全支付拍卖的报价上限

周煜
武汉大学经济与管理学院

摘要：我们研究了n个拥有私人信息的投标人竞争一个奖励的全支付拍卖。每个人的成本是关于其报价与能力的线性函数，而能力是其私人信息。进一步地，在竞赛中，报价被招标人所设立的上限限制。我们发现报价上限一方面会降低低边际成本（高能力）的投标者的报价，而另一方面将提升中等边际成本（中等能力）的投标者的报价。而对于招标者的期望收益（总报价），随着报价上限的降低，而降低。从而，招标者并不会设立招标上限。

关键词：全支付拍卖; 报价上限; 不对称信息

Abstract: We study an all-pay auction in a private and independent information setting in which n bidders bid for an indivisible prize. Each bidder’s cost is a linear function of his bid and ability. Bids are bound by a common bid cap. We shows that, a bid cap lowers the bids of high-ability bidders and increases the bids of memium-ability bidders. The expected total bids increase the bid cap. As a result, the organizer prefers not to set a bid cap if he wants to maximize is expected revenue.

一、 绪论

(一) 研究背景

一般来说，我们将竞赛定义为：许多决策者，为了争夺一个或者多个奖励，而投入不可逆转的且有消耗的资本或是劳动，最终，奖励的分配取决于每个个体的付出。竞赛理论中的奖励，不单单只包含狭义的奖金、奖牌等等，还包含声誉、升迁机会、生产许可证等等隐性的且具有经济价值的“奖励”。竞赛理论一直都是社会、经济、农业等领域所关注的热点。当然，这并非当下的新兴理论，早在1902年，高尔顿在他的研究中，首次提出“如何更好的设立第一名与第二名的奖励方案？”这一问题，并引入独立同分布的随机变量来刻画无差异的竞争者，模型化这一现实问题。自此以后，竞赛广泛被经济学家所讨论，他们用理性的个体和他们的效用函数来刻画奖励的收益，并用厂商理论中的生产函数来刻画努力所产生的成本，于是将决策的重心放于获胜概率、期望收益与成本之间的权衡。不仅如此，随着博弈论的发展，竞赛理论又将博弈框架引入其中，来寻得最优报价策略的纳什均衡和最大化组织者期望收益的竞赛机制的设计。

更加客观来说，竞赛理论是拍卖理论的拓展与延伸。其中最为简洁且直观的一个拓展即为全支付拍卖（All-pay auction）。在全支付拍卖中，每个人所付出的成本即等于其报价（这是基于线性成本函数的假设，当然也不全然都是如此，Aner Sela 对此假设进行了放松，讨论了不同成本函数下的报价策略），而奖励的分配完全按照报价的大小排序进行。当然，竞赛理论还有其他丰富的模型，诸如：Tullock contest，tournament，online contest等等。但本文依然将重心放于全支付拍卖之上。

全支付拍卖的应用相当的广泛，诸如：政治游说、体育竞技、科技研发、升职竞争、寻租、政府招标等等，经济生活的方方面面皆有全支付拍卖的涉猎。具体地，对于中国而言，政府和军队的投标招标即是依托于全支付

拍卖。例如，军队需研制新型防弹防火战地货运车外置油箱，则首先发出招标函给各个有技术且信用良好的企业，企业如果决定接受此招标，则需要在规定的时间之内，将其样品送至专业的监测站进行评定，最终在所有样品中，选择最好的一件，并与其制造商签订生产合约。在这一过程中，很明显的一个特征即是，所有的竞争失败者，也会付出产品的研制、生产线规划设计、原材料的采购等成本，并且将得不到任何的补偿。也正是这一特征，使得传统的拍卖理论不在适用，而全支付拍卖的模型设定，正好契合这一现实特征。前面提到的其他的典型的竞赛皆是如此，我将不再赘述。

在许多竞赛中，组织者设定了参加的门槛，例如，设立参加费用，即参加比赛之前需要交纳一定的保证金；或是设立报价的下限，即投标人所出的低于下限的报价将被视为违规行为，并给予严厉的追责处罚。这一规则最直观的应用就是综艺选秀，在最终的节目录制之前，将经过初步的海选，将能力不行滥竽充数的参赛者提前筛出，保证了平均的节目质量，并激励剩余参赛者发挥出最大的实力，呈现一场精彩纷呈的视觉上的饕餮盛宴。这一规则的设计目的与运行机制十分直观，即筛掉较低能力者，使余留下来的投标人的能力都在一个比较高的水平线之上，于是加强了竞价行为的竞争性，进一步提高了招标人的期望收益。

另一方面，例如体育赛事之中，另一种竞赛机制也被广泛的采用，即设立出价的上线，在西文上，拥有极其形象且意蕴丰富的名字—bid cap。它让一次竞赛或是拍卖投标者的能力更加的平均，营造了一个良好的竞争平衡性。

直观上看，设定上限远没有设立下限那么收效显著。一方面，一个有效的上限将显著地制约高能力者的报价，从这一角度来看将降低组织者的期望收益；而另一方面，从社会的资源分配角度来看，由于这一规则的介入，它将显著地降低高能力者拍得奖励的概率，从而降低整体社会的资源分配效率。于公于私，报价上限都似乎是一个不太好的机制设计。

但是，这一机制却时常被广泛应用到各类全支付拍卖之中。例如在拳击比赛中，按体重将参赛者分为48、51至91公斤级。又如在围棋比赛中，将参赛者按年龄段分为不同的小组，具有相似棋龄的人将在一起同台竞技。

格兰披治一级方程式（简称：F1）大奖赛中，对于选手赛车的选择有一套具体的规则，其中一条即为最高时速315公里、最高排量12缸。这是对车辆性能的上限约束，使得赛事在控制了一系列客观因素之后，能着重体现选手的个人实力。

在NBA赛事中，为了使联盟水平更加的平均，不致使某一个队伍阵容配置远超其他队伍，而让比赛在进行之前即失去悬念，联盟对每个队伍给其球员的合约工资设立上限。在这一规定之下，即使是预算偏紧的球队也能以相对中等的价格招募到顶级球星。

这一机制，表面上制约了高能力者的实力发挥，但在另一层面上提高了整体比赛的质量，即平均期望报价。这是因为能力较弱的投标人，会因为能力强的投标人的报价收到制约，而认为自己如果增加报价，将有更多的机会获得胜利。相比之下，如果不存在这一上限，能力较弱的人，会认为不论自己如何在可接受的范围之内提高报价，都无法弥补能力之间的鸿沟，能力强的人总会递交一个他可承受范围之外的报价，而最终选择自暴自弃，报一个极低甚至退出竞赛。

于是，这一机制的重要特征即是，将原本极端的报价，变为了一个相对平均的报价。牺牲的能力高的投标人报高价的潜力，而换取能力相对较低的人报高价的可能。这是一个权衡取舍，一个恒久不变的经济问题的特征。

(二) 本文的结构安排

本文将讨论的中心定在引入报价上限是否能够提高组织者的期望收益率，以及求解出最合理的报价上限。

本文的是在Moldovanu和Sela（2006）所提出的具有随机能力的全支付拍卖模型之上引入报价上限。所有投标者唯一的差异即是能力，而能力差异体现在单位报价所产生的成本，也即报价的边际成本。能力越高，边际成本越低。

本文的第二部分将详细的介绍模型的设定。奖励的价值被规范化为1，而每个参赛者，则拥有私人信息— 边际成本（能力）。其他参赛者将视他人的边际成本服从一个相互独立的分布。每位参赛者的成本函数为关于其报价的线性函数。组织者将公开宣布他所设定的报价上限。之后所有的投标人，将在同一时间背靠背报价，而由于报价上限的存在，每位投标人的报价不能超过这一设定值。而最后的奖励将分配给报价最高的投标人，如果多个人都出这一报价，则随机从中抽取一位。

当然这是我们扩展之后的模型，原始的不具有报价上限的模型时间线，将组织者宣布投标上限这一环节去除即可，当然你也可以将其理解为前一设定的特殊形式— 宣布一个无穷大的报价上限。

本文的第三部分，将具体求解这两个模型的均衡报价策略，得到组织者期望收益与报价上限之间的函数关系，并比较有无报价上限时的期望收益与求解最优的报价上限。

首先求解标准（即无报价上限的）模型的均衡报价策略。我们假设存在对称的报价策略，随之我们可以推导出其具有严格递减和连续可微等性质，并得到其唯一的显示表达式。再证明解的存在性，即验证我们求出均衡解满足贝叶斯纳什均衡的要求。基于这一解，我们又顺理成章地推导出了该模型下的组织者期望收益率。

然后求解在存在报价上限的情形下的均衡报价策略。我们基于前面的所求出的无报价上限的策略，提出一个关于报价上限的报价策略，并验证它满足贝叶斯纳什均衡的要求。这一解的均衡特征是存在一个跳点，能力相对较强的人将用报价上限作为其报价，而能力较差的人将继续使用原来的报价策略。

最后我们得到了一个关于报价上限的组织者期望收益函数，并研究它的单调性。我们发现这是一个单调递增的函数，即随着报价上限的上升，组织者的期望收益率将上升。从而揭示出添加一个报价上限并不是一个好的机制，它所造成的出价损失，大于它所带来的出价收益。

总结部分紧随其后，而所有复杂的证明过程我们全部放在附录部分。除了相关证明之外，附录部分还包含了全文模型的术语表以供查阅。

(三) 文献综述

关于全支付拍卖这种形式的竞争与资源分配模式，在文献中被广泛研究。在经典的完全信息的全支付拍卖中，对奖励有不同内心估值的投标人，将产生不同的报价。这种全支付拍卖被广泛用于寻租与政治游说的探讨之中，例如Hillman和Samet（1987），Hillman和 Riley（1989），Baye、Kovenock和de Vries（1993）。而Ellingsen（1991）探讨了全支付拍卖在竞争垄断地位上的应用。 Varian（1980）研究了商品市场的全支付拍卖。Dasgupta（1986）介绍了此种拍卖方式在研究开发领域上的拓展。

除了以上这些经典文献之外，我们的论文与以下文献有更加密切的关联。

Pitchik和Schotter（1988）研究了完全信息下且具有预算约束的情形下，序贯拍卖的均衡。他们指出，组织者的收益组成颇为复杂，而且取决于多次拍卖物品的出场顺序。他们考虑的是两个投标人和两个物品。

Laffont和Robert（1996）论证了在有限预算约束的情形之下，最大化组织者期望收益的最佳拍卖方式为设立了一个最低拍卖报价的全支付拍卖。他们模型中的预算约束即为一个报价上限，外生给定了一个固定的报价上限，且这个报价上限是共有信息。模型中的奖励价值服从一个特定的分布，即模型考虑的是不对称信息下的均衡，这一点和我们的模型一致。但是有一点不同，他们视报价上限为外生给定，而我们假设报价上限有竞赛的组织者控制，这一拓展让我们的模型设定更加的丰富，适用于更多的情形。

Che和Gale（1998a）以政治游说中的报价上限为引子，第一次公开地给出了报价上限的概念，并将其融入了现有的模型。他们假设只有两个招标者，且拥有完全的信息，即在报价之前，彼此就相互知道了对方对奖励的估价。这一点，与我们不同，我们考虑的是不对称信息下的均衡。他们求解出了在拥有外生报价上限的模型的均衡，并比较了在有无报价上限之间的差异。他们指出一个外生的报价上限，会降低高价值者赢的概率，同时会也使低价值者更加富有竞争性。除此之外，他们证明了，任何有效的外生报价上限都将会增加组织者的期望收益。但是另一方面，它增加了社会总的支出，降低了全社会的剩余。他们的结论跟我们的截然不相同，最关键的原因是：信息结构的不同，他们在完全信息角度入手，而我们则是基于不对称信息。

Che和Gale（1998b）考虑了在标准的不对称信息的拍卖框架下引入预算约束。在此模型的设定中，他们得到了对称均衡的诸多性质，例如连续性。然而囿于技术的复杂性，他们并未显示地计算出这一均衡。他们比较了不同拍卖机制下的组织者期望收益收益和社会福利。一价拍卖的期望收益和社会福利均要比二价拍卖更大。他们将这一结果归咎于不同价格机制下的预算约束起到的作用的差异。

Maskin（2000）期望寻求一个在存在预算约束时的最优的拍卖方式，这里的最优指的是最大化社会总剩余，而非组织者的期望收益。他证明了全支付拍卖在拥有预算约束和激励兼容约束时是最佳的拍卖选择，也即全支付拍卖方式是约束最优的竞价手段。他更深入地探究了其中的成因，即相比较于其他的拍卖方式，更少的人会报出他们的预算约束，即普遍报价偏低。

Benoit和Krishna（2001）研究了完全信息下且具有预算约束的情形下，序贯拍卖的均衡。他们考虑的是多个投标人和两个物品。他们指出了预算约束将会有利于组织者提高他的期望收益，这个特点得益于多个时间段竞价公用一个预算约束，前一次的竞价的报价将会影响第二次竞价的报价。

Gavious,Moldovanu和Sela（2002）研究了在每个人的价值是私人信息但其分布是共有信息的设定下的全支付拍卖。他们引入了内生化的报价上限，这一点与我们的模型十分相似。不仅如此，他们考虑了各种不同的生产函数（成本函数），有别于以往的单一的线性函数，他们增加考察了凸函数与凹函数。他们指出当成本函数为线性与凹函数时报价上限将会损害组织者的期望收益率，这是因为高报价的边际成本不高，高报价本来出现的概率比较大，所以一个报价上限带来的收益远远不能弥补其带来的损失。而另一方面，如果成本函数是凸函数，情况恰好相反，一个合适的报价上限将会增加组织者的期望收益，当然受限于技术，他们并未显示地算出最优的报价上限，只是用其他的细节处理，比较了大小。我们的模型与他们的最大的不同是我们的不对称信息是随机的能力（边际成本），而非内心估值。

Moldovanu和Sela（2006）他们提出了一个新的不对称模型即随机的能力，并给出了多种奖励情形时的均衡报价，这一模型设定使我们的模型的基础。当然在我们的文章中将给出更加严谨的单一奖励的均衡报价的证明，仅仅只依赖于对称报价策略的假设。

Qiang Fu,Qian Jiao,和Jingfeng Lu（2014）在随机能力的设定之下，比较了完全信息（组织者披露投标者能力）和不完全信息（组织者隐瞒投标者能力）模型中的组织者的期望收益，并发现不论能力的分布如何，隐瞒投标者的能力都将会产生更高的期望总报价。

Bo Chen, Xiandeng Jiang和Dmitriy Knyazev（2017）考虑了在不完全信息的情形下的内生化的参赛行为的全支付拍卖。本文与其相似，均在标准化的不完全信息全支付拍卖的基础之上进行内生化外生变量的拓展。

二、 全支付拍卖模型

我们考虑这样一个模型：n 个投标人竞争一个不可分割的奖励（即这个奖励最终只能分配给这n个人中的一个）。为简化操作，我们将这些人编号为投标人1 $\cdots$ 投标人n，并将集合$\{1,\dots,n\}$记为N。假设这唯一的奖

励对于招标人（组织者）没有价值，而对于所有的投标人有共同的价值，我们将这一价值规范化为1。所有投标人将在同一时间提交他们的报价，记为x_i，其中$0 \le x_i \le d$。这里的d记为招标者所设定的报价上限，它属于$d \in (0,+\infty)$。报价上限对于每个投标者而言均是公有信息，因为招标者将统一宣布。最后奖励只将授予给报价最高者，如果存在多个人出至最高价，则在这些人中随机抽取一人作为获胜者，他们被抽取的概率相同。

投标人i具有一个报价的边际成本c_i，这一信息属于私有信息，即只将被投标人i所知道。我们将其视为一种自然分配。而所有投标人将把除了自己以外的其他对手的边际成本视为如下过程所产生的结果：$c_j\ \forall j \neq i$ 是从所属集合$[\underline{c},\overline{c}] \in (0,\infty)$ 中随机抽取出来的，而随机方式是由一个累积分布函数 F决定的，且每个投标人的分布相互独立且相同。我们假设累积分布函数F连续可微，并且将其概率密度函数记为f。为了之后解的存在性，与保证能够得到一个显示的解的表达式，我们假设$f(c) > 0$，任取$c \in [\underline{c},\overline{c}]$。

值得一提的是，我们将投标人的边际成本c_i视为他们的个人能力的一种测度。当然，从直观上，这是显而易见的，因为当一个人拥有低的边际成本时，当他给出同样的报价时，他只用支付一个较低的成本。所以，边际成本越高，能力越低。

招标人将在自然决定每个投标人的边际成本c_i 之前，公开宣布他所决定的一个报价上限d。而在此之后，自然将决定每个投标人的边际成本，产生如下的向量：$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$。然后所有的投标人在同一时间提交他们的报价，从而产生如下向量：$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$。

以上过程的时间线如图2.1。

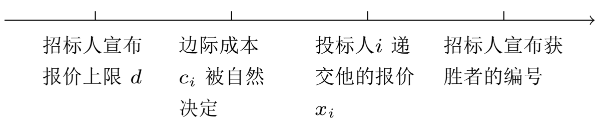

图 1: 时间线

我们将用符号m表示全部出最高报价的投标人的人数，然后用记号$w_i = \mathbb{1}\{x_i \ge x_j, \forall j \neq i\}$ 表示投标人i是否给出了最高的报价。如果他的报价是最高的，则$w_i = 1$，如果他的报价并非最高，则$w_i = 0$。故而，对于投标人i而言，他所实现的回报为：

$$u(c_i, \mathbf{x}) = \frac{w_i}{m} - c_i \cdot x_i \tag{1}$$

当他给出他的报价时的期望回报为：

$$EV(c_i, x_i) = E\{\frac{w_i}{m} - c_i \cdot x_i \mid c_i, x_i\} \tag{2}$$

我们将一个对称的出价策略记为$\beta(c_i, d)\ (\forall i \in N)$ ，数学化的映射表示为：

$$\begin{aligned} \beta : [\underline{c},\overline{c}] \times \mathbf{R}_+ &\to \mathbf{R}_+ \\ (c_i, d) &\to x_i \end{aligned} \tag{3}$$

三、 求解均衡

(一) 无报价上限的全支付拍卖的对称均衡

我们首先考虑一个标准形式，这一形式的多奖励拓展由Moldovanu and Sela（2006）提出，并进行求解。而

我们在此将不单单求解其对称的可微的解，还将证明该解为唯一的对称均衡。这一结论在引理3.1中给出，而具体证明过于繁琐，我们将其放于附录部分，以供查阅。

引理 3.1. 我们考虑一个标准的不完全信息下的全支付拍卖（没有报价上限），我们可以证明存在唯一的对称均衡，这种均衡具如下的出价策略：

$$\widetilde{\beta}(c_i) = \int_{c_i}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

且这一均衡的招标人的期望收益为：

$$\widetilde{ER} = n\int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)F(y)\,\mathrm{d}y \tag{5}$$

而对于投标人i，他的期望回报为：

$$\widetilde{EV}(c_i) = (1-F(c_i))^{n-1} \quad - c_i\int_{c_i}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

证明. 参见附录。 □

大致的证明过程可以简述为：从贝叶斯纳什均衡的定义入手，得到对称均衡具有的一些基本性质：严格单调递减和连续性等等。之后更进一步地由激励兼容条件，得到其可微性。再对其倒数积分，得到该策略的显示表达式。然而我们该“均衡”只是真正的贝叶斯纳什均衡的必要条件，即如果真的存在一组贝叶斯纳什均衡，那么其一定等于我们所求出的这一个。于是，更进一步地，我们验证了若对手用出价满足策略，那么这一策略是对于每个人都是最佳反应。从而验证了该“均衡”确实是贝叶斯纳什均衡，也证明了标准的不完全信息的全支付拍卖对称均衡的存在唯一性。

均衡报价策略单调递减这一性质，十分地符合直觉。当一个人的边际成本越高，其能力越低，当然他的报价也是偏低。竞争力弱的人的获胜的概率相对较低，而且他的期望回报也相应的比较低。

(二) 存在报价上限的全支付拍卖的对称均衡

我们现在引入“招标人宣布报价上限”这一环节，而接下来将来考察存在报价上限的全支付拍卖的对称均衡。这一均衡求解过程并不如前一情形那么具有技术性，但是，却需要分两种情形分开讨论，更加的繁琐。

首先，我们假设报价上限十分大，以致于它对于所有潜在的投标人的报价策略均没有任何约束性。我们称之为无效的报价上限。而此时一个标准的不存在报价上限的全支付拍卖重新回到了我们的视线。

定理 3.1. 考虑一个具有报价上限的全支付拍卖 $d \geq \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y$。则此时报价上限实则多余，而且此时存在唯一的对称均衡，它的均衡报价策略为：

$$\begin{aligned}\beta(c_i,d) &= \widetilde{\beta}(c_i)\\ &= \int_{c_i}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{7}$$

且这一均衡的招标人的期望收益为：

$$\begin{aligned}ER(d) &= \widetilde{ER}\\ &= n\int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)F(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{8}$$

而对于投标人i，他的期望回报为：

$$\begin{aligned} EV(c_i,d) &= \widetilde{EV}(c_i) \\ &= (1-F(c_i))^{n-1} - c_i\int_{c_i}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{9}$$

证明.

$$\begin{aligned} \max_{c\in[\underline{c},\overline{c}]} \widetilde{\beta}(c) &= \widetilde{\beta}(\underline{c}) \\ &= \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

因此如果$d > \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y$，那么报价上限是没有效力的。根据引理3.1.1，对称均衡存在且唯一，且有如下等式成立：

$$\begin{aligned} \beta(c,d) &= \widetilde{\beta}(c) \\ ER(d) &= \widetilde{ER} \\ EV(c,d) &= \widetilde{EV}(c) \end{aligned}$$

□

当报价上限超过所有投标者能承受的报价范围之外的时候，即 $d \geq \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y$，这一报价上限显然是没有任何意义的，它并未起到实际的限制作用。此时有跟前一情况相同的对称均衡，且存在唯一。当一个人的边际成本越高，其能力越低，当然他的报价也是偏低。竞争力弱的人的获胜的概率相对较低，而且他的期望回报也相应的比较低。

现在，我们开始一个真正富有挑战的工作，即宣布一个真正的有实际约束力的报价上限。从直觉上，均衡策略的单调性依然成立，因为边际成本越高的人的竞争力依然越低。但是，实际情况稍许比这复杂，因为由于高能力者的出价被限制，那么略比出价上限低的人如果略微增加他的报价，将显著的提升他的获胜概率。故，报价上限除了使一部分人的报价触顶，还使得另一部分的人的报价提升。接下来的定理将严谨地阐述这一特征。

定理 3.2. 考虑一个具有报价上限的全支付拍卖 $0 < d < \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y$。则此时该报价上限产生实际的效力，且存在一个对称的均衡，他的报价策略为

$$\beta(c_i,d) = \begin{cases} d & \text{当 } \underline{c} \leq c_i < \widetilde{c} \\ \widetilde{\beta}(c_i) & \text{当 } \widetilde{c} \leq c_i \leq \overline{c} \end{cases} \tag{10}$$

且这一均衡的招标人的期望收益为：

$$ER(d) = n[\int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)F(y)\,\mathrm{d}y + F(\widetilde{c})(\frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n}{nF(\widetilde{c})\widetilde{c}} - \frac{(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{\widetilde{c}})] \tag{11}$$

这里的临界边际成本 $\widetilde{c} = \widetilde{c}(d)$ 是严格的单调递减，具体形式为

$$d = \int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n - nF(\widetilde{c})(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{nF(\widetilde{c})\widetilde{c}}$$

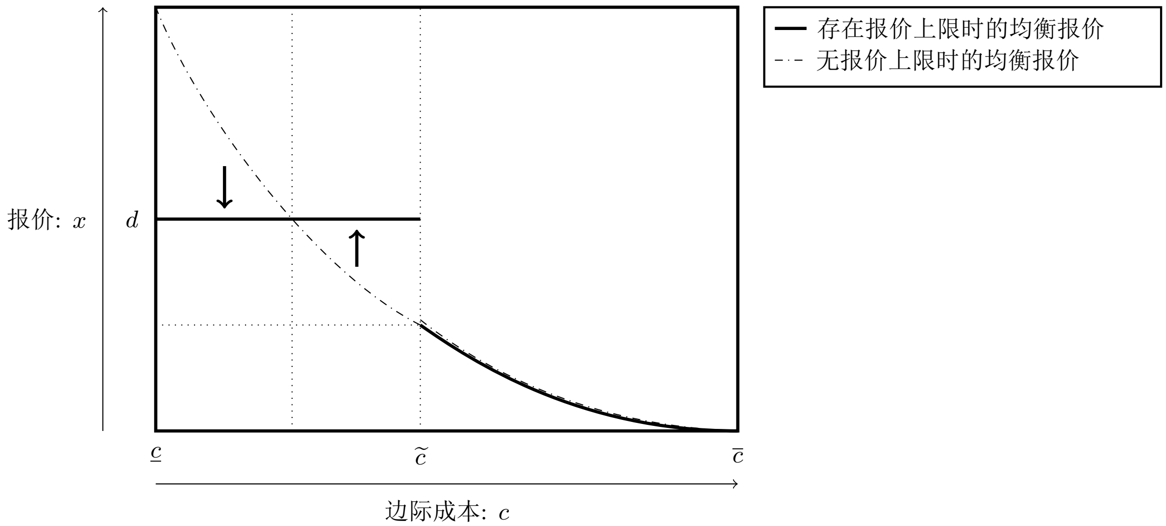

图 2: 当$0 < d < \widetilde{\beta}(\underline{c})$时的均衡报价

证明. 详见附录。 □

我们可以看到，虽然报价上限限制了原本比d大的投标者的报价，使他们的报价等于报价上限d。但与此同时，边际成本在$\widetilde{\beta}^{-1}(d)$与$\widetilde{c}$ 之间的投标者，将会选择将其报价上跳至报价上限因为报价上限致使了一个获胜概率的不连续变化，而成本函数的变动依然连续。

当一个投标人的边际成本等于临界值时，他对于报价是否跳动将会十分地摇摆不定，这是因为两种报价策略对于他而言，将产生同样的期望回报。

边际成本临界值是一个关于报价上限的单调递减函数（这一性质的证明也在附录之中）。这一结论并非那么的符合直觉：一方面当报价上限越低的时候，将会有更多的投标者报价受到限制，此时临界值自然会上升；而另一方面，更多的人给出最高报价，使得最高报价的获胜机会下降，递交一个d将不会如同之前那么的有吸引力，即这使得临界值下降。而经过严谨的证明，第一种效应更胜于第二种效应，即加总之后，边际成本临界值是一个关于报价上限的单调递减函数。

值得注意的是，我们并没有证明引入有效力的报价上限之后，对称均衡是存在且唯一的。我们只是退而求其次地基于无报价上限的均衡得到了一个对称均衡，即对称均衡的确存在，但是我们只得到了其中一个具有明确的经济学含义的均衡。而是否还存在其他的均衡，我们不得而知。

第二个式子得到了一个关于报价上限的招标者期望收益函数，而它具体的性质我们将在之后进行详细讨论。

图3.1描述了此均衡的报价策略。

四、 招标者期望收益与报价上限的关系

本节我们来探讨报价上限对招标者的期望收益的影响，为了方便叙述，我们不妨将无报价上限的情形视作存在报价上限情形的一种特殊形式：即一个无穷大的报价上限或是一个无效的报价上限。接下来的定理告诉我们揭示了他们间的关系。

定理 4.1. *招标者的期望收益函数关于报价上限d严格单调递增，这也说明了招标者将倾向于不使用报价上限。*

证明. 详见附录。 □

定理3.3.1揭示了当报价上限d逐渐减小的时候，招标者的期望收益也逐渐减少。而它的特殊情形阐述了，不论边际成本的分布如何，只要它的累积分布函数满足我们的连续可微假设，招标者将更加倾向于一个没有报价上限的拍卖机制。存在一个拍卖上限的时候，一部分中等能力的投标者的报价上升所带来的收益提升将不足以抵消能力较高者的报价降低带来的损失。

五、 总结

我们研究了存在内生报价上限的全支付拍卖。这是对标准的不完全信息的全支付拍卖的扩展。报价上限一方面会降低低边际成本（高能力）的投标者的报价，而另一方面将提升中等边际成本（中等能力）的投标者的报价。而对于招标者的期望收益（平均报价/总报价），随着报价上限的降低，而降低。从而，招标者并不会设立招标上限。

参考文献

[1] Benoit JP, Krishna V. Multiple-Object Auctions with Budget Constrainted Bidders [J]. Review of Economic Studies, 2001, 68: 155-180.

[2] Baye MR, Kovenock D, Vries CGD. Rigging the Lobbying Process: An Application of the All-Pay Auction [J]. American Economic Review, 1993, 83: 289-294.

[3] Che YK, Gale IL. Caps on Political Lobbying [J]. American Economic Review, 1998a, 88: 643-651.

[4] Che YK, Gale IL. Standard Auctions with Financially Constrained Bidders [J]. Review of Economic Studies, 1998a, 65: 1-21.

[5] Chen B, Jiang X, Knyazev D. On Disclosure Policies in All-pay Auctions with Stochastic Entry [J]. Journal of Mathematical Economics, 2017, 70: 66-73.

[6] Fu Q, Jiao Q, Lu JF. Disclosure policy in a multi-prize all-pay auction with stochastic abilities [J]. Economics Letters, 2014, 125: 376-380.

[7] Gavious A, Moldovanu B, Sela A. Bid Costs and Endogenous Bid Caps [J]. The RAND Journal of Economics, 2002, 33: 709-722.

[8] Hillman AL, Riley JG. Politically Contestable Rents and Transfers [J]. Economics and Politics, 1989, 1: 17-39.

[9] Laffont JJ, Robert J. Optimal Auction with Financially Constrained Bidders [J]. Economics Letters, 1996, 52: 182-186.

[10] Maskin ES. Auctions, Development, and Privatization: Efficient Auctions with Liquidity-Constrained Buyers [J]. European Economic Review, 2000, 44: 667-681.

[11] Moldovanu B, Sela A. Contests architecture [J]. Journal of Economic Theory, 2006, 126: 70-96.

[12] Pitchik C, Schotter A. Perfect Equilibria in Budget-Constrained Sequential Auctions: An Experimental Study [J]. RAND Journal of Economics, 1988, 19: 363-388.

[13] Vojnovic M. Contest Theory: Incentive Mechanisms and Ranking Methods [M]. New York: Cambridge University Press, 2015.

附录

一、 引理和定理的证明

(一) 引理3.1的证明

首先，我们假设存在一组对称均衡，基于此，我们可以推导出这组均衡需要满足的一些性质：

1. *弱单调递减* $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 在 $[\underline{c},\overline{c}]$ 上弱单调递减。
2. *非点状报价* 不存在子集$E \subseteq [\underline{c},\overline{c}]$ 且具有非0测度, 使得 $\forall c, c' \in E$, $\widetilde{\beta}(c)=\widetilde{\beta}(c')$。
3. *区间化报价* $\widetilde{\beta}([\underline{c},\overline{c}])$ 是一个区间。

这三个性质可推导出

4. *严格单调递减* $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 在 $[\underline{c},\overline{c}]$ 上严格单调递减。
5. *连续性* $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 在$[\underline{c},\overline{c}]$上连续。

另外，只存在唯一一个策略函数 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 满足这些性质，所以唯一性已被证明。接下来，我们将解出这一个特殊的对称均衡，然后证明它是所有投标人的最佳反应。

弱单调递减的证明 任取 c, $c' \in [\underline{c},\overline{c}]$。因为 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 是最佳反应，所有边际成本为c的投标人，选择非$\widetilde{\beta}(c)$作为他的报价，不会变得更好。这说明了他冒充别人而选择别人的策略，不会得到更多的回报。这个逻辑的数学表述为：

$$\begin{cases} \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x=\widetilde{\beta}(c)) - c\cdot\widetilde{\beta}(c) \geq \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x=\widetilde{\beta}(c') - c\cdot\widetilde{\beta}(c') \\ \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x=\widetilde{\beta}(c')) - c'\cdot\widetilde{\beta}(c') \geq \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x=\widetilde{\beta}(c) - c'\cdot\widetilde{\beta}(c) \end{cases} \tag{12}$$

我们称式子（12）激励兼容条件。它可以推得：

$$(c'-c)(\widetilde{\beta}(c)-\widetilde{\beta}(c')) \geq 0$$

如果 c' 比 c大，则 $\widetilde{\beta}(c')$ 不会比 $\widetilde{\beta}(c)$大，这说明 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 弱单调递减。 ∎

非点状报价的证明 假设存在一个子集 $E \subseteq [\underline{c}, \overline{c}]$ 满足 $\text{Prob}(E) > 0$ 与 $\widetilde{\beta}(E) = \{\hat{x}\}$。

如果存在一个投标人的边际成本 $c \in E$, 他可以把他的报价设为 $\hat{x} + \epsilon$ 其中 ϵ 足够小以致于 $\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x = \hat{x}) - c \cdot \hat{x} > \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x = \hat{x} + \epsilon) - c \cdot (\hat{x} + \epsilon)$.
这是因为函数 $\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x)$ 在 $\hat{x}$ 不连续。所以相对于$\hat{x}$，他更倾向于 $\hat{x} + \epsilon$ 相对于$\hat{x}$, 矛盾！非点状报价得到证明。 ∎

区间化报价的证明 假设 $\widetilde{\beta}([\underline{c}, \overline{c}])$ 不是一个区间。那么一定存在一个点 $\hat{c} \in [\underline{c}, \overline{c}]$, 使得 $\lim_{c \to \hat{c}} \widetilde{\beta}(c) > \widetilde{\beta}(\hat{c})$ (极限存在是因为 $\widetilde{\beta}(\cdot)$单调)。然而选择 $\lim_{c \to \hat{c}} \widetilde{\beta}(c) + \epsilon$ 的投标人将会把他的出价调整为 $\widetilde{\beta}(\hat{c})$, 这是因为成本只会改变许多，然而 $\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x)$ 只会改变一点。所以不存在点 $\hat{c}$。这说明 $\widetilde{\beta}([\underline{c}, \overline{c}])$ 是一个区间。 ∎

严格单调递减的证明 假设 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 不是严格单调递减，则一定存在区间 $[a, b] \in [\underline{c}, \overline{c}]$ 使得 $\widetilde{\beta}([a, b]) = \hat{x}$。然而，$\text{Prob}([a, b]) > 0$，这与 非点状报价矛盾。这说明 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 严格单调递减。 ∎

连续性的证明 假设 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 在 $\hat{c}$处不连续, 而且 $\lim_{c \to \hat{c}^-} \widetilde{\beta}(c) > \widetilde{\beta}(\hat{c})$ ($\lim_{c \to \hat{c}^+} \widetilde{\beta}(c) < \widetilde{\beta}(\hat{c})$ 将以同样的方式被证明). 因为 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 严格单调递减且为区间, 我们可以发现一个矛盾。所以 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 连续。 ∎

唯一性的证明 式子(12) 可以推导出：

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{\beta}(c) - \widetilde{\beta}(c')}{c - c'} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win}|x = \widetilde{\beta}(c)) - \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win}|x = \widetilde{\beta}(c'))}{c - c'} \\ \frac{\widetilde{\beta}(c) - \widetilde{\beta}(c')}{c - c'} \geq \frac{1}{c'} \cdot \frac{\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win}|x = \widetilde{\beta}(c)) - \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win}|x = \widetilde{\beta}(c'))}{c - c'} \end{cases}$$

因为 $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 严格单调递减, $\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x = \widetilde{\beta}(c)) = (1 - F(c))^{n-1}$。则我们有

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{\beta}(c) - \widetilde{\beta}(c')}{c - c'} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{(1 - F(c))^{n-1} - (1 - F(c'))^{n-1}}{c - c'} \\ \frac{\widetilde{\beta}(c) - \widetilde{\beta}(c')}{c - c'} \geq \frac{1}{c'} \cdot \frac{(1 - F(c))^{n-1} - (1 - F(c'))^{n-1}}{c - c'} \end{cases}$$

让 $c' \to c$,我们可以得到：

$$\widetilde{\beta}'(c) = -\frac{1}{c}(n-1)(1 - F(c))^{n-2} f(c) \tag{13}$$

另外，横截面条件必须被满足：

$$\widetilde{\beta}(\overline{c}) = 0 \tag{14}$$

因为他的 $\text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x = \widetilde{\beta}(\overline{c}))$ 总等于 0. 所以，如果存在对称均衡报价，一定只能是如下形式：

$$\widetilde{\beta}(c) = \int_c^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1 - F(y))^{n-2} f(y)\, \mathrm{d}y \tag{15}$$

∎

存在性证明 我们将证明 $\widetilde{\beta}(c) = \int_c^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1 - F(y))^{n-2} f(y)\, \mathrm{d}y$ 对所有投标人均是最佳反应。

对于投标人i，他的边际成本是c_i, 他将会选择他的报价并相信其他人遵循 $\widetilde{\beta}(\cdot)$.

$$\begin{aligned} & \max_{x_i}\ EV_{\widetilde{\beta}}(c, x) = \text{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\text{win} \mid x = x_i) - c_i x_i \\ \iff & \max_{x_i}\ EV_{\widetilde{\beta}}(c, x) = (1 - F(\widetilde{\beta}^{-1}(x_i)))^{n-1} - c_i x_i \\ \implies & D_1 EV_{\widetilde{\beta}}(c, x) = -(n-1)(1 - F(\widetilde{\beta}^{-1}(x_i)))^{n-2} \cdot f(\widetilde{\beta}^{-1}(x_i)) \frac{1}{\widetilde{\beta}'(\widetilde{\beta}^{-1}(x_i))} - c_i \end{aligned}$$

由式子(13) 与 $\widetilde{\beta}'(\cdot) < 0$,我们得到

$$D_1 EV_{\widetilde{\beta}}(c,x) = \widetilde{\beta}^{-1}(x_i) - c_i \begin{cases} > 0 & \text{if } \ x_i < \widetilde{\beta}(c_i) \\ = 0 & \text{if } \ x_i = \widetilde{\beta}(c_i) \\ < 0 & \text{if } \ x_i > \widetilde{\beta}(c_i) \end{cases}$$

因此, 如果其他人遵循 $\widetilde{\beta}$，$\widetilde{\beta}(c_i)$ 对于投标人 i是最优选择。我们这就证明了$\widetilde{\beta}$ 对于每个投标人均是最佳反应。

∎

综上所述，如果没有报价上限，则存在唯一的对称均衡。

招标人期望收益 & 投标人期望回报

$$\begin{aligned}
\widetilde{ER} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \widetilde{\beta}(c_i)\,\mathrm{d}F(c_i) \\
&= n \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \widetilde{\beta}(c_i)\,\mathrm{d}F(c_i) \\
&= n \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \int_{c_i}^{\bar{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}F(c_i) \\
&= n \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \int_{\underline{c}}^{y} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}F(c_i)\mathrm{d}y \\
&= n \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)F(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{EV}(c_i) &= \mathrm{Prob}_{\widetilde{\beta}}(\mathrm{win} \mid x = \widetilde{\beta}(c_i)) - c_i\widetilde{\beta}(c_i) \\
&= (1-F(c_i))^{n-1} - c_i \int_{c_i}^{\bar{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

∎ □

(二) 定理3.2的证明

在这种情形之下, $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 不再是均衡的报价策略, 这是因为$\widetilde{\beta}(\underline{c})$ 比报价上限d大, 然而这是被禁止的。我们声称式子(10) 和 (12) 是投标者 i 的最优反应。

d 和 $\widetilde{c}$的关系

$$\lim_{\widetilde{c} \to \underline{c}} d(\widetilde{c}) = \widetilde{\beta}(\underline{c})$$

$$\lim_{\widetilde{c} \to \bar{c}} d(\widetilde{c}) = 0$$

而且，d 关于 $\widetilde{c}$ 严格单调递减：

$$
\begin{aligned}
d'(\widetilde{c}) &= -\frac{2(1-F(\widetilde{c}))f(\widetilde{c})+\cdots+(n-1)(1-F(\widetilde{c}))^{n-2}f(\widetilde{c})}{n\widetilde{c}} \\
&\quad -\frac{1+(1-F(\widetilde{c}))^2+\cdots+(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}-n(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{n\widetilde{c}^2} \\
&< -\frac{1+(1-F(\widetilde{c}))^2+\cdots+(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}-n(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{n\widetilde{c}^2} \\
&< 0
\end{aligned}
$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
\frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n}{F(\widetilde{c})} &= \frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n}{1-(1-F(\widetilde{c}))} \\
&= 1+(1-F(\widetilde{c})+\cdots+(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}
\end{aligned}
$$

∎

当 $c \geq \widetilde{c}$时，$\beta(\cdot)$是最佳反应的证明 $\forall c_i \in [\widetilde{c}, \overline{c}]$, $x_i \in (\beta(\widetilde{c}), d)$ 将不再是最优反应, 因为它被 $\beta(\widetilde{c})$严格占优。因为 $\beta([\underline{c}, \overline{c}]) = [0, d] \setminus (\beta(\widetilde{c}), d)$, 我们可以将投标者 i的行为视为选择冒充 $\hat{c}$，然后递交报价 $\beta(\hat{c})$。如果他选择冒充 $\hat{c}$，他的期望回报为

$$
EV(c_i, \hat{c}_i) = \begin{cases} (1-F(\hat{c}_i))^{n-1} - c_i \int_{\hat{c}_i}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y & \text{if } \hat{c}_i \geq \widetilde{c} \\ \frac{1}{nF(\widetilde{c})}(1-(1-F(\widetilde{c}))^n) - c_i d & \text{if } \hat{c}_i < \widetilde{c} \end{cases}
$$

因为 $\hat{c}_i \geq \widetilde{c}$:

$$
D_2 EV(c_i, \hat{c}_i) = (\frac{c_i}{\hat{c}_i} - 1)(n-1)(1-F(\hat{c}_i))^{n-2}f(\hat{c}_i)
$$

所以我们可以得到

$$
D_2 EV(c_i, \hat{c}_i) = \begin{cases} > 0 & \text{if } \widetilde{c} \leq \hat{c}_i < c_i \\ = 0 & \text{if } \hat{c}_i = c_i \\ < 0 & \text{if } c_i < \hat{c}_i \leq \overline{c} \end{cases}
$$

所以投标者 i的最优选择 $\hat{c}_i \in [\widetilde{c}, \overline{c}]$ 是 c_i.

然后我们比较$x_i = d$ 与$x_i = \beta(c_i)$产生的期望回报的大小：

$$
\begin{aligned}
\Delta(c_i) &= EV(c_i, x_i = \beta(c_i)) - EV(c_i, x_i = d) \\
&= (1-F(c_i))^{n-1} + c_i \int_{\widetilde{c}}^{c_i} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{nF(\widetilde{c})}(1-(1-F(\widetilde{c}))^n) \\
&\quad + c_i \cdot \frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n - nF(\widetilde{c})(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{nF(\widetilde{c})\widetilde{c}}
\end{aligned}
$$

$\Delta(\widetilde{c})$ 等于 0，且如果 $c_i > \widetilde{c}$

$$
\begin{aligned}
\Delta'(c_i) &= \int_{\widetilde{c}}^{c_i} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n}{nF(\widetilde{c})\widetilde{c}} - \frac{(1-F(\widetilde{c}))^{n-2}}{\widetilde{c}} \\
&> \frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n}{nF(\widetilde{c})\widetilde{c}} - \frac{(1-F(\widetilde{c}))^{n-2}}{\widetilde{c}} \\
&= \frac{1}{n\widetilde{c}}(1+(1-F(\widetilde{c}))+\cdots+(1-F(\widetilde{c}))^{n-1} - n(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

这说明 $\Delta(\widetilde{c}) > 0$。也就是说，当投标人$i$的边际成本属于$[\widetilde{c}, \overline{c}]$时，$\beta(\cdot)$ 是他的最优反应。而且在临界值 $\widetilde{c}$上，投标人对于递交报价 $\widetilde{\beta}(\widetilde{c})$ 和 d 没有严格偏好关系。

对于 $\hat{c}_i < \widetilde{c}$，我们也能用同样的方法证明 $x = d$ 是最优反应。 $\blacksquare$

招标人的期望收益

$$
\begin{aligned}
ER(d) &= \sum_{i=1} ndF(\widetilde{c}) + \int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} \beta(c_i)\,\mathrm{d}F(c_i) \\
&= n[dF(\widetilde{c}) + \int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} \int_{c_i}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}F(c_i)] \\
&= n[dF(\widetilde{c}) + \int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} \int_{\widetilde{c}}^{y} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}F(c_i)\mathrm{d}y] \\
&= n[dF(\widetilde{c}) + \int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} (F(y)-F(\widetilde{c}))\frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)\,\mathrm{d}y] \\
&= n[\int_{\widetilde{c}}^{\overline{c}} \frac{1}{y}(n-1)(1-F(y))^{n-2} f(y)F(y)\,\mathrm{d}y + F(\widetilde{c})(\frac{1-(1-F(\widetilde{c}))^n}{nF(\widetilde{c})\widetilde{c}} - \frac{(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{\widetilde{c}})]
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$ $\square$

(三) 定理4.1的证明

如式子(11)所示，招标人的期望收益是他所宣布的报价上限的函数。接下来我们将证明它关于d严格单调递增。

将 $EV(d)$ 对 $\widetilde{c}$ 求微分，我们得到：

$$
\begin{aligned}
D_{\widetilde{c}}EV(d(\widetilde{c})) &= \frac{(1-F(\widetilde{c}))^n}{n\widetilde{c}^2} + \frac{F(\widetilde{c})(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{\widetilde{c}^2} - \frac{1}{n\widetilde{c}^2} \\
&= -\frac{1}{n\widetilde{c}^2}(1-(1-F(\widetilde{c}))^n) + \frac{F(\widetilde{c})(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}}{\widetilde{c}^2} \\
&= -\frac{1}{n\widetilde{c}^2}F(\widetilde{c})(1+(1-F(\widetilde{c}))+\cdots+(1-F(\widetilde{c}))^{n-1} - n(1-F(\widetilde{c}))^{n-1}) \\
&< 0
\end{aligned}
$$

这说明 $EV(d(\widetilde{c}))$ 关于 $\widetilde{c}$严格单调递减，又 $d(\widetilde{c})$ 也关于 $\widetilde{c}$严格单调递减，所以 $EV(d)$ 关于报价上限 d 严格单调递增。 $\square$

二、 术语表

c	边际成本
F (resp. f)	边际成本的累积分布（resp. 分布密度）函数
$[\underline{c}, \overline{c}]$	F的支撑集
x	报价
v	奖励的价值（规范化为1）
n	投标者总人数
N	全体投标者集合
i	投标者编号
m	报价等于最高报价的人数
d	报价上限
w	报价是否最高的示性函数
β	存在报价上限时的对称均衡报价
ER	存在报价上限时招标人的期望收益
EV	存在报价上限时投标人的期望回报
$\widetilde{\beta}$	不存在报价上限时的对称均衡报价
$\widetilde{ER}$	不存在报价上限时招标人的期望收益
$\widetilde{EV}$	不存在报价上限时投标人的期望回报
D	微分
Prob(win)	获胜的概率
$\widetilde{c}$	临界边际成本