 & 0.07 \end{pmatrix}$
16	12	0.001	0.76	$\begin{pmatrix} 4.67 & 0 \\ 9.61 & 0 \end{pmatrix}$
17	17	0.002	0.12	$\begin{pmatrix} 1.15 & 0.01 \\ 2.30 & 0.01 \end{pmatrix}$
18	19	0.004	0.34	$\begin{pmatrix} 2.3 & 0.012 \\ 4.6 & 0.012 \end{pmatrix}$
19	8	0.0007	0.89	$\begin{pmatrix} 2.3 & 0.012 \\ 4.6 & 0.012 \end{pmatrix}$
20	9	0.0055	0.86	$\begin{pmatrix} 6.5 & 0.1 \\ 13.1 & 0.1 \end{pmatrix}$
21	22	0.0015	0.14	$\begin{pmatrix} 4 & 0.03 \\ 6 & 0.03 \end{pmatrix}$
22	20	0.005	0.22	$\begin{pmatrix} 10 & 0.04 \\ 12 & 0.04 \end{pmatrix}$
23	26	0.0055	0.17	$\begin{pmatrix} 4.6 & 0.1 \\ 9.2 & 0.1 \end{pmatrix}$
24	11	0.004	0.65	$\begin{pmatrix} 2.2 & 0.1 \\ 3.4 & 0.1 \end{pmatrix}$
25	28	0.0009	0.13	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{pmatrix}$
26	23	0.0025	0.37	$\begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 3.6 & 0 \end{pmatrix}$
27	13	0.003	0.93	$\begin{pmatrix} 2.1 & 0.1 \\ 6.3 & 0.3 \end{pmatrix}$
28	24	0.0035	0.26	$\begin{pmatrix} 3.5 & 0.1 \\ 7 & 0.1 \end{pmatrix}$
29	14	0.006	0.88	$\begin{pmatrix} 4 & 0.1 \\ 8 & 0.1 \end{pmatrix}$
30	27	0.001	0.11	$\begin{pmatrix} 6.8 & 0.04 \\ 7.1 & 0.05 \end{pmatrix}$

Последовательности полезного сигнала и принятой выборки

1. $\mathbf{x_N} = [-1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.2192 0.1202 0.6792 -1.7844 -1.3650 -0.8827 1.1743 -1.2157 -1.1526 1.0337 1.4583 2.2816 -0.3799 -1.2867 1.5980 -1.2455 -0.7807 -1.3472 -0.7136 0.7629 0.3804 0.2798 1.0407 -1.6590 -1.6305 -0.3904 1.7823 3.4366 1.3024 1.0583 0.4259$]$.

2. $\mathbf{x_N} = [\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ \ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.1539 0.7248 -0.7589 -0.2453 0.7081 -0.5416 0.7553 1.9315 -0.1747 -1.8148 0.4658 1.2426 -1.1006 -2.6250 -2.5144 2.0262 0.2419 3.0783 -3.2220 1.4488 1.0006 -1.7562 -0.5957 0.2061 1.8598 1.0669 -0.6394 -3.4247 -1.2838 0.1458 1.1812$]$.

3. $\mathbf{x_N} = [-1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.6394 0.8851 -1.3068 -0.0127 0.7615 0.5160 0.6727 1.4755 0.8700 -1.5944 0.5562 -0.3225 -1.8595 -0.4130 0.4840 -0.0851 0.2928 -1.3017 -2.2004 0.9806 -0.6596 0.0368 2.1139 -2.5861 -1.3918 -0.4847 -1.3446 -0.3239 0.4252 -1.7407 -0.1850$]$.

4. $\mathbf{x_N} = [1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$1.6298 -1.0792 2.3769 -0.4082 -0.8588 0.2897 0.5051 -1.6248 0.0664 -1.2787 0.7995 1.1367 0.1167 -0.9175 0.3961 0.6313 -1.8382 -1.2825 2.5699 2.4075 2.1469 -0.2127 -2.2781 0.4154 -1.6194 -0.4647 1.4830 -0.8915 0.6597 -1.9258 1.0053$]$.

5. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1]$,

$\mathbf{y_N} = [$0.3393 1.3276 2.5081 -1.8889 0.0407 -1.4927 -0.5589 -1.2048 0.0222 -2.5729 0.6297 -1.2211 -1.5352 -1.2620 -0.0954 -0.4508 -3.1746 -0.8554 1.6690 0.1512 -1.0571 1.2918 0.3854 0.9864 1.4121 0.0629 -0.1648 0.0945 1.3212 -0.9849 -2.1645$]$.

6. $\mathbf{x_N} = [-1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-2.9201 1.6254 -0.2470 1.2135 0.2298 0.9929 -0.9068 -0.0647 1.6635 -1.3502 0.6199 0.9492 -1.8127 -1.4384 -0.1414 -0.8048 -0.1111 1.0692 1.4868 -2.6656 0.5841 -1.0842 1.0893 0.4561 -0.7805 -1.1149 -0.9314 -0.2485 0.3106 1.4508 -2.5650$]$.

7. $\mathbf{x_N} = [-1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ \ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-2.4614 -2.2443 0.8449 -0.6149 1.2461 1.7393 -3.0676 -2.1546 0.8928 -0.7129 0.5401 2.0910 -1.1639 0.9328 -2.0016 -1.5557 -0.3516 -0.6358 0.5478 1.7834 0.2372 0.0772 -1.0348 0.4960 -0.2240 -0.8815 -0.0405 -1.3409 -1.1733 1.6163 1.8639$]$.

8. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.1821 1.5838 0.4200 -1.5614 -2.5559 2.1002 -0.8249 0.0036 0.5110 -2.1372 1.6430 0.9872 1.9143 2.1077 -0.1795 0.1824 -1.1265 1.2641 2.1585 0.2266 1.3206 1.4145 1.2118 -0.3868 0.4722 0.2416 -1.1576 -0.3736 -0.1292 -2.5685 -0.8443$]$.

9. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [-1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -11 -1 1 1 1 -1 -1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [-2.3157 1.6271 -2.3313 -1.1308 -2.8269 1.5359 -0.3071 0.3125 1.3176 -0.8372 2.1591 -0.8716 2.0395 0.8832 0.3517 -1.0380 0.8007 -0.1183 0.9439 -1.8412 0.8452 0.1886 -1.4149 -1.6586 1.9840 -0.8988 0.6373 0.2612 -0.4798 -0.8466 -1.3170].

10. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [-1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [-1.2676 -0.8134 -0.0491 -1.7905 -1.4895 3.9745 0.3774 0.9203 1.9611 -1.5578 -1.1066 -1.2152 1.4735 0.3656 -2.6378 3.0237 -0.2222 0.4511 0.8740 1.2996 -0.7038 2.2008 0.0902 -1.3587 0.8701 1.7337 1.1203 0.1363 0.3132 1.4717 1.2883].

11. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [1.3710 0.0966 -1.3982 -1.0855 1.3733 -1.4739 -0.0537 -0.1818 2.5890 1.5260 -3.4652 -1.8525 -0.4883 1.2578 2.9624 0.4063 1.4968 1.0828 -2.5485 0.8632 1.1340 -0.5460 -0.5667 -0.8970 -1.5703 1.4931 -1.7075 -2.3480 -2.7543 -1.3638 0.3729].

12. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [0.7389 -1.1847 -1.1017 -1.8870 1.7414 2.3922 1.4739 -0.4961 -1.8225 1.2010 -2.0071 0.3868 0.3410 -1.8332 -0.6218 -0.1153 1.6672 -0.2047 2.0375 0.9796 1.6190 2.8031 -0.9470 0.8221 0.7725 -3.5088 -1.4566 3.4304 0.5285 -1.5603 -2.2265].

13. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [2.3037 -1.1258 -1.5969 -0.5206 -0.3282 1.0228 -2.1778 0.6654 -2.8295 1.4300 0.8260 0.6312 -2.3594 1.9705 1.1436 1.0826 -0.2833 2.1935 -2.0711 2.3189 -0.2100 -0.0741 0.3274 1.7365 -0.0700 -0.6653 1.4119 -0.8459 1.5546 -0.1728 0.0076].

14. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [1.3023 -0.5842 1.0430 -1.9489 -0.4584 0.1789 -0.0719 -0.0741 -0.1304 -0.0189 -2.7588 0.8519 1.2519 -1.6104 1.7610 -0.7456 0.8472 -1.5574 -0.3230 1.8493 1.4693 -1.2398 1.9210 -1.9069 1.1444 2.3964 -1.1897 -1.8438 0.9434 0.7531 -0.5584].

15. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [-0.8545 2.7998 -1.8784 -0.3523 0.0496 0.3231 0.4826 1.0243 0.8376 0.3943 1.2717 -0.6414 -1.3523 -0.8676 1.6736 0.9924 -0.2897 -1.4625 -1.5279 0.6542 -0.4354 -1.8015 -2.8529 -0.9468 -1.4364 -0.7200 -0.9154 1.7291 -0.0992 -0.3256 -2.5246].

16. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [-1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 -1],

$\mathbf{y}_\mathbf{N} =$ [0.0107 0.1243 1.7794 -0.2395 0.8580 -0.8784 -0.7619 0.8628 0.6483 1.0581 -0.6332 1.0180 0.1719 -0.0475 1.1001 0.4555 -0.6965 1.6891 1.4370 -2.2511 0.3565 -0.8502 -0.2996 -0.6342 1.6245 1.2411 0.5553 0.7034 0.4582 0.6840 0.2513 -0.1785 0.5077 -0.3099].

17. $\mathbf{x}_\mathbf{N} =$ [1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 1],

$\mathbf{y_N} = [0.2590\ \ -0.8718\ \ -0.7879\ \ -0.3443\ \ 0.6476\ \ 2.0541\ \ 0.7989\ \ -1.0711\ \ -0.2052\ \ -0.5544\ \ -0.2929\ \ 1.1802$
$0.3774\ \ 0.9916\ \ 0.6035\ \ -0.7929\ \ 0.9308\ \ -1.3504\ \ 0.7998\ \ 0.5996\ \ 1.1004\ \ -1.4197\ \ -0.2036\ \ 0.0179$
$0.1004\ \ 0.8764\ \ 0.7007\ \ 0.6520\ \ 0.1785\ \ 1.6760\ \ -0.3251].$

18. $\mathbf{x_N} = [1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [0.6494\ \ 0.5985\ \ -0.1925\ \ -1.9808\ \ 0.3629\ \ 0.7039\ \ -0.7526\ \ -0.0169\ \ -0.4417\ \ 1.7013\ \ -0.0306\ \ 0.2039$
$-1.0478\ \ -0.7354\ \ -1.3566\ \ 0.7286\ \ 0.6072\ \ -0.8283\ \ 2.8876\ \ 0.9191\ \ 0.4058\ \ 1.9162\ \ -2.4557\ \ -0.0911$
$-0.0247\ \ 0.1999\ \ -1.0383\ \ 0.5294\ \ -2.2171\ \ 0.1074\ \ 0.4389].$

19. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [0.8768\ \ 0.1944\ \ -0.4149\ \ 0.3585\ \ 0.0362\ \ -0.3646\ \ 1.7710\ \ 0.2213\ \ 2.7304\ \ -0.2962\ \ 0.5643\ \ 1.5826$
$2.7292\ \ 0.3036\ \ -0.7903\ \ 0.8034\ \ -1.3199\ \ -0.2738\ \ 0.2719\ \ 1.4896\ \ 1.4371\ \ -0.0276\ \ 0.9239\ \ -0.3213$
$0.6611\ \ 1.9153\ \ 0.1568\ \ -0.3005\ \ -0.5000\ \ 0.7165\ \ 1.3373].$

20. $\mathbf{x_N} = [-1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [0.5377\ \ 1.8339\ \ -2.2588\ \ 0.8622\ \ 0.3188\ \ -1.3077\ \ -0.4336\ \ 0.3426\ \ 3.5784\ \ 2.7694\ \ -1.3499\ \ 3.0349$
$0.7254\ \ -0.0631\ \ 0.7147\ \ -0.2050\ \ -0.1241\ \ 1.4897\ \ 1.4090\ \ 1.4172\ \ 0.6715\ \ -1.2075\ \ 0.7172\ \ 1.6302$
$0.4889\ \ 1.0347\ \ 0.7269\ \ -0.3034\ \ 0.2939\ \ -0.7873\ \ 0.8884].$

21. $\mathbf{x_N} = [-1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [-1.5771\ \ 0.5080\ \ 0.2820\ \ 0.0335\ \ -1.3337\ \ 1.1275\ \ 0.3502\ \ -0.2991\ \ 0.0229\ \ -0.2620\ \ -1.7502\ \ -0.2857$
$-0.8314\ \ -0.9792\ \ -1.1564\ \ -0.5336\ \ -2.0026\ \ 0.9642\ \ 0.5201\ \ -0.0200\ \ -0.0348\ \ -0.7982\ \ 1.0187\ \ -0.1332$
$-0.7145\ \ 1.3514\ \ -0.2248\ \ -0.5890\ \ -0.2938\ \ -0.8479\ \ -1.1201].$

22. $\mathbf{x_N} = [-1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [-0.2097\ \ 0.6252\ \ 0.1832\ \ -1.0298\ \ 0.9492\ \ 0.3071\ \ 0.1352\ \ 0.5152\ \ 0.2614\ \ -0.9415\ \ -0.1623\ \ -0.1461$
$-0.5320\ \ 1.6821\ \ -0.8757\ \ -0.4838\ \ -0.7120\ \ -1.1742\ \ -0.1922\ \ -0.2741\ \ 1.5301\ \ -0.2490\ \ -1.0642\ \ 1.6035$
$1.2347\ \ -0.2296\ \ -1.5062\ \ -0.4446\ \ -0.1559\ \ 0.2761\ \ -0.2612].$

23. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [-1.0799\ \ 0.1992\ \ -1.5210\ \ -0.7236\ \ -0.5933\ \ 0.4013\ \ 0.9421\ \ 0.3005\ \ -0.3731\ \ 0.8155\ \ 0.7989\ \ 0.1202$
$0.5712\ \ 0.4128\ \ -0.9870\ \ 0.7596\ \ -0.6572\ \ -0.6039\ \ 0.1769\ \ -0.3075\ \ -0.1318\ \ 0.5954\ \ 1.0468\ \ -0.1980$
$0.3277\ \ -0.2383\ \ 0.2296\ \ 0.4400\ \ -0.6169\ \ 0.2748\ \ 0.6011].$

24. $\mathbf{x_N} = [-1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [-0.5073\ \ 0.2358\ \ 0.2458\ \ 0.0700\ \ -0.6086\ \ -1.2226\ \ 0.3165\ \ -1.3429\ \ -1.0322\ \ 1.3312\ \ -0.4189\ \ -0.1403$
$0.8998\ \ -0.3001\ \ 1.0294\ \ -0.3451\ \ 1.0128\ \ 0.6293\ \ -0.2130\ \ -0.8657\ \ -1.0431\ \ -0.2701\ \ -0.4381\ \ -0.4087$
$0.9835\ \ -0.2977\ \ 1.1437\ \ -0.5316\ \ 0.9726\ \ -0.5223\ \ 0.1766].$

25. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [0.3984\ \ 0.8840\ \ 0.1803\ \ 0.5509\ \ 0.6830\ \ 1.1706\ \ 0.4759\ \ 1.4122\ \ 0.0226\ \ -0.0479\ \ 1.7013\ \ -0.5097$
$-0.0029\ \ 0.9199\ \ 0.1498\ \ 1.4049\ \ 1.0341\ \ 0.2916\ \ -0.7777\ \ 0.5667\ \ -1.3826\ \ 0.2445\ \ 0.8084\ \ 0.2130$
$0.8797\ \ 2.0389\ \ 0.9239\ \ 0.2669\ \ 0.6417\ \ 0.4255\ \ -1.3147].$

26. $\mathbf{x_N} = [$-1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$2.0243 -2.3595 -0.5100 -1.3216 -0.6361 0.3179 0.1380 -0.7107 0.7770 0.6224 0.6474 -0.4256 1.0486 0.6607 2.5088 1.0635 1.1569 0.0530 -1.2884 -0.3712 -0.7578 -0.5640 0.5551 -0.5568 -0.8951 -0.4093 -0.1609 0.4093 -0.9526 0.3173 0.0780$]$.

27. $\mathbf{x_N} = [$1 -1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.7779 0.3160 1.4065 0.4011 0.9297 -1.6058 0.6615 2.1385 0.5411 -1.5409 -0.2031 -0.5000 0.3830 0.4120 0.4055 -0.3638 -0.5993 -0.5896 0.8535 -1.8530 -0.2073 0.2704 -0.6528 0.4772 -0.0713 -0.9383 0.1614 -0.2682 -0.4099 -0.7113 0.0614$]$.

28. $\mathbf{x_N} = [$1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$0.4902 0.7653 0.7783 -1.4803 0.5404 -0.0915 -0.7603 -0.6936 1.2815 -0.8097 -1.2368 0.2147 2.0108 0.0256 0.3083 -0.9382 1.6742 0.1250 0.5301 -0.9521 0.8540 0.3891 -1.1560 0.0397 -0.4506 0.1092 -0.2506 -0.1899 -1.0329 -0.3233 0.7665$]$.

29. $\mathbf{x_N} = [$-1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.4229 -1.0531 0.6478 -0.3176 1.7690 1.5106 0.1640 -0.2828 1.1522 -1.1465 0.6737 -0.6691 -0.4003 -0.6718 0.5756 -0.7781 -1.0636 0.5530 -0.4234 0.3616 -0.3519 0.2695 -2.5644 0.4659 1.8536 1.0393 0.9109 -0.2397 0.1810 0.2442 0.0964$]$.

30. $\mathbf{x_N} = [$1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-2.2751 -1.6333 0.4155 -0.6548 -0.2963 -1.4969 -0.9048 -0.4042 -0.7258 -0.8665 -0.4218 -0.9427 1.3419 -0.9884 1.8179 -0.3744 -1.4517 -0.6187 0.9345 1.0559 0.1602 0.2874 0.6329 -1.4590 -0.5817 -1.8301 -0.4491 0.9493 0.7174 2.2878 0.1667$]$.

5 Оценка задержки детерминированного сигнала на фоне аддитивного белого гауссовского шума

5.1 Теоретические сведения

В задании, связанном с оценкой неэнергетического параметра сигнала требуется по критерию максимума функции правдоподобия оценить задержку сигнала.
На вход системы поступает смесь задержанного на некоторую величину сигнала и белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

$$y_i = x_{i-m} + n_i, i = 1 \div N$$

где m - задержка сигнала x_i.

Запишем функцию правдоподобия с учётом независимости отсчётов принятой выборки и линейного преобразования функции плотности вероятности (ФПВ) $w(y_i / m)$ реализации сигнально-шумовой смеси $y_i = x_{i-m} + n_i$ в ФПВ шума $w_ш(y_i - x_{i-m})$ выборки $n_i = y_i - x_{i-m}$:

$$\omega(\mathbf{y_N} / m) = \prod_{i=1}^{N} \omega(y_i / m) = \prod_{i=1}^{N} w_ш(y_i - x_{i-m}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш} e^{\frac{-(y_i - x_{i-m})^2}{2\sigma_ш^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш}\right)^N e^{\frac{-\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i)^2}{2\sigma_ш^2}}.$$

Найдём максимум функции правдоподобия по параметру m. Это удобнее делать работая с логарифмом функции правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\ln\left[\omega(\mathbf{y_N} / m)\right]\right) = 0. \quad (17)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_ш}\right)^N\right] + \ln\left[e^{\frac{-\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_{i-m})^2}{2\sigma_ш^2}}\right]\right) = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{-\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_{i-m})^2}{2\sigma_ш^2}\right) = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{-E_y - E_x + 2\sum_{i=1}^{N}(y_i x_{i-m})^2}{2\sigma_ш^2}\right) = 0$$

,где $E_y = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$, $E_x = \sum_{i=1}^{N} x_{i-m}^2$ - энергия сигнала $\mathbf{y_N}$ и $\mathbf{x_N}$ соответственно. Так как задержка m является параметром неэнергетическим, то E_y и E_x являются константами и производные от них параметру m равны нулю. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i x_{i-m})\right) = \frac{\partial}{\partial m}(B(m)) = 0, \quad (18)$$

$B(m) = \sum_{i=1}^{N}(y_i x_{i-m})$ - корреляция выборки и полезного сигнала. Вместо истинного значения задержки m правильно писать оценку задержки $\hat{m}$, так как истинное значение неизвестно:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{m}}(B(\hat{m})) = 0 \quad (19)$$

Формула (19) говорит, что наиболее близкой к истинному параметру m принимается та оценка параметра $\hat{m}$, при которой корреляционная функция $B(\hat{m})$ принимает своё максимальное значение. То есть, при $\left(B(\hat{m}) = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{i-\hat{m}} \right) \to \max$, $\hat{m} \to m$.

В домашнем задании студенту предлагается для диапазона оценки задержки $\hat{m} = 0 \div 4$ с единичным шагом рассчитать корреляцию $B(\hat{m})$,определить для какого $\hat{m}$ значение $B(\hat{m})$ максимально, тем самым найдя оценку задержки полезного сигнала наиболее близкую к истинному значению.

5.2 Варианты

Номер варианта выбирается в соответствии со списком по журналу группы.

Дисперсия $\sigma_ш^2$ предполагается единичной для всех вариантов.

1. $\mathbf{x_N} = [$-1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1-1 1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.1471 -2.0689 0.1905 -1.9443 0.4384 -0.6748 -1.7549 2.3703 -2.7115 -1.1022 0.7586 1.3192 1.3129 -1.8649 -1.0301 0.8351 -0.3723 2.0933 2.1093 0.1363 1.0774 -0.2141 -0.1135 0.9932 0.5326 -1.7697 -0.6286 0.7744 2.1174 -0.0891 1.0326 1.5525 1.1006 1.5442 0.0859$\}$

2. $\mathbf{x_N} = [$ -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.9330 -1.4390 -0.7947 -0.1596 -1.8880 1.1001 -1.5445 -0.6965 0.3997 -0.5100 -0.2606 2.7119 0.8059 -3.1384 -1.8396 0.3546 -0.0722 1.9610 1.1240 0.4367 -0.9609 0.8023 -2.2078 1.9080 1.8252 2.3790 -0.0582 0.5314 -1.2725 0.0984 -1.2779 1.7015 -2.0518 -0.3538 -0.8236$]$.

3. $\mathbf{x_N} = [$-1 -1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$2.5260 1.6555 0.3075 -1.2571 -1.8655 -1.1765 -0.2086 -0.3320 -1.3299 -0.4491 1.3335 1.3914 1.4517 -1.1303 1.1837 0.5238 -0.1380 -0.3617 1.4550 0.1513 0.6651 -0.4472 0.0391 -0.1176 0.2607 1.6601 0.9321 -1.1952 -1.2176 0.6969 -0.9770 1.0513 1.8261 0.5270 1.4669$]$.

4. $\mathbf{x_N} = [$1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$1.4434 -0.6081 -0.2507 0.0520 -1.7411 -1.5078 0.6794 -0.9875 -2.0292 -1.4570 2.2424 -0.0667 1.9337 -0.6497 0.9710 1.1825 -2.5651 -1.0845 0.6039 -0.9017 1.0414 -1.7342 -1.0308 1.2323 -0.5736 -1.3728 0.7635 1.0237 -1.2584 1.2294 1.3376 1.0001 -1.6642 -0.5900 -0.2781$]$.

5. $\mathbf{x_N} = [$1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 -1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.1249 1.4790 0.1392 1.7847 1.3086 -1.2339 -0.0570 -1.2841 -1.0867 -2.4694 1.1922 -1.8223 0.9058 -0.6638 -1.9047 -1.2883 1.3501 -2.8359 0.0360 1.4245 1.9594 0.6842 -0.5714 -0.0360 2.8779 1.9407 1.7873 0.1241 -0.6801 -1.5583 0.6886 -1.5700 -2.0257 -0.9087 -0.2099$]$.

6. $\mathbf{x_N} = [$-1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [0.3120\ \ 1.8045\ \ -1.7231\ \ 1.5265\ \ -1.2603\ \ 1.6001\ \ 1.5939\ \ -1.1860\ \ -2.3270\ \ -2.4410\ \ 1.4018\ \ 0.4702\ \ -1.3268\ \ 1.8123\ \ -0.4545\ \ -2.0516\ \ -0.6025\ \ -1.7519\ \ 0.5163\ \ 0.9674\ \ 0.6360\ \ -1.4251\ \ 1.5894\ \ -1.0628\ \ -1.0220\ \ -1.9821\ \ -0.3875\ \ -1.0549\ \ -2.1187\ \ -1.6264\ \ 1.2495\ \ 0.0070\ \ -0.0250\ \ -0.6407\ \ 1.8089].$

7. $\mathbf{x_N} = [-1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ \ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [0.0923\ \ 1.7298\ \ -0.6086\ \ -1.7371\ \ -2.7499\ \ 1.9105\ \ 1.8671\ \ -1.0799\ \ 1.8985\ \ -0.8163\ \ -0.7092\ \ 1.1129\ \ 1.4400\ \ 1.1017\ \ 3.7873\ \ -2.1667\ \ -0.8543\ \ -2.1407\ \ -2.0933\ \ 0.5664\ \ -1.1685\ \ 0.7815\ \ 1.5413\ \ -0.6107\ \ -0.2488\ \ 0.7783\ \ 2.2231\ \ -0.2833\ \ -3.3290\ \ -0.0981\ \ -2.8356\ \ -0.9332\ \ 1.0355\ \ 3.2272\ \ -0.0692].$

8. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [1.9707\ \ 0.5860\ \ 0.5617\ \ 1.0034\ \ -0.0490\ \ 0.5680\ \ -0.3511\ \ -1.3601\ \ -0.2941\ \ 0.4158\ \ -0.6045\ \ 2.0289\ \ 2.4580\ \ 1.0475\ \ 0.7463\ \ 1.1554\ \ -2.2371\ \ -1.1935\ \ -1.3334\ \ -0.2865\ \ -0.6826\ \ 1.4136\ \ 0.4229\ \ -0.8560\ \ -0.6387\ \ -1.7601\ \ -1.8188\ \ 1.5197\ \ -1.0142\ \ -2.1555\ \ 0.9905\ \ -0.6898\ \ -0.6667\ \ 0.8641\ \ 0.1134].$

9. $\mathbf{x_N} = [-1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -11\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [-0.4164\ \ 0.2247\ \ 0.9564\ \ -0.4176\ \ -2.0065\ \ -0.9355\ \ 1.6003\ \ -2.3615\ \ 1.3476\ \ 0.8182\ \ -1.9395\ \ 0.9625\ \ -2.8963\ \ -1.1280\ \ -0.1769\ \ 0.0095\ \ -2.1730\ \ -0.7254\ \ -0.7118\ \ -0.5942\ \ -0.8898\ \ 1.7871\ \ -1.0022\ \ -0.9069\ \ -1.3782\ \ -0.4827\ \ -1.0438\ \ 1.9608\ \ 2.7382\ \ 0.5698\ \ -2.6273\ \ -0.8337\ \ 0.3763\ \ -0.2270\ \ -1.1489].$

10. $\mathbf{x_N} = [-1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [1.3244\ \ -0.2132\ \ -0.1345\ \ -1.1714\ \ -2.3853\ \ -0.6895\ \ -1.2495\ \ -0.4963\ \ -1.8927\ \ 2.9085\ \ 1.1222\ \ 0.0470\ \ 0.7731\ \ -1.1625\ \ -0.3099\ \ -0.4442\ \ -0.1203\ \ -2.5327\ \ -2.0979\ \ -0.4158\ \ -0.9404\ \ 0.5887\ \ 0.6320\ \ -0.3610\ \ -0.2204\ \ 1.4394\ \ -1.0896\ \ 0.0212\ \ 0.1260\ \ 1.4147\ \ 1.3484\ \ -0.6507\ \ 0.2708\ \ 1.3268\ \ 0.4851].$

11. $\mathbf{x_N} = [1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1],$

$\mathbf{y_N} = [0.8864\ \ -1.3852\ \ -1.9568\ \ 0.4207\ \ 1.4007\ \ -0.9049\ \ -0.5033\ \ 0.0822\ \ -0.0296\ \ -1.5686\ \ -0.1900\ \ -0.8268\ \ 0.4945\ \ -0.1933\ \ -0.3530\ \ -1.3536\ \ -0.9536\ \ 0.2071\ \ -0.5505\ \ -0.8284\ \ 0.9379\ \ 2.1990\ \ -0.1983\ \ 0.0533\ \ 0.2511\ \ 0.0637\ \ -2.2691\ \ -0.5020\ \ 1.7891\ \ 1.7276\ \ -1.7731\ \ -0.1634\ \ -2.1283\ \ -2.4245\ \ 1.7174].$

12. $\mathbf{x_N} = [1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [-0.8461\ \ -1.3983\ \ -1.5435\ \ -1.9119\ \ 1.6527\ \ 0.2657\ \ -0.4594\ \ -0.0242\ \ -1.1569\ \ 1.2778\ \ -0.3605\ \ 0.9190\ \ 1.5409\ \ -2.2626\ \ 0.1104\ \ 0.0104\ \ -0.8288\ \ 0.3845\ \ 0.9373\ \ 1.4489\ \ 0.6367\ \ -0.0206\ \ -4.0730\ \ 1.6263\ \ -1.2867\ \ -1.1973\ \ -0.5944\ \ -0.4193\ \ 0.2706\ \ 0.1473\ \ -0.4021\ \ -1.2813\ \ -2.2033\ \ -0.5712\ \ 0.2140].$

13. $\mathbf{x_N} = [1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [-0.8461\ \ -1.3983\ \ -1.5435\ \ -1.9119\ \ 1.6527\ \ 0.2657\ \ -0.4594\ \ -0.0242\ \ -1.1569\ \ 1.2778\ \ -0.3605\ \ 0.9190\ \ 1.5409\ \ -2.2626\ \ 0.1104\ \ 0.0104\ \ -0.8288\ \ 0.3845\ \ 0.9373\ \ 1.4489\ \ 0.6367\ \ -0.0206\ \ -4.0730\ \ 1.6263\ \ -1.2867\ \ -1.1973\ \ -0.5944\ \ -0.4193\ \ 0.2706\ \ 0.1473\ \ -0.4021\ \ -1.2813\ \ -2.2033\ \ -0.5712\ \ 0.2140].$

14. $\mathbf{x_N} = [1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1],$

$\mathbf{y_N} = [0.8412\ \ -0.4147\ \ 2.9122\ \ -1.3909\ \ 1.4092\ \ -2.1424\ \ -1.6249\ \ -0.1687\ \ 1.3926\ \ 2.3018\ \ -1.5936\ \ -0.5636\ \ -1.5044\ \ 1.1021\ \ 2.1963\ \ -0.8797\ \ -0.0368\ \ -1.8571\ \ 0.8301\ \ -1.1917\ \ -1.8658\ \ 1.1807\ \ 2.2665\ \ -1.2512\ \ 0.7954\ \ -3.2015\ \ 0.2255\ \ -0.3933\ \ -1.3862\ \ -0.4744\ \ 0.5233\ \ 2.7985\ \ -1.1169\ \ -0.3202\ \ 0.8175].$

15. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.3049 -1.0059 0.7907 0.8834 1.5531 -1.9606 -2.6338 -0.2388 0.1933 2.6321 -0.5322 -0.3369 -0.4738 0.9583 -1.6155 0.3142 -2.4551 -2.7423 1.2053 0.1929 -1.8028 -2.2656 0.8507 -2.6364 -0.9827 -0.1716 -0.7823 -2.9092 -1.5368 -1.3020 2.8136 -0.0851 0.9429 0.3094 -1.0447$]$.

16. $\mathbf{x_N} = [\text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.1471 -1.0689 -1.8095 -3.9443 0.4384 -0.6748 0.2451 0.3703 -0.7115 -1.1022 -1.2414 -0.6808 -0.6871 0.1351 -1.0301 0.8351 1.6277 0.0933 0.1093 -1.8637 -0.9226 -2.2141 -2.1135 0.9932 0.5326 0.2303 1.3714 -1.2256 2.1174 -0.0891 -0.9674 1.5525 0.1006 1.5442 0.0859$]$.

17. $\mathbf{x_N} = [1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.9330 0.5610 -2.7947 -0.1596 0.1120 1.1001 -1.5445 -0.6965 0.3997 1.4900 1.7394 2.7119 0.8059 -1.1384 -1.8396 0.3546 -2.0722 -0.0390 -0.8760 2.4367 -2.9609 0.8023 -0.2078 3.9080 -0.1748 2.3790 -0.0582 0.5314 0.7275 0.0984 0.7221 1.7015 -2.0518 -0.3538 -0.8236$]$.

18. $\mathbf{x_N} = [1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1]$,

$\mathbf{y_N} = [$3.5260 0.6555 1.3075 -0.2571 0.1345 0.8235 1.7914 -2.3320 -3.3299 -2.4491 1.3335 -0.6086 -0.5483 0.8697 -0.8163 -1.4762 -0.1380 -0.3617 1.4550 0.1513 0.6651 -0.4472 0.0391 -2.1176 0.2607 1.6601 0.9321 0.8048 -1.2176 -1.3031 -0.9770 0.0513 0.8261 1.5270 0.4669$]$.

19. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1]$,

$\mathbf{y_N} = [$0.9292 -1.4863 1.5812 -1.1924 -3.3193 -0.9201 -1.9485 1.4115 1.6770 -0.1423 -1.6912 1.4494 1.1006 1.8261 -0.4638 -0.1021 0.8681 0.8528 0.0078 -1.1237 -1.5046 -0.2706 -1.3826 1.6487 -0.1743 -0.0149 0.5289 1.1370 0.7081 1.3018 -0.6001 -0.9300 -0.1768 -2.1321 1.1454$]$.

20. $\mathbf{x_N} = [\text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.1249 1.4790 -0.8608 0.7847 -0.6914 0.7661 -0.0570 -1.2841 0.9133 -0.4694 1.1922 -1.8223 0.9058 1.3362 0.0953 -1.2883 1.3501 -0.8359 0.0360 3.4245 1.9594 -1.3158 -0.5714 -2.0360 2.8779 1.9407 1.7873 0.1241 -0.6801 0.4417 0.6886 -1.5700 -2.0257 0.0913 -1.2099$]$.

21. $\mathbf{x_N} = [\text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$0.3120 1.8045 -1.7231 1.5265 -1.2603 1.6001 -0.4061 -3.1860 -2.3270 -2.4410 -0.5982 0.4702 -1.3268 -0.1877 1.5455 -0.0516 1.3975 0.2481 0.5163 -1.0326 2.6360 0.5749 1.5894 -1.0628 -1.0220 0.0179 -0.3875 0.9451 -2.1187 0.3736 -0.7505 0.0070 1.9750 -0.6407 1.8089$]$.

22. $\mathbf{x_N} = [\text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$0.0923 1.7298 -0.6086 -1.7371 -2.7499 1.9105 -0.1329 0.9201 1.8985 -0.8163 1.2908 1.1129 1.4400 -0.8983 1.7873 -0.1667 -2.8543 -0.1407 -2.0933 -1.4336 0.8315 -1.2185 1.5413 -0.6107 -0.2488 2.7783 2.2231 -2.2833 -3.3290 1.9019 -0.8356 -0.9332 -0.9645 3.2272 -0.0692$]$.

23. $\mathbf{x_N} = [1\ 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.4164 2.2247 0.9564 -0.4176 -0.0065 -0.9355 1.6003 -0.3615 -0.6524 -1.1818 0.0605 -1.0375 -2.8963 -3.1280 -2.1769 -1.9905 -2.1730 -0.7254 -0.7118 -2.5942 -0.8898 -0.2129 -1.0022 1.0931 0.6218 -0.4827 0.9562 1.9608 2.7382 0.5698 -2.6273 1.1663 0.3763 -0.2270 -1.1489$]$.

24. $\mathbf{x_N} = [$-1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$1.3244 -0.2132 -1.1345 -2.1714 -0.3853 -0.6895 -1.2495 -0.4963 -1.8927 2.9085 -0.8778 2.0470 -1.2269 0.8375 -0.3099 1.5558 -2.1203 -0.5327 -2.0979 -2.4158 1.0596 -1.4113 -1.3680 -2.3610 1.7796 -0.5606 -1.0896 2.0212 0.1260 -0.5853 1.3484 -0.6507 -1.7292 0.3268 -0.5149$]$.

25. $\mathbf{x_N} = [$1 1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$0.8864 -1.3852 -1.9568 0.4207 1.4007 1.0951 -0.5033 0.0822 1.9704 0.4314 1.8100 1.1732 -1.5055 -0.1933 1.6470 0.6464 1.0464 0.2071 -0.5505 -0.8284 -1.0621 2.1990 1.8017 0.0533 -1.7489 -1.9363 -2.2691 1.4980 1.7891 1.7276 -1.7731 -0.1634 -0.1283 -0.4245 1.7174$]$.

26. $\mathbf{x_N} = [$-1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.8461 -0.3983 -0.5435 -1.9119 -0.3473 -1.7343 1.5406 -0.0242 -1.1569 1.2778 1.6395 -1.0810 -0.4591 -0.2626 0.1104 0.0104 -2.8288 0.3845 -1.0627 1.4489 0.6367 -0.0206 -4.0730 -0.3737 0.7133 0.8027 1.4056 -2.4193 -1.7294 0.1473 -0.4021 -2.2813 -3.2033 -1.5712 0.2140$]$.

27. $\mathbf{x_N} = [$1 -1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.1471 -2.0689 0.1905 -3.9443 2.4384 -0.6748 0.2451 2.3703 -0.7115 -1.1022 -1.2414 -0.6808 -0.6871 0.1351 -1.0301 0.8351 1.6277 2.0933 2.1093 -1.8637 1.0774 -2.2141 -0.1135 0.9932 2.5326 -1.7697 -0.6286 0.7744 2.1174 -0.0891 1.0326 0.5525 1.1006 1.5442 0.0859$]$.

28. $\mathbf{x_N} = [$1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-1.9330 -0.4390 -1.7947 0.8404 0.1120 1.1001 -1.5445 1.3035 0.3997 -0.5100 1.7394 0.7119 0.8059 -1.1384 -1.8396 2.3546 -0.0722 1.9610 1.1240 2.4367 -0.9609 0.8023 -0.2078 3.9080 -0.1748 0.3790 -0.0582 -1.4686 0.7275 0.0984 0.7221 -0.2985 -3.0518 -1.3538 -1.8236$]$.

29. $\mathbf{x_N} = [$-1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$2.5260 0.6555 -0.6925 -0.2571 0.1345 0.8235 -0.2086 -2.3320 -3.3299 -2.4491 1.3335 1.3914 -0.5483 0.8697 -0.8163 0.5238 1.8620 -0.3617 1.4550 -1.8487 -1.3349 -0.4472 0.0391 -2.1176 0.2607 1.6601 0.9321 -1.1952 0.7824 0.6969 1.0230 -0.9487 0.8261 1.5270 0.4669$]$.

30. $\mathbf{x_N} = [$1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1$]$,

$\mathbf{y_N} = [$-0.0708 -2.4863 0.5812 -1.1924 -1.3193 1.0799 0.0515 1.4115 1.6770 -0.1423 0.3088 -0.5506 -0.8994 -0.1739 -0.4638 -0.1021 -1.1319 0.8528 2.0078 -1.1237 -1.5046 -0.2706 -1.3826 -0.3513 1.8257 -2.0149 -1.4711 -0.8630 -1.2919 1.3018 -0.6001 -1.9300 0.8232 -1.1321 1.1454$]$.