报价上限能够控制破产率吗？

周煜
武汉大学经济与管理学院

摘要：我们研究了金融市场下的一价拍卖。在该拍卖中，具有预算约束的投标者将被允许进行融资和宣布破产等金融活动。招标者将宣布一个报价上限以限制投标者的报价行为。我们发现，报价上限对资源配置效率和破产率均具有一定的控制作用。当市场利率较低（低于某个阈值）时，如果不存在报价上限或是报价上限足够高，这场拍卖的获胜者将是自身拥有资产最少且破产几率的最高的投标者。但随着报价上限逐渐降低，相对较低的破产成本这一优势将逐渐消失。随之而来的是，自身拥有较多资产的投标者将有更高的几率成为这场拍卖的获胜者，并且破产几率逐渐降低。

关键词：一价拍卖; 报价上限; 不对称信息; 预算; 频谱拍卖

Abstract: We study a first-price auction with budget-constrained bidders in a setting that allows borrowing and declaring bankruptcy. Bids are bounded by a common bid cap determined by the organizer. We show that a large bid cap is not effective in lowering bankruptcy rate. A small bid cap is effective in lowering bankruptcy rate but also reduces the expected revenue.

1 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 拍卖与竞赛

拍卖在各种经济活动中都是相当盛行，常见的拍卖方式有两类：公开竞价和密封竞价。

其中一种公开拍卖是英式拍卖，也称为升价拍卖。该拍卖由一个拍卖师主持，他将宣布一个起始的最低报价，而价格将逐渐上升，无法接受该报价的人将把手放下，最后仅存的一个投标人胜利，并支付该价格。另一种公开拍卖是荷式拍卖，它与英式拍卖相反，是公开的降价拍卖，拍卖师宣布一个足够高的报价，为之后价格逐渐降低，直至有一个投标人将手举起，以示他愿意支付该价格。

相较与公开拍卖，拍卖理论研究人员更加关注密封拍卖，因为它的设定更加的容易理解与控制。其中一种密封拍卖是一价拍卖，它要求投标者将报价放置于一个密封的信封之中，递交上去，出价最高的人将获得胜利，得到物品，并需支付他的报价。而另一种二价拍卖，则是报价最高的投标者支付次高的报价。

拍卖之所以得以流行，一个重要的原因即是，招标者无法知道投标者对于该物品/奖励的内心估价，于是无法办到完全的价格歧视。正是这种信息的不对称或是私人信息的存在，才催生出了拍卖。

当然拍卖并非只有这简单的几种，还存在一种对拍卖的自然拓展：竞赛。一般来说，我们将竞赛定义为：许多决策者，为了争夺一个或者多个奖励，而投入不可逆转的且有消耗的资本或是劳动，最终，奖励的分配取决于每个个体的付出。竞赛理论中的奖励，不单单只包含狭义的奖金、奖牌等等，还包含声誉、升迁机会、生产许可

证等等隐性的且具有经济价值的“奖励”。竞赛理论一直都是社会、经济、农业等领域所关注的热点。当然，这并非当下的新兴理论，早在1902年，高尔顿在他的研究中，首次提出“如何更好的设立第一名与第二名的奖励方案？”这一问题，并引入独立同分布的随机变量来刻画无差异的竞争者，模型化这一现实问题。自此以后，竞赛广泛被经济学家所讨论，他们用理性的个体和他们的效用函数来刻画奖励的收益，并用厂商理论中的生产函数来刻画努力所产生的成本，于是将决策的重心放于获胜概率、期望收益与成本之间的权衡。不仅如此，随着博弈论的发展，竞赛理论又将博弈框架引入其中，来寻得最优报价策略的纳什均衡和最大化组织者期望收益的竞赛机制的设计。

更加客观来说，竞赛理论是拍卖理论的拓展与延伸。其中最为简洁且直观的一个拓展即为全支付拍卖（All-pay auction）。在全支付拍卖中，每个人所付出的成本即等于其报价（这是基于线性成本函数的假设，当然也不全然都是如此，Aner Sela 对此假设进行了放松，讨论了不同成本函数下的报价策略），而奖励的分配完全按照报价的大小排序进行。当然，竞赛理论还有其他丰富的模型，诸如：Tullock contest，tournament，online contest等等。

1.1.2 引入“shallow pockect”假设

在那些被广泛研究的拍卖和竞赛机制中，有一个重要的简化假设，即所有的投标者均有无限财富。当他们考虑一个报价是否能最大化自己的期望收益的时候，并不需要担心流动性约束，任何报价，他们都能够承担。这显然是为了模型的简化而引入的理想化假设，然而1996年，美国的C系列信号危机暗示了该假设的理论局限性。

1996年，美国联邦通讯委员会，公开拍卖C系列信号，并首次引入金融手段刺激此次拍卖，允许投标人延期支付其报价，而且只需为此支付低于市场的利率的时间成本。此次拍卖的结果出乎了所有人的意料，全部C系列信号的使用许可证拍卖总额为 100亿美元，这是之前的A系列和B系列的3倍。但胜利的喜悦并未持续太久，紧随其后的是狂喜后的悲剧。只有极少数的企业履行了约定支付了合约报价和利息，而绝大多数的企业因无法支付而宣布破产。而且由于破产程序的复杂性，使得联邦通讯委员会无法在短时间内收回许可证并进行再拍卖。

这场频谱拍卖引发的大面积破产，警示我们原本的拍卖假定理想化得不切实际。而我们将在本文中引入“shallow pocket”假设，即每个人将其有限的预算作为私人信息。

我们假设拍卖物品（后称之为奖励）的价值对于每个投标人一致，然而存在一定的风险，将有θ 的概率价值为0。

我们允许金融市场的进入，即投标人可以借助金融市场进行借贷，倘若希望给出一个超过自身预算的报价来增加胜算。并且我们允许投标人宣布破产，而破产的损失是他们的全部资产将被银行没收。

我们以一价拍卖为理论基础，在其中加入上述假设，并给出取决于预算约束和市场利率的破产决策、报价决策、期望收益与破产率。

1.1.3 引入报价上限降低破产率

在许多拍卖中，组织者设定了参加的门槛，例如，设立参加费用，即参加比赛之前需要交纳一定的保证金；或是设立报价的下限，即投标人所出的低于下限的报价将被视为违规行为，并给予严厉的追责处罚。这一规则最直观的应用就是综艺选秀，在最终的节目录制之前，将经过初步的海选，将能力不行滥竽充数的参赛者提前筛出，保证了平均的节目质量，并激励剩余参赛者发挥出最大的实力，呈现一场精彩纷呈的视觉上的饕餮盛宴。这一规则的设计目的与运行机制十分直观，即筛掉较低能力者，使余留下来的投标人的能力都在一个比较高的水平线之上，于是加强了竞价行为的竞争性，进一步提高了招标人的期望收益。

另一方面，例如体育赛事之中，另一种竞赛机制也被广泛的采用，即设立出价的上线，在西文上，拥有极其形象且意蕴丰富的名字—bid cap。它让一次竞赛或是拍卖投标者的能力更加的平均，营造了一个良好的竞争平衡性。

直观上看，设定上限远没有设立下限那么收效显著。一方面，一个有效的上限将显著地制约高能力者的报价，从这一角度来看将降低组织者的期望收益；而另一方面，从社会的资源分配角度来看，由于这一规则的介入，它将显著地降低高能力者拍得奖励的概率，从而降低整体社会的资源分配效率。于公于私，报价上限都似乎是一个不太好的机制设计。

但是，这一机制却时常被广泛应用到各类拍卖之中。例如在拳击比赛中，按体重将参赛者分为48、51至91公斤级。又如在围棋比赛中，将参赛者按年龄段分为不同的小组，具有相似棋龄的人将在一起同台竞技。

格兰披治一级方程式（简称：F1）大奖赛中，对于选手赛车的选择有一套具体的规则，其中一条即为最高时速315公里、最高排量12缸。这是对车辆性能的上限约束，使得赛事在控制了一系列客观因素之后，能着重体现选手的个人实力。

在NBA赛事中，为了使联盟水平更加的平均，不致使某一个队伍阵容配置远超其他队伍，而让比赛在进行之前即失去悬念，联盟对每个队伍给其球员的合约工资设立上限。在这一规定之下，即使是预算偏紧的球队也能以相对中等的价格招募到顶级球星。

这一机制，表面上制约了高能力者的实力发挥，但在另一层面上提高了整体比赛的质量，即平均期望报价。这是因为能力较弱的投标人，会因为能力强的投标人的报价收到制约，而认为自己如果增加报价，将有更多的机会获得胜利。相比之下，如果不存在这一上限，能力较弱的人，会认为不论自己如何在可接受的范围之内提高报价，都无法弥补能力之间的鸿沟，能力强的人总会递交一个他可承受范围之外的报价，而最终选择自暴自弃，报一个极低甚至退出拍卖。

于是，这一机制的重要特征即是，将原本极端的报价，变为了一个相对平均的报价。牺牲的能力高的投标人报高价的潜力，而换取能力相对较低的人报高价的可能。这是一个权衡取舍，一个恒久不变的经济问题的特征。

我们假设投标者不仅关注其期望收益，而且还关注金融市场的破产概率。我们将在上一小节所述的模型中，允许招标者宣布一个报价上限d，来禁止低破产成本（低预算）者，报一个虚高的报价，从而降低总的破产概率。我们还将看到，选择报价上限的行为是对于提升期望收益还是降低破产率的权衡取舍。

1.2 本文的结构安排

本文将讨论的中心定在引入报价上限是否能够降低破产率。

本文是建立在Charles Z. Zheng（2001）所提出的模型之上，该模型讨论了无报价上限时，不同预算的投标者的破产、报价行为。他发现在市场利率小于一个阈值时，报价函数关于预算单调递减，此时低预算者的获胜概率较高，这将导致极高的破产概率。而本文即假设是市场利率低于该阈值，探究报价上限与破产概率间的关系。

本文的第二部分将详细的介绍模型的设定。 n个投标人通过一价拍卖竞争一个不可分割的奖励，所谓不可分割指的是，该奖励最终只能分配给一个投标人。奖励的价值是一个随机变量，有（$1-\theta$）的概率为$\overline{v}$,而有θ的概率为0。这个分布是公有信息，但是直到招标人宣布最终胜者结果之前，所有人不知道奖励价值的实现值。

所有人拥有私人信息—个人预算。每个投标人对于对手的预算，将其视为服从一个特定分布的随机变量，而该分布为公有信息。组织者将公开宣布他所设定的报价上限。之后所有的投标人，将在同一时间背靠背报价，而由于报价上限的存在，每位投标人的报价不能超过这一设定值。报价可以超过其预算，因为允许投标人以外生的低于阈值的利率进行借款。而最后的奖励将分配给报价最高的投标人，如果多个人都出这一报价，则随机从中抽

取一位。在此之后，自然决定奖励价值的实际值，而胜者将宣布自己的破产决策。

当然这是我们扩展之后的模型，原始的不具有报价上限的模型时间线，将组织者宣布投标上限这一环节去除即可，当然你也可以将其理解为前一设定的特殊形式— 宣布一个无穷大的报价上限。

本文的第三部分，将参考Charles Z. Zheng（2001）的结论给出无报价上限的模型的均衡报价策略，并进行分析。另外，将求解存在报价上限的模型的均衡报价策略。

我们给出的标准（即无报价上限的）模型的均衡报价策略，是唯一的连续对称均衡报价。而求解的存在报价上限的情形下的均衡报价策略，是基于前面的所求出的无报价上限的策略，提出一个关于报价上限的报价策略。我们验证了它满足贝叶斯纳什均衡的要求。这一解的均衡特征是存在一个跳点，预算较低的人将用报价上限作为其报价，而预算较高的人将继续使用原来的报价策略。

最后我们计算了破产率关于报价上限的函数。

本文的第四部分，将基于破产率关于报价上限的函数，比较不同报价上限所带来的破产率的变化。

总结部分紧随其后，而所有复杂的证明过程我们全部放在附录部分。除了相关证明之外，附录部分还包含了全文模型的术语表以供查阅。

1.3 文献综述

Pitchik和Schotter（1988）研究了完全信息下且具有预算约束的情形下，序贯拍卖的均衡。他们指出，组织者的收益组成颇为复杂，而且取决于多次拍卖物品的出场顺序。他们考虑的是两个投标人和两个物品。

Laffont和Robert（1996）论证了在有限预算约束的情形之下，最大化组织者期望收益的最佳拍卖方式为设立了一个最低拍卖报价的全支付拍卖。他们模型中的预算约束即为一个报价上限，外生给定了一个固定的报价上限，且这个报价上限是共有信息。模型中的奖励价值服从一个特定的分布，即模型考虑的是不对称信息下的均衡，这一点和我们的模型一致。但是有一点不同，他们视报价上限为外生给定，而我们假设报价上限有竞赛的组织者控制，这一拓展让我们的模型设定更加的丰富，适用于更多的情形。

Che和Gale（1998a）以政治游说中的报价上限为引子，第一次公开地给出了报价上限的概念，并将其融入了现有的模型。他们假设只有两个招标者，且拥有完全的信息，即在报价之前，彼此就相互知道了对方对奖励的估价。这一点，与我们不同，我们考虑的是不对称信息下的均衡。他们求解出了在拥有外生报价上限的模型的均衡，并比较了在有无报价上限之间的差异。他们指出一个外生的报价上限，会降低高价值者赢的概率，同时会也使低价值者更加富有竞争性。除此之外，他们证明了，任何有效的外生报价上限都将会增加组织者的期望收益。但是另一方面，它增加了社会总的支出，降低了全社会的剩余。他们的结论跟我们的截然不相同，最关键的原因是：信息结构的不同，他们在完全信息角度入手，而我们则是基于不对称信息。

Che和Gale（1998b）考虑了在标准的不对称信息的拍卖框架下引入预算约束。在此模型的设定中，他们得到了对称均衡的诸多性质，例如连续性。然而囿于技术的复杂性，他们并未显示地计算出这一均衡。他们比较了不同拍卖机制下的组织者期望收益收益和社会福利。一价拍卖的期望收益和社会福利均要比二价拍卖更大。他们将这一结果归咎于不同价格机制下的预算约束起到的作用的差异。

Maskin（2000）期望寻求一个在存在预算约束时的最优的拍卖方式，这里的最优指的是最大化社会总剩余，而非组织者的期望收益。他证明了全支付拍卖在拥有预算约束和激励兼容约束时是最佳的拍卖选择，也即全支付拍卖方式是约束最优的竞价手段。他更深入地探究了其中的成因，即相比较于其他的拍卖方式，更少的人会报出他们的预算约束，即普遍报价偏低。

Charles Z. Zheng（2001）讨论了无报价上限时，不同预算的投标者的破产、报价行为。他发现在市场利率

小于一个阈值时，报价函数关于预算单调递减，此时低预算者的获胜概率较高，这将导致极高的破产概率。而当市场利率高于该阈值的时候，报价函数关于预算单调递增，此时高预算者的获胜概率高，而且总的破产概率较低。他还指出招标者可能会给出一个比市场利率低的利率来激励低预算者太高总体报价水平，增加拍卖的竞争性，从而提高期望收益。

Benoit和Krishna（2001）研究了完全信息下且具有预算约束的情形下，序贯拍卖的均衡。他们考虑的是多个投标人和两个物品。他们指出了预算约束将会有利于组织者提高他的期望收益，这个特点得益于多个时间段竞价公用一个预算约束，前一次的竞价的报价将会影响第二次竞价的报价。

Gavious,Moldovanu和Sela（2002）研究了在每个人的价值是私人信息但其分布是共有信息的设定下的全支付拍卖。他们引入了内生化的报价上限，这一点与我们的模型十分相似。不仅如此，他们考虑了各种不同的生产函数（成本函数），有别于以往的单一的线性函数，他们增加考察了凸函数与凹函数。他们指出当成本函数为线性与凹函数时报价上限将会损害组织者的期望收益率，这是因为高报价的边际成本不高，高报价本来出现的概率比较大，所以一个报价上限带来的收益远远不能弥补其带来的损失。而另一方面，如果成本函数是凸函数，情况恰好相反，一个合适的报价上限将会增加组织者的期望收益，当然受限于技术，他们并未显示地算出最优的报价上限，只是用其他的细节处理，比较了大小。我们的模型与他们的最大的不同是我们的不对称信息是随机的能力（边际成本），而非内心估值。

Moldovanu和Sela（2006）他们提出了一个新的不对称模型即随机的能力，并给出了多种奖励情形时的均衡报价，这一模型设定使我们的模型的基础。当然在我们的文章中将给出更加严谨的单一奖励的均衡报价的证明，仅仅只依赖于对称报价策略的假设。

Qiang Fu,Qian Jiao,和Jingfeng Lu（2014）在随机能力的设定之下，比较了完全信息（组织者披露投标者能力）和不完全信息（组织者隐瞒投标者能力）模型中的组织者的期望收益，并发现不论能力的分布如何，隐瞒投标者的能力都将会产生更高的期望总报价。

Bo Chen, Xiandeng Jiang和Dmitriy Knyazev（2017）考虑了在不完全信息的情形下的内生化的参赛行为的全支付拍卖。本文与其相似，均在标准化的不完全信息全支付拍卖的基础之上进行内生化外生变量的拓展。

2 无报价上限的模型

我们考虑$n \geq 2$个投标人通过一个一价拍卖竞争一个不可分割的奖励。我们将所有的投标人编号为投标人$1\cdots$ 投标人n，并将全部的投标人集合记为N。该奖励对于招标人的价值为0，而对于每个投标人，奖励的价值记为v，这是一个服从二项分布的随机变量。它有$1-\theta$ 的概率为 $\overline{v}$，而有θ 的概率为0。这个分布对于每个投标者而言都是公有信息，这也就是说，参数 $\overline{v}$ 和 θ 是公有信息。奖励的实际价值将在胜者支付了他的报价之后实现。

我们放弃了“deep pockets”的假设，而假设所有的投标人都拥有只有他们自己知道的预算，记为e。我们将其视为一种自然分配。而所有投标人将把除了自己以外的其他对手的边际成本视为如下过程所产生的结果：$e_j\ \forall j \neq i$ 是从所属集合$[\underline{e}, \overline{e}] \in (0, \infty)$ 中随机抽取出来的，而随机方式是由一个累积分布函数 F决定的，且每个投标人的分布相互独立且相同。我们假设累积分布函数F连续可微，并且将其概率密度函数记为f。为了之后解的存在性，与保证能够得到一个显示的解的表达式，我们假设$f(e) > 0$，任取$e \in [\underline{e}, \overline{e}]$。

首先，所有的投标人在同一时间背靠背的递交他们的报价$x \geq 0$。报一个大于他们自身预算约束的报价是被允许的。他们可以向银行借款，来补足报价与预算之间的差额 $(x_i - e_i)$。借款利率由金融市场外生决定，我们将其记为r。然而，为了方便起见，我们假设贷款是无利可图的一件事，即我们假设贷款利率为0。所以报价的成本

为：

$$c(x_i, e_i) = \begin{cases} x_i & \text{if } x_i \le e_i \\ x_i + r(x_i - e_i) & \text{if } x_i > e_i \end{cases} \tag{1}$$

最后奖励只将授予给报价最高者，如果存在多个人出至最高价，则在这些人中随机抽取一人作为获胜者，他们被抽取的概率相同。而获胜者需要支付他的报价，其他的人无需支付任何东西。

之后，胜者将会知道奖励价值最终的实现值，并决定是否宣布破产。如果宣布破产，他的所有的资产将被银行没收。

图2.1展示了整个拍卖过程的时间线。

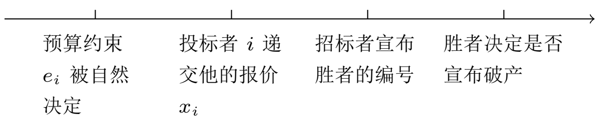

图 1: 没有报价上限时的时间线

在这个经济体中，银行起到了资本市场的作用，它降低了流动性约束，并且允许更多的资本流向此次拍卖之中。毋庸置疑，银行的介入，将会使得这场拍卖更加地具有竞争性，因为它的存在，使得投标者可以充分地利用他们自身的私人信息优势来决定报价的多少，而不需囿于他有限的预算。但是另一方面，预算极少的投标者，甚至是没有任何预算的投标者，将会踊跃的参加这场拍卖，而且还会报出一个出乎人意料的虚高的报价。这全是因为，他可以滥用金融市场的不完全性，成功融资，并且承担极小的破产成本。引理2.1帮助我们更清晰深入地看出第二种情况何时发生。

引理 2.1. *如果 v 的实现值是 $\overline{v}$, 则胜者将不会宣布破产。*

证明. 因为 $\{x_i \mid c(x_i, e_i) > \overline{v}\}$ 被 $x_i = 0$占优,

$$\text{payoff} \mid_{v=\overline{v}} = \begin{cases} \overline{v} - c(x_i, e_i) \ge 0 & \text{not default} \\ -e_i \le 0 & \text{default} \end{cases}$$

这说明不宣布破产弱占优于宣布破产。 □

引理 2.2. *如果v的实现值是 0, 那么只有当胜者有负债（向银行借款）, 他才会宣布破产。*

证明.

$$\text{payoff} \mid_{v=0} = \begin{cases} -c(x_i, e_i) & \text{not default} \\ -e_i & \text{default} \end{cases}$$

当胜者拥有负债, $x_i > e_i$, 此时有$c(x_i, e_i) = x_i + r(x_i - e_i) > x_i > e_i$。这说明胜者将会选择宣布破产。而当$x_i \le e_i$ 的时候，他将不会宣布破产。 □

根据引理2.1、引理2.2,我们可以发现破产只会发生在当胜者具有负债(i.e.$x_i > e_i$)且$v = 0$实现的情况下。我们进一步提出疑问，究竟是谁才会具有负债，是高预算者还是低预算者。直观上来看，高预算者不需要借款，因为他们的资金足够，而且没有必要去承担额外的时间成本（利率）。然而低预算者将会倾向于借款，因为这一方面会提高他获胜的概率，另一方面，他的破产成本较低。引理2.3将帮助我们筛选出那些永远不会去借款的投标人。

引理 2.3. *预算不小于 $(1-\theta)\overline{v}$的投标人, 他的报价x 将不会大于 e。*

证明. 具有预算 $e \geq (1-\theta)\overline{v}$的投标人, 当他们递交报价$x > e$,我们得到

$$
\begin{aligned}
V(x,e) &= (1-\theta)(\overline{v} - x - r(x-e)) - \theta e \\
&= (1-\theta)\overline{v} - (1-\theta)x - \theta e - (x-e)(1-\theta)r \\
&< (1-\theta)\overline{v} - e - (x-e)(1-\theta)r \\
&< 0
\end{aligned}
$$

又 $V(0,e)=0$，这说明任何的 $x > e$ 被 $x = 0$ 占优。 □

引理2.3告诉我们那些具有足够高的预算的投标人（具体来说，预算不低于奖励的期望价值），将永远不会递交一个高于自身预算的报价。

结合引理2.2与2.3，我们可以发现破产只会发生在那些预算约束小于$(1-\theta)\overline{v}$(i.e. 奖励的期望价值) 的投标人身上。

事实上，该拍卖的贝叶斯纳什均衡过于复杂，包含了众多的非单调的和不连续的报价策略。Charles Z.Zheng (2001) 将他的关注点集中于单调且连续的函数系中，并且找到了唯一的均衡解。他指出，当借款利率低于一个阈值$\frac{\theta}{1-\theta}$的时候，胜者是预算较低的投标人，而且有很高的概率宣布破产。而且此时报价函数在预算集 $[\underline{e},(1-\theta)\overline{v})$上严格单调递减，在预算集$[(1-\theta)\overline{v},\overline{e}]$ 上弱单调递减。而引理2.4即阐述了这个结论。

引理 2.4. *(Charles Z.Zheng, 2001). 当 $r \in [0,\frac{\theta}{1-\theta})$, 存在唯一的连续的对称的均衡:*

$$
\widetilde{\beta}(e) = \begin{cases} E_{e^L_{-i}}[\frac{\overline{v}+r'\min(e^L_{-i},(1-\theta)\overline{v})}{1+r} \mid e^L_{-i} > e] & \textit{if } \overline{e} \leq e < (1-\theta)\overline{v} \\ (1-\theta)\overline{v} & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{2}
$$

其中 $r' = r - \frac{\theta}{1-\theta}$ ， e^L_{-i} 表示投标人i全部对手的最低预算。

如果 $r \in [0,\frac{\theta}{1-\theta})$, 破产率将一直处于一个固定的高的值。

引理 2.5. *当 $r \in [0,\frac{\theta}{1-\theta})$, 破产率是 $\theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n]$。*

证明.

$$
\begin{aligned}
\text{Prob}(e^L < (1-\theta)\overline{v}) &= 1 - \text{Prob}(e^L \geq (1-\theta)\overline{v}) \\
&= 1 - \text{Prob}(e_i \geq (1-\theta)\overline{v}, \forall i \in N) \\
&= 1 - (1 - F((1-\theta)\overline{v}))^n
\end{aligned}
$$

然后我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{Bankruptcy rate} &= \theta \cdot \text{Prob}(e^L < (1-\theta)\overline{v}) \\
&= \theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n]
\end{aligned}
$$

□

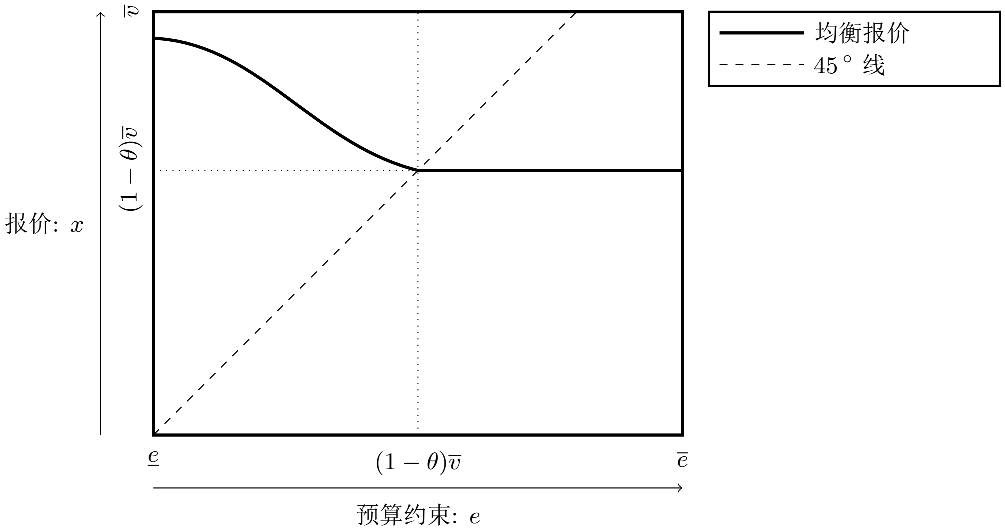

图 2: 无报价上限时的均衡报价策略

我们发现均衡报价中，没有一个人的报价将比奖励的期望价值小，这个“高报价与破产的赢家”的结果着实令人吃惊。不仅如此，此次拍卖的奖励的分配效率也达到了最差，即预算越低的投标者居然有更高的获胜概率。这一结果在图2.2中更加直观地展示了出来。

所有的这些奇怪的现象均是由于一个不完全的金融市场。金融机构无从得知这场拍卖的内部结构与细节，从而产生了不对称信息的困境，银行很难进行风险评估。外生的借款利率是由外部的整体经济体所决定，并非为此次拍卖量身定制，从而，该利率不能准确地反映这次拍卖的风险。如果外部的借款利率较低，具体而言，小于我们的阈值，将会激励一大批投机者拥入此次拍卖，并且给出一个令人惊讶的虚高的报价，这个报价将远大于该奖励的期望价值。他们利用杠杆降低他们的降低他们的破产成本，并且增加自身的获胜概率。然而，他们的狂热的报价策略将会引导本就有限的市场总资源大量流入一个小规模高风险的市场之中，好似上世纪美国的“黄金热”。当风险发生的时候，胜者将不能支付他所承诺的高额利息，于是他将宣布破产，一系列的破产程序接踵而至，而其中的差额将完全由银行承担。此时泡沫破裂，大量将资产储存于银行的投资者将产生恐慌情绪与挤兑行为，甚至致使银行破产也不无可能。这将会重创整体经济，造成恐慌、影响预期甚至降低信心。

3 存在报价上限的模型

接下来我们假设招标者不仅仅关心他的期望收益，还关注破产率。一个最为直接且方便的控制破产率的手段即为增加一个报价上限(记为 $d \geq 0$)。直观上来看，这种手段将会限制低预算者的不正常的过热行为，降低破产率。这个拓展的拍卖将以图3.1所示的顺序展开。

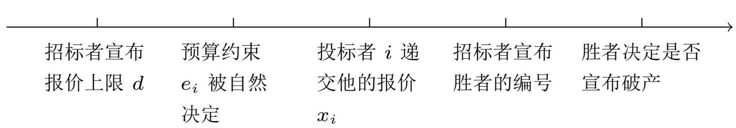

图 3: 存在报价上限时的时间线

正如图3.1所示，我们假设招标者在预算被自然决定之前宣布他所设的报价上限。这说明了报价上限d是公有信息。

首先，我们假设报价上限十分大，以致于它对于所有潜在的投标人的报价策略均没有任何约束性。我们称之为无效的报价上限。而此时一个标准的不存在报价上限的一价拍卖重新回到了我们的视线。

定理 3.1. 若 $r \in [0, \frac{\theta}{1-\theta})$ 且 $d > E_{e^L_{-i}}[\frac{\overline{v}+r'\min(e^L_{-i},(1-\theta)\overline{v})}{1+r}]$, 则该拍卖存在唯一的连续的对称均衡

$$\beta(e,d) = \widetilde{\beta}(e) = \begin{cases} E_{e^L_{-i}}[\frac{\overline{v}+r'\min(e^L_{-i},(1-\theta)\overline{v})}{1+r} \mid e^L_{-i} > e] & if\ \overline{e} \le e < (1-\theta)\overline{v} \\ (1-\theta)\overline{v} & otherwise \end{cases} \tag{3}$$

这里的 $r' = r - \frac{\theta}{1-\theta}$ ， e^L_{-i} 表示投标人i的全部对手的最低预算。此时破产率为 $\theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n]$.

证明.

$$\begin{aligned} \max_{e \in [\underline{e},\overline{e}]} \widetilde{\beta}(e) &= \widetilde{\beta}(\underline{e}) \\ &= E_{e^L_{-i}}[\frac{\overline{v}+r'\min(e^L_{-i},(1-\theta)\overline{v})}{1+r}] \end{aligned}$$

因此, 如果 $d > E_{e^L_{-i}}[\frac{\overline{v}+r'\min(e^L_{-i},(1-\theta)\overline{v})}{1+r}]$, 那么报价上限没有实际效力。根据引理2.0.4, 连续的对称均衡存在且唯一, 而且

$$\beta(e,d) = \widetilde{\beta}(e)$$

因为每个投标人的报价策略与没有没有报价上限的情形一致，所以破产率维持原来的值不变，即为：

$$\text{Bankruptcy rate}(d) = \theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n]$$

□

图3.2展示了这个结论。

我们现在考虑有实际作用的报价上限的情形。

定理 3.2. 如果 $r \in [0, \frac{\theta}{1-\theta})$ ， $(1-\theta)\overline{v} < d \le E_{e^L_{-i}}[\frac{\overline{v}+r'\min(e^L_{-i},(1-\theta)\overline{v})}{1+r}]$。则该报价上限产生实际效力，而且存在一个对称的单调的均衡：

$$\beta(e_i,d) = \begin{cases} d & if \underline{e} \le e_i < \widetilde{e} \\ \widetilde{\beta}(e_i) & if \widetilde{e} \le e_i < (1-\theta)\overline{v} \\ (1-\theta)\overline{v} & if (1-\theta)\overline{v} \le e_i \le \overline{e} \end{cases} \tag{4}$$

且破产率为：

$$Bankruptcy\ rate(d) = \theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n] \tag{5}$$

这里的关于报价上限的临界预算函数 $\widetilde{e} = \widetilde{e}(d)$ 严格单调递减, 具体为

$$d = \frac{nF(\widetilde{e})(1-F(\widetilde{(e)}))^{n-1}}{1-(1-F(\widetilde{e}))^n}[\beta\widetilde{e} - \frac{\overline{v}+r'\widetilde{e}}{1+r}] + \frac{\overline{v}+r'\widetilde{e}}{1+r} \tag{6}$$

其中 $r' = r - \frac{\theta}{1-\theta}$

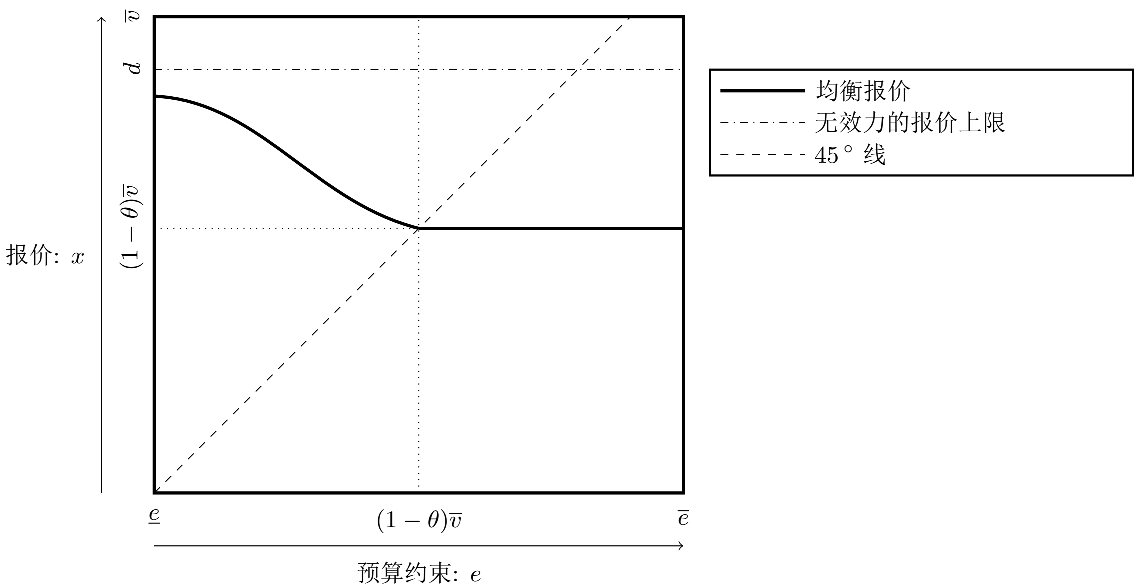

图 4: 存在报价上限时的均衡报价: $d > \widetilde{\beta}(\underline{e})$

证明. 详见附录。 □

定理3.2揭示了报价上限会降低原报价超过上限的人的实际报价，然而，它也会激励之前报价略低于上限的人，将其报价增加至上限d。但是令我们沮丧的是，没有上限时的具有负债的投标人依然需要借款。这个事实告诉我们，破产率将维持原来的高水平不变，这个报价上限不起作用。

图3.3揭示了这个事实。

接下来，我们假设招标者继续降低报价上限，具体而言，低于奖励的期望价值。这一相对低的报价上限不仅会影响原本负债的投标人，还会影响预算大于奖励期望价值的那些投标人。

定理 3.3. *若 $r \in [0, \frac{\theta}{1-\theta})$，$0 < d \leq (1-\theta)\overline{v}$. 则该报价上限产生实际效力，而且存在一个对称的单调的均衡：*

$$\beta(e_i, d) = d \ \ \forall e_i \in [\underline{e}, \overline{e}] \tag{7}$$

且破产率为：

$$Bankruptcy\ rate(d) = \theta F(d) \tag{8}$$

这是一个关于报价上限严格单调递增的函数。

证明. 详见附录。 □

定理3.3揭示了，如果我们设立一个小于奖励期望价值的报价上限，破产率将会被控制，且上限越低，破产率越低。这个结论满足我们的需求，而且只要我们一直减少报价上限直至等于最低预算$\underline{e}$，破产率将等于0。但不幸的是，当报价上限降低时，拍卖的竞争性将被削弱，而且投标人之间的差异将逐渐消失。最终这些改变将降低招标者的期望收益。这说明报价上限的决定，需要考量期望收益与破产率之间的权衡取舍。图3.4展示了这个结果。

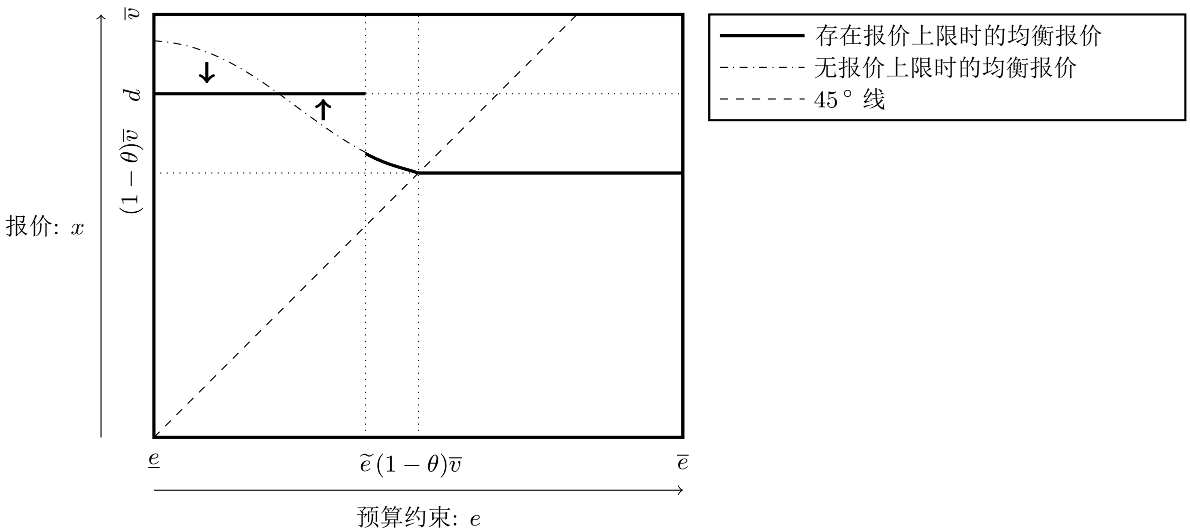

图 5: 存在报价上限时的均衡报价: $(1-\theta)\overline{v} < d \leq \widetilde{\beta}(\underline{e})$

4 破产率与报价上限的关系

根据定理3.1-3.3, 我们可以得到

$$\text{Bankruptcy rate}(d) = \begin{cases} \theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n] & \text{if } d > (1-\theta)\overline{v} \\ \theta F(d) & \text{if } 0 < d \leq (1-\theta)\overline{v} \end{cases} \tag{9}$$

这是一个弱单调递增的函数，它拥有一个不连续点$d=(1-\theta)\overline{v}$。为了更严谨地看出这一点，我们计算了该点的两个方向导数：

$$\begin{aligned} \lim_{d\to(1-\theta)\overline{v}^+} \text{Bankrutpcy rate}(d) &= \theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))^n] \\ &> \theta[1-(1-F((1-\theta)\overline{v}))] \\ &= \theta F((1-\theta)\overline{v}) \\ &= \lim_{d\to(1-\theta)\overline{v}^-} \text{Bankrutpcy rate}(d) \end{aligned}$$

在点 $d=(1-\theta)\overline{v}$处, 函数的右导数比左导数大，因此存在一个向上的跳跃。图4.1展示了这一事实。

5 总结

本文首先阐述引入了投标者的预算约束和金融市场的一价拍卖，如果外生利率小于一个阈值，则均衡具有“高报价与破产的胜者”的特征和一个关于预算单调递减的报价函数。不仅如此，拍卖的奖励的分配效率也达到了最差，即预算越低的投标者居然有更高的获胜概率。

随后，关注一个既关注期望收益又关注破产率的招标者。考虑他将设定一个报价上限。我们求得了存在报价上限的拍卖的对称均衡，并由此得到了关于报价上限的破产率函数。进一步，我们发现随着报价上限的减少，破

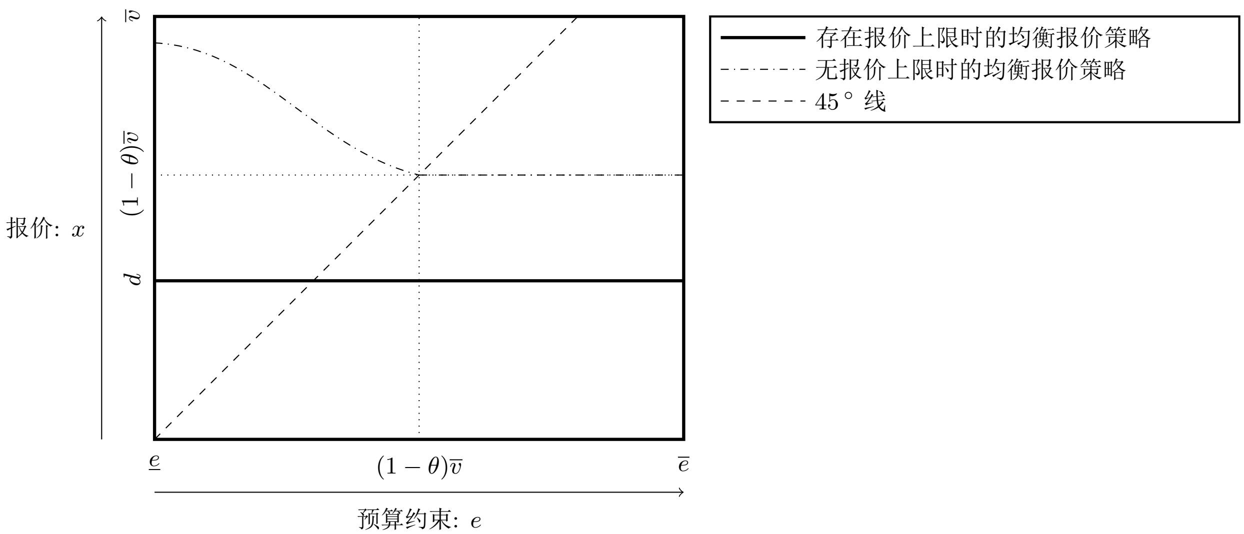

图 6: 存在报价上限时的均衡报价策略: $0 \leq d \leq (1-\theta)\overline{v}$

产率也随之降低。然而，与此同时，招标者的期望收益也随之减少。则对于招标者而言，他需要在增加期望收益与降低破产率之间权衡，并选择最佳的报价上限。

关于这个话题进一步的拓展，可能在给出期望收益与破产率的统一衡量方式，来确定最佳的报价上限。

参考文献

[1] B. Chen, X. Jiang and D. Knyazev. On Disclosure Policies in All-pay Auctions with Stochastic Entry [J]. Journal of Mathematical Economics, 2017, 70: 66-73.

[2] Baye, M.R., Kovenock, D., De Varies, C.G.. Rigging the Lobbying Process: An Application of the All-Pay Auction [J]. American Economic Review, 1993, 83: 289-294.

[3] Benoit, J.-P., Krishna, V.. Multiple-Object Auctions with Budget Constrainted Bidders [J]. Review of Economic Studies, 2001, 68: 155-180.

[4] Charles Z. Zheng. High Bids and Broke Winners [J]. Journal of Economic Theory, 2001, 100: 129-171.

[5] Che, Y.-K., Gale, I.L.. Caps on Political Lobbying [J]. American Economic Review, 1998a, 88: 643-651.

[6] Che, Y.-K., Gale, I.L.. Standard Auctions with Financially Constrained Bidders [J]. Review of Economic Studies, 1998a, 65: 1-21.

[7] Gavious, A., Moldovanu, B., Sela, A.. Bid Costs and Endogenous Bid Caps [J]. The RAND Journal of Economics, 2002, 33: 709-722.

[8] Hillman, A.L., Riley, J.G.. Politically Contestable Rents and Transfers [J]. Economics and Politics, 1989, 1: 17-39.

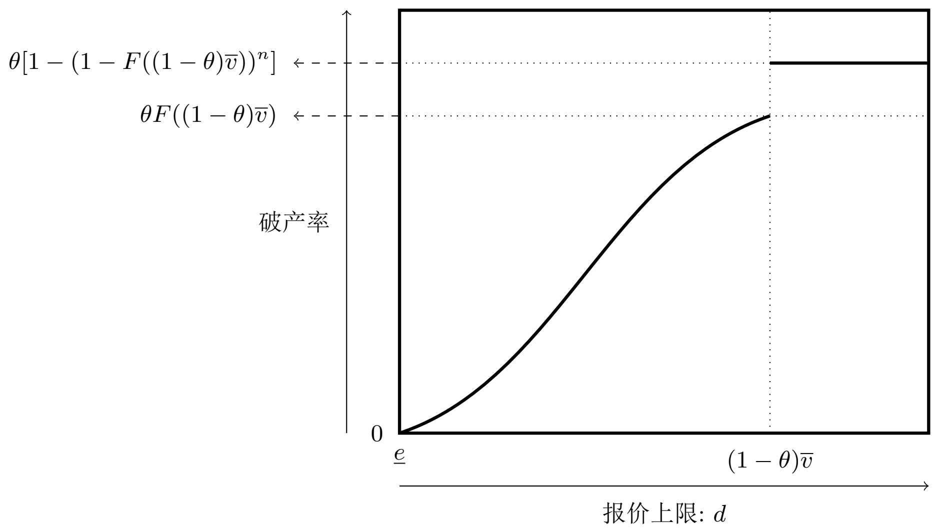

图 7: 关于报价上限的破产率函数

[9] Laffont, J.-J., Robert, J.. Optimal Auction with Financially Constrained Bidders [J]. Economics Letters, 1996, 52: 182-186.

[10] Maskin, E.S.. Auctions, Development, and Privatization: Efficient Auctions with Liquidity-Constrained Buyers [J]. European Economic Review, 2000, 44: 667-681.

[11] Moldovanu, B., Sela, A., Contests architecture [J]. Journal of Economic Theory, 2006, 126: 70-96.

[12] Pitchik, C., Schotter, A.. Perfect Equilibria in Budget-Constrained Sequential Auctions: An Experimental Study [J]. RAND Journal of Economics, 1988, 19: 363-388.

[13] Qiang Fu, Qian Jiao, Jingfeng Lu. Disclosure policy in a multi-prize all-pay auction with stochastic abilities [J]. Economics Letters, 2014, 125: 376-380.

[14] Vojnovic, M.. Contest Theory: Incentive Mechanisms and Ranking Methods [M]. Cambridge University Press, 2015.

附录

A 定理的证明

A.1 定理3.2的证明

在这种情形之下, $\widetilde{\beta}(\cdot)$ 不再是均衡的报价策略, 这是因为 $\widetilde{\beta}(\underline{e})$ 比报价上限 d大, 而这是不允许发生的。我们称式子(4) 与 (6) 是投标人 i 的最佳反应。

d 与 $\widetilde{e}$的关系

$$\lim_{\widetilde{e}\to\underline{e}} d(\widetilde{e}) = [\lim_{\widetilde{e}\to\underline{e}} \frac{nF(\widetilde{e})}{1-(1-F(\widetilde{e}))^n}][\beta\underline{e} - \frac{\overline{v}+r'\underline{e}}{1+r}] + \frac{\overline{v}+r'\underline{e}}{1+r}$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{\widetilde{e}\to\underline{e}} \frac{nF(\widetilde{e})}{1-(1-F(\widetilde{e}))^n} &= lim_{y\to 1}\frac{n(1-y)}{1-y^n}\\ &= lim_{y\to 1}\frac{-n}{-ny^{n-1}}\\ &= 1\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\widetilde{e}\to\underline{e}} d(\widetilde{e}) = \widetilde{\beta}(\underline{e})$$

因为 $\lim_{\widetilde{e}\to(1-\theta)\overline{v}} \frac{\overline{v}+r'\underline{e}}{1+r} = (1-\theta)\overline{v} = \widetilde{\beta}((1-\theta)\overline{v})$, 我们可以得到

$$\lim_{\widetilde{e}\to(1-\theta)\overline{v}} d(\widetilde{e}) = (1-\theta)\overline{v}$$

另外, d 关于 $\widetilde{e}$ 严格单调递减, 这是因为：

$$\begin{aligned}d'(\widetilde{e}) &= (1-(1-F(\widetilde{e}))^n - nF(\widetilde{e})(1-F(\widetilde{e}))^{n-1})[\frac{nf(\widetilde{e})(1-F(\widetilde{e}))^{n-1}}{(1-(1-F(\widetilde{e}))^n)^2}\cdot(\widetilde{\beta}(\widetilde{e}) - \frac{\overline{v}+r'\widetilde{e}}{1+r})\\ &+ \frac{1}{1-(1-F(\widetilde{e}))^n}\cdot\frac{r'}{1+r}]\\ &< 0\end{aligned}$$

注意：

$$\begin{aligned}
&1-(1-F(\widetilde{e}))^n-nF(\widetilde{e})(1-F(\widetilde{e}))^{n-1}\\
=&F(\widetilde{e})[\frac{1-(1-F(\widetilde{e}))^n}{F(e)}-n(1-F(\widetilde{e}))^{n-1}]\\
=&F(\widetilde{e})[1+(1-F(\widetilde{e}))+\cdots+(1-F(\widetilde{e}))^{n-1}-n(1-F(\widetilde{e}))^{n-1}]\\
<&0
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\beta}(\widetilde{e})-\frac{\overline{v}+r'\widetilde{e}}{1+r}<0$$

$$\frac{r'}{1+r}<0$$

∎

对于 $e \geq (1-\theta)\overline{v}$，$\beta(\cdot)$是最佳反应的证明 根据引理2.3, 我们知道 $x<e$, for all $e \geq (1-\theta)\overline{v}$。则我们可以得到，如果 $x<\beta(e,d)=(1-\theta)\overline{v}$, 那么：

$$EV(x,e)=V(x,e)\cdot \mathrm{Prob}_\beta(\mathrm{win}\mid x)=0$$

如果 $(1-\theta)\overline{v}=\beta(e,d)<x\leq e$, 那么：

$$\begin{aligned}
EV(x,e)&=V(x,e)\cdot \mathrm{Prob}_\beta(\mathrm{win}\mid x)\\
&=[(1-\theta)(\overline{v}-x)-\theta x]\cdot \mathrm{Prob}_\beta(\mathrm{win}\mid x)\\
&<0
\end{aligned}$$

综上所述, 对于 $e \geq (1-\theta)\overline{v}$，$\beta(\cdot)$是最佳反应。

对于 $\widetilde{e} \leq e < (1-\theta)\overline{v}$，$\beta(\cdot)$是最佳反应的证明 $\forall e_i \in [\widetilde{e},(1-\theta)\overline{v}]$, $e_i \in (\beta(\widetilde{e}),d)$ 不会是最佳反应, 因为它们被$\beta(\widetilde{e})$占优。因为 $\beta([\underline{e},(1-\theta)\overline{v}])=[0,d]\setminus(\beta(\widetilde{e}),d)$, 我们可以将投标者 i的行为视为选择冒充 $\hat{e}$，然后递交报价 $\beta(\hat{e})$。如果他选择冒充 $\hat{e}$ ，他的期望回报为

$$EV(e_i,\hat{e}_i)=\begin{cases}[(1-\theta)(\overline{v}-r(\beta(\hat{e})-e_i)-\beta(\hat{e}))-\theta e_i]\cdot(1-F(\hat{e}))^{n-1} & \text{if } \hat{e}_i\geq\widetilde{e}\\ [(1-\theta)(\overline{v}-r(d-e_i)-d)-\theta e_i]\cdot\frac{1}{nF(\widetilde{e})}\cdot(1-(1-F(\widetilde{e}))^n) & \text{if } \hat{e}_i<\widetilde{e}\end{cases}$$

对于 $\hat{e}_i \geq \widetilde{e}$:

$$D_2EV(e_i,\hat{e}_i)=(1-\theta)(n-1)f(\hat{e})(1-F(\hat{e}))^{n-2}r'(\hat{e}-e)$$

因此，我们可以得到

$$D_2EV(e_i,\hat{e}_i)=\begin{cases}>0 & \text{if } \widetilde{e}\leq\hat{e}_i<e_i\\ =0 & \text{if } \hat{e}_i=e_i\\ <0 & \text{if } e_i<\hat{e}_i\leq(1-\theta)\overline{v}\end{cases}$$

所以投标者 i 的最优的决策 $\hat{e}_i \in [\widetilde{e}, (1-\theta)\overline{v}]$ 是 e_i。

然后我们比较$x_i = d$ 与$x_i = \beta(e_i)$产生的期望回报的大小：

$$
\begin{aligned}
\Delta(e_i) &= EV(e_i, x_i = \beta(e_i)) - EV(e_i, x_i = d) \\
&= [(1-\theta)(\overline{v} - r(\beta(e_i) - e_i) - \beta(e_i)) - \theta e_i](1 - F(e))^{n-1} \\
&\quad - [(1-\theta)(\overline{v} - r(d - e_i) - d) - \theta e_i]\frac{1}{nF(\widetilde{e})}(1 - (1 - F(\widetilde{e}))^n)
\end{aligned}
$$

$\Delta(\widetilde{e})$ 等于 0, 且如果 $e_i > \widetilde{e}$

$$
\begin{aligned}
\Delta'(e_i) &= [(1-\theta)r'][(1 - F(e_i))^{n-1} - \frac{1 - (1 - F(\widetilde{e}))^n}{nF\widetilde{e}}] \\
&> [(1-\theta)r'][(1 - F(\widetilde{e}))^{n-1} - \frac{1 - (1 - F(\widetilde{e}))^n}{nF\widetilde{e}}] \\
&= -[(1-\theta)r']\frac{1}{n}[1 + (1 - F(\widetilde{e})) + \cdots (1 - F(\widetilde{e}))^{n-1} - n(1 - F(\widetilde{e}))^{n-1}] \\
&> 0
\end{aligned}
$$

这说明 $\Delta(e_i) > 0$。也就是说, 对于预算处于区间 $[\widetilde{e}, (1-\theta)\overline{v}]$内的投标人,$\beta(\cdot)$是最佳反应。而且处于临界点 $\widetilde{e}$处的投标人对于递交报价 $\widetilde{\beta}(\widetilde{e})$ 和 d 没有严格偏好关系。

对于 $\underline{e} \leq e_i < \widetilde{e}$, 可以用同样的方法证明 $x = d$ 是他们的最佳反应。 ▮ □

A.2 定理3.3的证明

对于$0 < d \leq (1-\theta)\overline{v}$，$\beta(\cdot)$是最佳反应的证明　假设 $0 < d \leq (1-\theta)\overline{v}$, 我们现在来证明 $\beta(e) = d\, \forall e \in [\underline{e}, \overline{e}]$ 对于每个投标人均是最佳反应。

假设投标人 i 递交报价 $x_i < d$, 且她的对手均按照策略 $\beta(e)$报价, 那么他的获胜概率为 $\text{Prob}_\beta(\text{win} \mid x_i) = 0$。这导致他的期望回报为0。如果我们能够按照 $x_i = d$ 报价，所有投标者的期望收益不小于0, 那么我们就证明了这一定理。

我们将证明分两块, 先证明 $e \geq d$的投标人, 再证明 $e < d$的投标人。

对于预算满足 $e \geq d$ 的投标人i:

$$
\begin{aligned}
EV(e, d) &= V(e, d) \cdot \text{Prob}_\beta(\text{win} \mid x = d) \\
&= [(1-\theta)\overline{v} - d] \cdot \frac{1}{n} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

对于预算满足$e < d$的投标人i:

$$
\begin{aligned}
EV(e,d) &= V(e,d)\cdot \mathrm{Prob}_{\beta}(\text{win} \mid x = d) \\
&= [(1-\theta)(\overline{v} - d - r(d-e)) - \theta e]\cdot \frac{1}{n} \\
&> [(1-\theta)\overline{v} - (1-\theta)^2\overline{v}(1+r) + (1-\theta)re - \theta e]\cdot \frac{1}{n} \\
&= [-(1-\theta)r'((1-\theta)\overline{v} - e)]\cdot \frac{1}{n} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

破产率的计算 假设 $0 < d \leq (1-\theta)\overline{v}$, 我们现在来计算关于报价上限的破产率函数

$$
\begin{aligned}
\text{Bankrutpcy rate}(d) &= [\sum_{m=0}^{n} C_n^m F(d)^m (1-F(d))^{n-m}\frac{m}{n}]\theta \\
&= [\sum_{m=0}^{n} C_{n-1}^{m-1} F(d)^m (1-F(d))^{n-m}]\theta \\
&= [\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} F(d)^m (1-F(d))^{n-m}]\theta \\
&= F(d)[\sum_{m-1=0}^{n-1} C_{n-1}^{m-1} F(d)^{m-1} (1-F(d))^{n-m}]\theta \\
&= F(d)\theta
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$ $\square$

B 术语表

e	预算约束
F (resp. f)	预算的累积分布 (resp. 分布密度) 函数
$[\underline{e}, \overline{e}]$	F 的支撑集
x	报价
v	奖励的价值
$\overline{v}$	奖励的最高价值
θ	$v = 0$ 的概率
n	投标者的总人数
N	全体投标者集合
i	投标者编号
d	报价上限
β	存在报价上限时的对称均衡报价

ER	存在报价上限时招标人的期望收益
V	胜者的期望回报
EV	存在报价上限时投标人的期望回报
$\widetilde{\beta}$	不存在报价上限时的对称均衡报价
$\widetilde{ER}$	不存在报价上限时招标人的期望收益
$\widetilde{EV}$	不存在报价上限时投标人的期望回报
D	微分
Prob(win)	获胜的概率
$\widetilde{e}$	临界预算