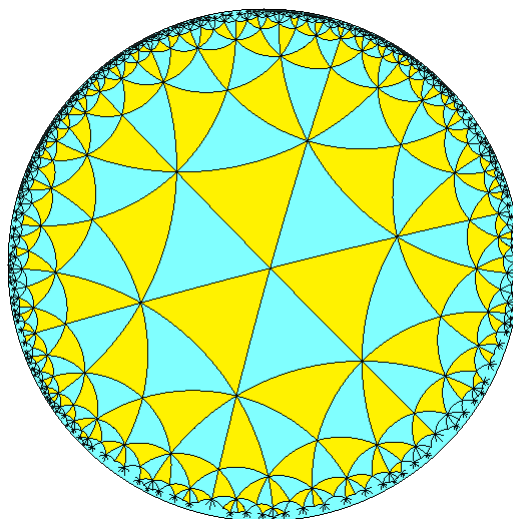


# Introdução aos Grupos Fuchsianos

KELVYN WELSCH

ORIENTADOR: RODRIGO BISSACOT



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Requisitos</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Teoria de Grupos</b>	<b>11</b>
1.1	Homomorfismos . . . . .	11
1.2	Classes de Conjugação e Subgrupos Normais . . . . .	12
1.3	Cosets e Grupo Quociente . . . . .	13
1.4	Homomorfismo Revisitado . . . . .	15
1.5	Comutatividade . . . . .	16
1.6	Ações de Grupos . . . . .	18
1.6.1	Ações descontínuas em espaços topológicos . . . . .	22
1.7	Grupos de Simetria . . . . .	22
1.8	Geradores . . . . .	22
1.9	Grupos Livres . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Topologia</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>Conexidade</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Grupos Topológicos</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Alguns Grupos de Matrizes</b>	<b>35</b>

5.1	O grupo $SL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	35
5.2	Grupos Projetivos . . . . .	35
5.3	O grupo $PGL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	39
5.4	O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Análise Complexa</b>	<b>41</b>
6.1	A Esfera de Riemann . . . . .	41
6.2	Círculos e Retas . . . . .	43
6.3	Funções Racionais . . . . .	43
6.4	Transformações de Möbius . . . . .	44
<b>II</b>	<b>Grupos Fuchsianos</b>	<b>47</b>
<b>7</b>	<b>Introdução à Geometria Hiperbólica</b>	<b>49</b>
7.1	O Espaço Hiperbólico . . . . .	49
7.2	Um nada de Variedades Riemannianas . . . . .	50
7.2.1	Distância . . . . .	50
7.2.2	Diferenciais . . . . .	53
7.2.3	Áreas . . . . .	54
7.3	Revisão de Geometria Euclidiana . . . . .	55
7.4	O Semiplano . . . . .	57
7.4.1	Algumas isometrias . . . . .	61
7.4.2	Geodésicas . . . . .	62
7.4.3	O Grupo de Isometrias . . . . .	66
7.4.4	Área . . . . .	70
7.4.5	Mais sobre a distância . . . . .	71

7.5	O Disco de Poincaré . . . . .	71
7.5.1	Isometrias . . . . .	73
7.5.2	Geodésicas . . . . .	73
7.5.3	Área . . . . .	73
7.6	O hiperboloide . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Grupos Fuchsianos</b>	<b>75</b>
8.1	Polígonos . . . . .	75
8.2	Grupos Fuchsianos . . . . .	76



# Introdução

Este texto visa a introduzir o conceito e algumas propriedades dos grupos fuchsianos. Especificamente, nosso objetivo último é provar alguns resultados sobre a dimensão Hausdorff do conjunto limite de grupos fuchsianos de segundo tipo, resultado este devido a Patterson [ref]. Grupos fuchsianos são uma classe de grupos que possuem ligações com diversas áreas da matemática, tais quais geometria hiperbólica, geometria projetiva e análise complexa. Os grupos fuchsianos foram nomeado em homenagem a Lazarus Fuchs (1833-1902), sendo Poincaré o primeiro a se debruçar mais profundamente sobre o estudo deles.

A fim de termos um melhor aproveitamento sobre o assunto, o texto será dividido em duas partes. Na primeira, iremos recordar alguns resultados básicos de teoria de grupos, topologia, grupos topológicos e análise complexa. Na segunda parte, voltada mais diretamente para os nossos propósitos, daremos um panorama geral sobre geometria hiperbólica antes de lidarmos com os grupos fuchsianos propriamente ditos. Naturalmente, leitores mais confortáveis com os requisitos podem pular esta parte introdutória. De modo geral, espera-se que o leitor saiba, no mínimo, a definição de um grupo e de uma topologia.





# Parte I

## Requisitos



# Capítulo 1

## Teoria de Grupos

### 1.1 Homomorfismos

**Definição 1.1.** Sejam  $(G, \cdot)$ ,  $(H, *)$  grupos. Uma função  $h : G \rightarrow H$  é dita um *homomorfismo de grupos* se  $h(a \cdot b) = h(a) * h(b)$ ,  $\forall a, b \in G$ . Quando um homomorfismo é injetivo, sobrejetivo e bijetivo, dizemos que é um monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo, respectivamente. Quando o domínio e o contradomínio são idênticos, dizemos que se trata de um endomorfismo. Um automorfismo é um endomorfismo que também é um isomorfismo. ♣

Dizemos que um homomorfismo de grupos é uma função que preserva a estrutura de grupo. A razão para isto é a que se segue. Por definição, um homomorfismo preserva a operação de grupo. Além disso, a proposição abaixo nos diz que o elemento neutro e a operação de elemento inverso também são preservadas. Em outras palavras, um homomorfismo mapeia elemento neutro em elemento neutro e o homomorfismo do inverso é o inverso do homomorfismo.

A partir de agora iremos deixar de enfatizar e distinguir os símbolos das operações dos grupos, pelo bem da sanidade mental.

**Proposição 1.1.** Sejam  $G, H$  grupos e  $h : G \rightarrow H$  um homomorfismo. Se  $e_G$  e  $e_H$  são os elementos neutros de  $G$  e  $H$ , respectivamente, vale que  $h(e_G) = e_H$ . Além disso, se  $g \in G$ , então  $h(g^{-1}) = h(g)^{-1}$ . □

*Demonstração.* Tome  $g \in G$ , qualquer. Teremos que  $g = e_G \cdot g \implies h(g) = h(e_G) \cdot h(g) \implies h(g) \cdot h(g)^{-1} = h(e_G) \cdot h(g) \cdot h(g)^{-1} \implies e_H = h(e_G) \cdot e_H \implies e_H = h(e_G)$ .

Usando isso,  $e_G = g \cdot g^{-1} \implies e_H = h(g) \cdot h(g^{-1}) \implies h(g)^{-1} = h(g)^{-1} \cdot h(g) \cdot h(g^{-1}) = e_H \cdot h(g^{-1}) = h(g^{-1}) \implies h(g)^{-1} = h(g^{-1})$ . ■

**Definição 1.2.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos e  $h : G \rightarrow H$  um homomorfismo. O *núcleo* de  $h$  é o conjunto  $\ker h$  definido por  $\ker h := \{g \in G; h(g) = e_H\}$ . A *imagem* de  $h$  é o conjunto  $\text{Im } h := \{b \in H; \exists g \in G \text{ com } h(g) = b\}$  ♣

**Proposição 1.2.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos e  $h : G \rightarrow H$  um homomorfismo. Vale que  $\ker h$  é subgrupo de  $G$  e  $\text{Im } h$  é subgrupo de  $H$ . □

*Demonstração.* Vejamos que  $\ker h$  é subgrupo de  $G$ . Basta mostrarmos que, se  $g, f \in \ker h$ , arbitrários, então  $gf \in \ker h$  e  $g^{-1} \in \ker h$ . Pela proposição 2.1,  $e_H = h(e_G) = h(gg^{-1}) = h(g)h(g^{-1})$ . Mas  $h(g) = e_H$ , donde  $e_H = e_H h(g^{-1}) \implies h(g^{-1}) = e_H$  e assim  $g^{-1} \in \ker h$ . Se, ainda,  $f \in \ker h$  então  $h(gf) = h(g)h(f) = e_H e_H = e_H \implies h(gf) = e_H$ , donde  $gf \in \ker h$ . Vejamos agora que  $\text{Im } h$  é subgrupo de  $H$ . Seja  $g \in \text{Im } h$ . Então existe  $a \in G$  tal que  $g = h(a)$ . Ora,  $h(a^{-1}) = h(a)^{-1} = g^{-1}$ , donde existe um elemento de  $G$  (a saber,  $a^{-1}$ ) tal que  $g^{-1}$  é sua imagem. E portanto  $g^{-1} \in \text{Im } h$ . Suponhamos, ainda, que  $f \in \text{Im } h$ . Mostrarei que  $gf \in \text{Im } h$ . Por definição, existe um  $b \in G$  tal que  $h(b) = f$ . Teremos:  $h(ab) = h(a)h(b) = gf$ . Assim, existe um elemento de  $G$  (a saber,  $ab$ ) tal que  $h(ab) = gf$ , e portanto  $gf \in \text{Im } h$ . Desta forma, concluímos a nossa demonstração. ■

**Proposição 1.3.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos e  $\theta : G \rightarrow H$  um homomorfismo. Dado  $M, N \in G$ , vale que  $\theta(M) = \theta(N) \iff MN^{-1} \in \ker \theta$ . □

*Demonstração.*  $\theta(M) = \theta(N) \iff \theta(M)\theta(N)^{-1} = e_H \iff \theta(MN^{-1}) = e_H \iff MN^{-1} \in \ker \theta$ . ■

## 1.2 Classes de Conjugação e Subgrupos Normais

**Definição 1.3.** Seja  $G$  um grupo. Dois elementos  $a, b \in G$  são ditos *conjugados* se existe  $g \in G$  tal que  $gag^{-1} = b$  ♣

**Proposição 1.4.** Seja  $G$  um grupo. A relação  $\sim$  tal que  $a \sim b$  se, e somente se  $a$  e  $b$  forem conjugados é uma relação de equivalência. As classes de equivalência por tal  $\sim$  são chamadas de classes de conjugação. □

*Demonstração.* (i) Reflexividade. Dado  $a \in G$ , para ver que  $a \sim a$ , basta tomarmos  $g = e$ . Daí  $eae^{-1} = eae = a$ . (ii) Simetria. Sejam  $a, b \in G$  tais que  $a \sim b$ . Então existe  $g \in G$  tal que  $gag^{-1} = b$ . Mas daí,  $ga = bg$  e  $a = g^{-1}bg$ . Tomando  $h = g^{-1}$  teremos  $h b h^{-1} = a$ , donde  $b \sim a$ . (iii) Transitividade. Suponhamos que  $a \sim b$  e  $b \sim c$ . Então existem  $g, h \in G$  tais que  $gag^{-1} = b$

e  $hbh^{-1} = c$ . Então teremos  $(hg)a(hg)^{-1} = hgag^{-1}h^{-1} = hbh^{-1} = c$ , donde  $a \sim c$ . ■

Elementos conjugados de um grupo costumam possuir propriedades semelhantes. No caso dos grupos estudados por nós, elementos conjugados se relacionam, por exemplo, quanto aos seus pontos fixos (lembre-se de que são funções). Destacamos que os elementos conjugados de um grupo de matrizes são chamados de matrizes semelhantes. É fácil ver também que, em um grupo abeliano, as classes de conjugação são conjuntos unitários, uma vez que,  $\forall g \in G$ ,  $gag^{-1} = gg^{-1}a = a$ .

**Definição 1.4.** Sejam  $G$  um grupo e  $N \subset G$  um subgrupo. Dizemos que  $N$  é um *subgrupo normal* se,  $\forall g \in G$ ,  $\forall n \in N$ ,  $gng^{-1} \in N$ . ♣

Da definição, segue diretamente que qualquer subgrupo de grupos abelianos é normal. Este resultado também pode ser enunciado como corolário da proposição 2.5 a seguir. Além disso, é trivial ver que, em qualquer grupo  $G$ , os subgrupos  $\{e_G\}$  e o próprio  $G$  são subgrupos normais. Estes subgrupos normais são chamados de subgrupos triviais.

Como pode se esperar, o conceito de subgrupo normal está intimamente relacionado ao conceito de elementos conjugados. Se  $n \in N$  ( $N$  normal), então todos os seus elementos conjugados também pertencem a  $N$ . Em outras palavras,  $[n] \subset N$ , onde  $[n]$  é a classe de conjugação de  $N$ . Com esta observação, fica evidente provar a seguinte proposição:

**Proposição 1.5.** Sejam  $G$  um grupo e  $N \subset G$  um subgrupo. Então  $N$  é normal se, e somente se, é a união de classes de conjugação de  $G$ . □

**Definição 1.5.** Um grupo é dito simples quando seus únicos subgrupos normais são os triviais. ♣

**Proposição 1.6.** Sejam  $G, H$  grupos e  $h : G \rightarrow H$  um homomorfismo. O núcleo de  $h$  é um subgrupo normal de  $G$ . □

*Demonstração.* Pela proposição 2.2, já sabemos que  $\ker h$  é um subgrupo. Falta provarmos que é normal. Queremos provar que, dado  $n \in \ker h$  e  $g \in G$ ,  $h(gng^{-1}) = e_H$ . Ora,  $h(gng^{-1}) = h(g)h(n)h(g)^{-1}$ . Usando que  $n \in \ker h$ :  $h(gng^{-1}) = h(g)e_Hh(g)^{-1} = e_H$ . ■

### 1.3 Cosets e Grupo Quociente

Dado um subgrupo  $H$  de  $G$ , podemos criar classes de equivalência em  $G$ . Estas classes de equivalência se fazem “transladando”  $H$  com elementos de  $G$ . Estas

classes de equivalência são chamadas de *cosets*. Como a operação de grupo não necessariamente é comutativa, podemos ter cosets à direita ou cosets à esquerda. Esta noção, unida com a de subgrupo normal, irá nos conduzir ao conceito de grupo quociente, muito importante neste texto. Precisamente, temos a seguinte

**Definição 1.6.** Sejam  $G$  um grupo e  $H \subset G$  um subgrupo. Dado  $g \in G$ , o conjunto  $gH := \{gh; h \in H\}$  é chamado de *coset à esquerda de  $H$  com relação a  $g$*  e o conjunto  $Hg := \{hg; h \in H\}$  é chamado de *coset à direita de  $H$  com relação a  $g$* . ♣

**Proposição 1.7.** Sejam  $G$  um grupo e  $H \subset G$  um subgrupo. Sejam também  $\sim_D$  e  $\sim_E$  as relações em  $G$  tais que  $x \sim_D y$  se, e somente se existe  $h \in H$  tal que  $x = hy$  e  $x \sim_E y$  se, e somente se existe  $h \in H$  tal que  $x = yh$ . Então vale que ambas são relações de equivalência e além disso,  $D \subset G$  é coset à direita de  $H$  se e somente se existe  $g \in G$  tal que  $D = [g]_D$  e  $E \subset G$  é coset à esquerda de  $H$  se, e somente se existe  $g \in G$  tal que  $E = [g]_E$ . □

*Demonstração.* Provemos que  $\sim_D$  é uma relação de equivalência: (i) (reflexiva) Tome  $g \in G$ . Como  $H$  é subgrupo,  $e_G \in H$ . Assim, existe  $h \in H$  tal que  $g = gh$  (a saber,  $h = e_G$ ), donde  $g \sim_D g$ . (ii) (simétrica) Sejam  $x, y \in G$  tais que  $x \sim_D y$ . Então existe  $h \in H$  tal que  $x = yh$ . Como  $H$  é subgrupo,  $h^{-1} \in H$ . Assim,  $x = yh \implies xh^{-1} = y$ , donde  $y \sim_D x$ . (iii) (transitiva) Sejam  $x, y, z \in G$  tais que  $x \sim_D y$  e  $y \sim_D z$ . Então existem  $g, h \in H$  tais que  $x = yg$  e  $y = zh$ . Estas duas igualdades implicam  $x = (zh)g = z(hg)$ . Ora,  $hg \in H$ , por motivos óbvios, donde  $x \sim_D z$ .

Se  $D$  é coset à direita de  $H$ , por definição, existe  $g \in G$  tal que  $D = gH$ . Assim,  $x \in D$  se, e somente se, existe  $h \in H$  tal que  $x = gh$ , que é equivalente a dizer que  $x \sim_D g$ , e portanto  $x \in D$  se, e somente se  $x \in [g]_D$ . Portanto,  $D = [g]_D$ .

Os casos para cosets à esquerda e  $\sim_E$  se faz de modo análogo. ■

Sob certas hipóteses, os cosets à direita e à esquerda coincidem. Nestes casos, o conjunto dos cosets forma um grupo. Este grupo, derivado das classes de equivalências, é chamado de grupo quociente. As hipóteses suficientes e necessárias para que isto ocorra é que  $H$  seja um subgrupo normal de  $G$ . (vemos aqui, finalmente, a utilidade da definição de subgrupo normal). Estes resultados estão formalmente enunciados a seguir:

**Proposição 1.8.** Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo de  $G$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $gN = Ng$ ,  $\forall g \in G$  é que  $N$  seja um subgrupo normal de  $G$ . □

*Demonstração.* Por definição,  $x \in gN$  se, e somente se existe  $n \in N$  tal que  $x = gn$ . Isto, porém, é verdade se, e somente se  $xg^{-1} = gng^{-1}$ . Mas  $x \in Ng$

se, e somente se existe  $m \in N$  tal que  $xg^{-1} = m$ , ou seja, se, e somente se  $xg^{-1} = gng^{-1} \in N$ . Concluimos que  $gN = Ng$  se, e somente se  $gng^{-1} \in N$ ,  $\forall g \in G, \forall n \in N$ , que é precisamente a definição de  $N$  ser normal. ■

**Proposição 1.9.** *Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Então o conjunto  $G/N = \{gN = Ng; g \in G\}$ , munido da operação  $(gN)(hN) = ghN$  forma um grupo, chamado de grupo quociente de  $G$  por  $N$ , onde  $e_G N = N$  é o elemento neutro e  $g^{-1}N$  é o elemento inverso de  $gN$ .* □

Aqueles que estão mais habituados com álgebra linear hão de perceber a semelhança entre as definições de grupo quociente e espaço quociente. Perceberão também o quão mais fácil é definir o segundo (sem necessidade de recorrer a objetos análogos aos cosets à esquerda e à direita). Isto se deve ao fato de, num espaço vetorial, as operações serem comutativas.

Além de útil na definição de grupo quociente, os cosets desempenham papel fundamental na demonstração do Teorema de Lagrange, que será enunciado aqui apenas à título de informação.

**Definição 1.7.** Seja  $G$  um grupo. A ordem de  $G$  é definida como a cardinalidade do conjunto  $G$ . Um grupo  $G$  é dito finito se tem ordem finita ♣

**Teorema 1.10.** *(Teorema de Lagrange) Sejam  $G$  um grupo finito e  $H \subset G$  um subgrupo. Então a ordem de  $G$  é múltipla da ordem de  $H$ .* □

Enfatizo que “ordem de um elemento” é um conceito diferente de “ordem de um grupo” e será tratada na seção 2.9.

## 1.4 Homomorfismo Revisitado

Existem alguns tipos de grupos quocientes que são de particular interesse. Um deles é aquele quocientado pelo núcleo de um homomorfismo. Este caso possui um resultado importante que será contemplado pelo Primeiro Teorema de Isomorfismos. Antes dele, vejamos um teorema mais geral, que é um dos resultados mais importantes deste capítulo.

**Teorema 1.11.** *(Teorema Fundamental de Homomorfismos). Sejam  $G$  e  $H$  grupos e  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo. Seja  $N$  um subgrupo normal de  $G$  tal que  $N \subset \ker \phi$ . Então a função  $\psi : G/N \rightarrow H$  definida por  $\psi(gN) = \phi(g)$  é um homomorfismo.* □

**Corolário 1.11.1.** *(Primeiro Teorema de Isomorfismos). Existe um isomorfismo  $\psi$  entre  $G/\ker \phi$  e  $\text{Im } \phi$  dado por  $\psi(g \ker \phi) = \phi(g)$*  □

**Corolário 1.11.2.** *Se  $\phi$  é um epimorfismo, então existe um isomorfismo  $\psi$  entre  $G/\ker \phi$  e  $H$  dado por  $\psi(g \ker \phi) = \phi(g)$*  □

## 1.5 Comutatividade

O objetivo desta seção é usar as ferramentas que já temos para medir o quão abeliano um grupo é. Começaremos definindo o centro de um grupo (ou centralizador).

**Definição 1.8.** Seja  $G$  um grupo. O *centro de  $G$*  é o subconjunto de  $G$  definido por:  $Z(G) := \{z \in G; zg = gz, \forall g \in G\}$ . ♣

Em palavras, o centro de um grupo é o conjunto dos elementos que comutam com todos os outros. Enfatizo que este conjunto nunca é vazio, pois contém sempre o elemento neutro de  $G$ . Mais ainda:

**Proposição 1.12.** *Sejam  $G$  um grupo e  $Z(G)$  seu centro. Vale que  $Z(G)$  é um subgrupo normal de  $G$ .* □

*Demonstração.* Suponha que  $x, y \in Z(G)$ . Quero provar que  $xy \in Z(G)$ . Para tanto, tome  $g \in G$  arbitrário. Pela associatividade, e como  $y \in Z(G)$ ,  $xyg = xgy$ . Como  $x \in Z(G)$ ,  $xgy = gxy$ . Assim,  $(xy)g = g(xy)$ . Pela arbitrariedade de  $g$ , resta-nos que  $xy \in Z(G)$ . Provaremos também que  $x^{-1} \in Z(G)$ . Ora,  $xg = gx \implies g = x^{-1}gx \implies gx^{-1} = x^{-1}g$ . Concluimos que  $Z(G)$  é de fato subgrupo de  $G$ .

Falta provar que  $Z(G)$  é normal. Ora, dados  $z \in Z(G)$  e  $g \in G$ ,  $gzg^{-1} = gg^{-1}z = z \in Z(G)$ . Isto completa nossa demonstração. ■

Como o leitor pode imaginar, enfatizar que o centro de um grupo é um subgrupo normal revela que iremos tomar o quociente do grupo pelo centro em algum momento. O leitor está correto. Antes disto, porém, enunciaremos uma definição que nos permitirá entender melhor o significado de  $G/Z(G)$ .

**Definição 1.9.** Seja  $G$  um grupo. Dado  $g \in G$ , a função  $\phi_g : G \rightarrow G$  definida por  $\phi_g(h) = ghg^{-1}$  é chamada de *automorfismo interno*. O conjunto de todos automorfismos internos de um grupo  $G$  é denotado por  $\text{Inn}(G)$ . ♣

**Proposição 1.13.** *Os automorfismos internos de um grupo  $G$  são de fato automorfismos. Além disso,  $\text{Inn}(G)$  é um grupo sob a operação de composição.* □

*Demonstração.* Precisamos mostrar que, dado  $g \in G$ ,  $\phi_g$  é um isomorfismo. Primeiramente, vamos mostrar que  $\phi_g(xy) = \phi_g(x)\phi_g(y)$ . De fato, por definição,  $\phi_g(xy) = gxyg^{-1} = gxeyg^{-1}$ , onde  $e$  é o elemento neutro. Como  $g^{-1}g = e$ ,  $\phi_g(xy) = gxg^{-1}gyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \phi_g(x)\phi_g(y)$ . Agora já sabemos que  $\phi_g$  se trata de um endomorfismo. Só falta ver que  $\phi_g$  é uma bijeção. Seja  $y \in G$ .



Tome  $x = g^{-1}yg \in G$ . Então  $\phi_g(x) = y$ . De fato,  $\phi_g(x) = gg^{-1}ygg^{-1} = eye = y$ , e portanto  $\phi_g$  é sobrejetiva. Suponha agora que  $x \neq y$ . Então  $gx \neq gy \implies gxg^{-1} \neq gyg^{-1} \implies \phi_g(x) \neq \phi_g(y)$ , donde  $\phi_g$  é injetiva e, portanto, um automorfismo.

Falta mostrar que  $\text{Inn}(G)$  é um grupo. Inicialmente, mostraremos que a operação de composição está bem definida neste conjunto. Seja  $\phi_g$  e  $\phi_h$  elementos de  $\text{Inn}(G)$ . Note que  $\phi_g \circ \phi_h : G \rightarrow G$  é dada por  $x \mapsto ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \phi_{gh}(x)$ , donde  $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh} \in \text{Inn}(G)$ . Automaticamente temos que esta operação é associativa, pois a composição de funções o é. Afirmamos que  $\phi_e$  (onde  $e$  é o elemento neutro de  $G$ ) é o elemento neutro de  $\text{Inn}(G)$ . De fato, como vimos,  $\phi_g \circ \phi_e = \phi_{ge} = \phi_g = \phi_{eg} = \phi_e \circ \phi_g$ . Finalmente, dado  $\phi_g \in \text{Inn}(G)$ , mostraremos que seu elemento oposto é  $\phi_h$ , onde  $h = g^{-1}$ . Ora,  $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh} = \phi_e$ , o elemento neutro. ■

**Proposição 1.14.** *Sejam  $G$  um grupo e  $\text{Inn}(G)$  o grupo de automorfismos internos de  $G$ . Então a função  $\theta : G \rightarrow \text{Inn}(G)$  que associa a cada  $g \in G$  o automorfismo interno  $\phi_g$ , isto é,  $\theta(g) = \phi_g$ , é um epimorfismo.* □

*Demonstração.* Para provar que é um homomorfismo, basta ver que  $\theta(gh) = \phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h$  (a última igualdade está provada na demonstração da proposição 2.13). Ademais, por definição de  $\text{Inn}(G)$ , temos que se  $f \in \text{Inn}(G)$ , então existe  $g \in G$  tal que  $f = \phi_g = \theta(g)$ , por definição de  $\theta$ . E portanto,  $\theta$  é sobrejetiva. ■

**Proposição 1.15.** *Seja  $G$  um grupo.  $g \in Z(G) \iff \phi_g = \phi_e$ . Em outras palavras,  $\ker \theta = Z(G)$ .* □

*Demonstração.*  $g \in Z(G) \implies \phi_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}x = x = exe^{-1} = \phi_e(x)$ . Reciprocamente,  $\phi_g = \phi_e \implies \phi_g(x) = x, \forall x \in G \implies gxg^{-1} = x \implies gx = xg, \forall x \in G$ .

A segunda afirmação se prova com a seguinte sequência de desigualdades:  $g \in \ker \theta \iff \theta(g) = \phi_e \iff \phi_g = \phi_e \iff g \in Z(G)$ . ■

A proposição acima mostra que um elemento de  $G$  faz parte do centro se, e somente se o homomorfismo  $\theta$  definido anteriormente o mapeia para a identidade (i.e. para o elemento neutro de  $\text{Inn}(G)$ ). Vemos então que, quanto mais abeliano um grupo é, maior é seu centro e mais elementos são mapeados por  $\theta$  para a identidade. Uma outra forma de ver isto é a seguinte: quanto menos abeliano é um grupo, mais automorfismos internos existem (distintos da identidade). Desta forma, o tamanho do centro de um grupo é “inversamente proporcional” ao tamanho do grupo de automorfismos internos deste. A intuição nos diz, então, que deve existir uma certa relação entre  $G/Z(G)$  e  $\text{Inn}(G)$  e é precisamente isto que o corolário abaixo diz. Esta relação é, na verdade, um isomorfismo!

**Corolário 1.15.1.**  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$ .

*Demonstração.* Basta aplicar as Proposições 2.14 e 2.15 no Corolário 2 do Teorema 2.11. Existirá um isomorfismo  $\psi$  entre  $G/\ker\theta = G/Z(G)$  e  $\text{Inn}(G)$  dado por  $\psi(gZ(G)) = \theta(g) = \phi_g$ . ■

## 1.6 Ações de Grupos

O cerne do estudo dos grupos é “simetria”. Este fato é bem conhecido mas, à primeira vista, a definição de um grupo não parece estar nitidamente relacionada com simetria. Isto porque os elementos de um grupo, a grosso modo, são as transformações de simetria em si, desprovidas do objeto a qual se referem. Esta é a motivação da definição de ação de um grupo. A ação de um grupo é a razão de ser de um grupo, aquilo para o qual ele foi construído. Como o nome indica, a ação de um grupo torna explícito a atuação de um grupo num objeto que possui simetrias. Novamente, devido ao fato de um grupo não ser necessariamente comutativo, podemos ter dois tipos de ação, à esquerda e à direita. Sem mais delongas, passemos à definição formal.

**Definição 1.10.** Sejam  $M$  um conjunto não-vazio e  $G$  um grupo. Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma função. Considere as seguintes propriedades:

- 1) Dado  $g \in G$ , a função  $\alpha(g, \cdot) : M \rightarrow M$  é bijetiva
- 2) Se  $e$  é o elemento neutro de  $G$ , então a função  $\alpha(e, \cdot) : M \rightarrow M$  é a identidade. Ou seja,  $\alpha(e, x) = x, \forall x \in M$ .
- 3e) Vale  $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x), \forall g, h \in G, \forall x \in M$
- 3d) Vale  $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(hg, x), \forall g, h \in G, \forall x \in M$

Se  $\alpha$  satisfaz 1, 2 e 3e, então  $\alpha$  é dita ser uma ação à esquerda de  $G$ . Se for 1, 2, 3d,  $\alpha$  é dita ser uma ação à direita de  $G$ . ♣

Note que se  $G$  é comutativo, ações à direita e à esquerda empatam. Quando dissermos apenas “ação”, estará subentendido que pode se tratar de uma ação à direita ou à esquerda.

Vamos olhar com mais atenção a esta definição e extrair o significado intuitivo de cada propriedade. Dado um elemento  $g$  do grupo, a função  $\alpha(g, \cdot) : M \rightarrow M$  se torna uma transformação de simetria de  $M$ . Nada mais justo do que ser bijetiva. A condição 2 apenas impõe que a transformação de simetria que não faz nada (a identidade), corresponda ao elemento neutro. A terceira condição é a mais interessante. Ela diz que realizar uma transformação de simetria por  $g$  em  $M$  já transformado por  $h$  deve corresponder à transformação de simetria composta  $gh$  ou  $hg$ . Em outras palavras, aplicar  $h$  e depois aplicar  $g$  deve empatar com aplicar  $gh$  (ou  $hg$ ) de uma vez só.

Existem algumas características de ações que são importantes de serem vistas. Uma delas é a transitividade:

**Definição 1.11.** Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ .  $\alpha$  é dita *transitiva* se,  $\forall x, y \in M$ , existir  $g \in G$  tal que  $y = \alpha(g, x)$ . Será dita *simplesmente transitiva* quando tal  $g$  for único. Mais ainda,  $\alpha$  é dita ser *k-transitiva* se, para todo par de k-uplas  $(x_1, \dots, x_k)$  e  $(y_1, \dots, y_k)$  com elementos distintos dois a dois, existir um  $g \in G$  tal que  $y_i = \alpha(g, x_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . ♣

**Definição 1.12.** Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ . Dado  $m \in M$ , a *órbita de m pela ação de  $\alpha$*  é o conjunto  $Orb_\alpha(m) := \{\alpha(g, m); g \in G\}$ . ♣

Em palavras, a órbita de  $m$  por  $\alpha$  é o conjunto dos pontos de  $M$  que  $m$  pode assumir, considerando todas as transformações de simetria que  $G$  pode oferecer através de  $\alpha$ . A proposição seguinte abrirá o caminho para uma definição alternativa de ação transitiva.

**Proposição 1.16.** Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ . Dado  $m \in M$ , vale que  $n \in Orb_\alpha(m) \implies Orb_\alpha(n) = Orb_\alpha(m)$ . □

*Demonstração.* Suponhamos que  $\alpha$  seja uma ação à esquerda. Mostraremos inicialmente que  $Orb_\alpha(n) \subset Orb_\alpha(m)$ . Seja  $x \in Orb_\alpha(n)$ . Então existe  $g \in G$  tal que  $\alpha(g, n) = x$ . Por outro lado, como  $n \in Orb_\alpha(m)$ , então existe  $h \in G$  tal que  $\alpha(h, m) = n$ . Ora, substituindo uma coisa na outra,  $x = \alpha(g, \alpha(h, m)) = \alpha(gh, m)$ , em que usamos a definição de ação à esquerda. A última igualdade mostra que  $x \in Orb_\alpha(m)$ .

Veja que mostramos a seguinte implicação:  $n \in Orb_\alpha(m) \implies Orb_\alpha(n) \subset Orb_\alpha(m)$ . Trocando o papel das letras, teremos:  $m \in Orb_\alpha(n) \implies Orb_\alpha(m) \subset Orb_\alpha(n)$ . Assim, se mostramos que  $n \in Orb_\alpha(m) \implies m \in Orb_\alpha(n)$ , obteremos automaticamente a igualdade desejada. Novamente, a hipótese nos leva a crer que existe  $h \in G$  com  $\alpha(h, m) = n$ . Pela definição de ação,  $\alpha(e, m) = m$ . Donde  $\alpha(h^{-1}h, m) = m \implies \alpha(h^{-1}, \alpha(h, m)) = m \implies \alpha(h^{-1}, n) = m$  e portanto  $m \in Orb_\alpha(n)$ .

Para ações à direita, a demonstração é análoga. ■

**Corolário 1.16.1.** A relação definida por  $m \sim n$  se, e somente se  $m \in Orb_\alpha(n)$  é uma relação de equivalência. (e portanto as órbitas formam classes de equivalência em  $M$ )

**Corolário 1.16.2.** Se existe  $m \in M$  tal que  $Orb_\alpha(m) = M$ , então  $Orb_\alpha(n) = M$ ,  $\forall n \in M$ . □

*Demonstração.* Dado  $n \in M$ , como  $Orb_\alpha(m) = M$ , então  $n \in Orb_\alpha(m)$ . Pela proposição,  $Orb_\alpha(n) = Orb_\alpha(m) = M$ . ■

**Corolário 1.16.3.** *Uma ação  $\alpha$  é transitiva se, e somente se existir  $m \in M$  tal que  $\text{Orb}_\alpha(m) = M$*   $\square$

*Demonstração.* Pelo corolário acima, existir  $m \in M$  tal que  $\text{Orb}_\alpha(m) = M$ , é equivalente a dizer que  $\text{Orb}_\alpha(x) = M$ ,  $\forall x \in M$ . Dados  $x, y \in M$  arbitrários, pelo que foi dito,  $\text{Orb}_\alpha(x) = M$ , donde  $y \in \text{Orb}_\alpha(x)$ , donde existe  $g \in G$  tal que  $y = \alpha(g, x)$ . Pela arbitrariedade de  $x$  e  $y$ , concluimos que  $\alpha$  é transitiva. Reciprocamente, sendo  $\alpha$  transitiva e, fixado um  $x \in M$ , para todo  $y \in M$ , existe  $g \in G$  tal que  $y = \alpha(g, x)$ , e portanto  $y \in \text{Orb}_\alpha(x)$ ,  $\forall y \in M$  e, portanto,  $\text{Orb}_\alpha(x) = M$ .  $\blacksquare$

**Definição 1.13.** Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ .  $\alpha$  é dita *efetiva* se dados  $g, h \in G$ ,  $g \neq h \implies \exists x \in M; \alpha(g, x) \neq \alpha(h, x)$ . Tal  $\alpha$  também costuma ser dita *fiel*.  $\alpha$  é dita *livre* se, dados  $g, h \in G$ ,  $g \neq h \implies \alpha(g, x) \neq \alpha(h, x), \forall x \in M$ .  $\clubsuit$

Apesar de parecidas, não se engane: a definição de ação efetiva e livre são diferentes, sendo a última mais forte, ou seja, toda ação livre é efetiva mas não vale a recíproca. Em palavras, uma ação é efetiva se transformações de simetria diferentes fazem algum ponto ficar diferente. Ou, se duas transformações de simetria deixam o espaço igual, então os elementos correspondentes do grupo são iguais. Assim como fizemos com a transitividade, forneceremos uma equivalência para a definição de livre e efetiva:

**Proposição 1.17.** *Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ . Então  $\alpha$  é efetiva se, e somente se  $\alpha(g, x) = x, \forall x \in M \implies g = e$ . Além disso,  $\alpha$  é livre se, e somente se  $\exists x \in M; \alpha(g, x) = x \implies g = e$ .*  $\square$

*Demonstração.* Suponha, primeiramente, que valha a implicação:  $\alpha(a, y) = y, \forall y \in M \implies a = e$ . Provarei a contrapositiva da tese. Tome  $g, h \in G$  arbitrários e ponha  $a = gh^{-1}$  e  $y = \alpha(h, x)$ . Daí  $\alpha(gh^{-1}, \alpha(h, x)) = \alpha(h, x), \forall x \in M \implies gh^{-1} = e \implies g = h$ . Note que não há perda de generalidade ao tomarmos  $\alpha(h, x)$  no lugar de  $y$  pois  $\alpha(h, \cdot)$  é uma bijeção por definição (e portanto alcança todos  $y \in M$ ). Mas, por definição de ação,  $\alpha(gh^{-1}, \alpha(h, x)) = \alpha(g, x)$ . E portanto temos a seguinte implicação:  $\alpha(g, x) = \alpha(h, x), \forall x \in M \implies g = h$ . A tese segue da arbitrariedade na escolha de  $g$  e  $h$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\alpha$  seja efetiva. Suponhamos também que, para algum  $g$ ,  $\alpha(g, x) = x, \forall x \in M$ . Quero provar que  $g = e$ . Para tanto, notemos que  $\alpha(e, x) = x, \forall x \in M$ , pela definição de ação. Assim, a hipótese acima enunciada pode ser reescrita como:  $\alpha(g, x) = \alpha(e, x), \forall x \in M$ . Ora, da efetividade de  $\alpha$  segue que  $g = e$ .

Em segundo lugar, suponhamos que  $\alpha$  seja livre. Isto é, que se existe  $x \in M$  tal que  $\alpha(g, x) = \alpha(h, x)$ , então  $g = h$ . Suponhamos também que existe  $x \in M$  tal que  $\alpha(g, x) = x$ . Provemos que  $g = e$ . Note que, por definição de ação,  $x = \alpha(e, x)$ . Daí, existe  $x \in M$  tal que  $\alpha(g, x) = \alpha(e, x)$ . Mas como a ação é livre,

chegamos que  $g = e$ . Reciprocamente, suponhamos que valha a implicação:  $\exists x \in M; \alpha(g, x) = x \implies g = e$ . Suponhamos também que exista  $x$  tal que  $\alpha(g, x) = \alpha(h, x)$ . Quero provar que  $g = h$ . Note que  $\alpha(g, x) = \alpha(h, x) \implies \alpha(gh^{-1}, \alpha(h, x)) = \alpha(h, x)$ . Por hipótese, isso nos dá  $gh^{-1} = e$ , donde  $g = h$ , concluindo nossa demonstração. ■

Essa proposição nos dá, em palavras, o seguinte: o uma ação é efetiva se a única transformação que deixar *tudo* igual for a identidade; uma ação é livre se a única transformação que deixar *alguma coisa* igual for a identidade.

**Proposição 1.18.** *Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ .  $\alpha$  é simplesmente transitiva se, e somente se  $\alpha$  é transitiva e livre.* □

*Demonstração.* Suponha que  $\alpha$  é transitiva e livre. Então, dados  $x, y \in M$ , existe  $g \in G$  tal que  $\alpha(g, x) = y$ . Daí, se  $\alpha(h, x) = y$ , teremos  $\alpha(g, x) = \alpha(h, x)$ , para algum  $x$ . Como  $\alpha$  é livre, isso nos dá  $g = h$ , donde  $g$  é o único elemento tal que  $\alpha(g, x) = y$ , o que demonstra ser  $\alpha$  transitiva.

Reciprocamente, suponha que  $\alpha$  é simplesmente transitiva. Isto é, dados  $x, y \in M$ , se  $\alpha(g, x) = y$  e  $\alpha(h, x) = y$ , então  $g = h$  (além do mais, tal  $g$  sempre existe). Ora, que  $\alpha$  é transitiva é óbvio. Dado  $x \in M$  e  $g \in G$ , tome  $y = \alpha(g, x)$ . Daí valerá que se  $\alpha(h, x) = y$ , isto é, que se  $\alpha(g, x) = \alpha(h, x)$  para algum  $x$ , então  $g = h$ , donde  $\alpha$  é livre. ■

**Definição 1.14.** (grupo de isotropia). Seja  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ . Se  $g \in G$  e  $m \in M$  tais que  $\alpha(g, m) = m$ , então  $m$  é dito ser um ponto fixo de  $g$ . Seja  $X \subset M$ . O conjunto  $\{g \in G; \alpha(g, x) \in X, \forall x \in X\}$  é chamado de *grupo estabilizador de  $G$  com relação a  $X$*  ou *grupo de isotropia* e denotado por  $G_{\alpha, X}$  ou  $G_X$  quando a ação estiver subentendida.



**Proposição 1.19.** *Sejam  $G$  um grupo,  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$  e  $X \subset M$ . Então  $G_X$  é um subgrupo de  $G$ .* □

*Demonstração.* Suponha que  $g, h \in G_X$ . Então  $\alpha(g, x) = x, \forall x \in X$  e também  $\alpha(h, x) = x, \forall x \in X$ . Daí, dado  $x \in X$  arbitrário,  $\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(g, x) = x$ , donde  $gh \in G_X$ . Ainda,  $\alpha(e, x) = x \implies \alpha(g^{-1}g, x) = x \implies \alpha(g^{-1}, \alpha(g, x)) = \alpha(g^{-1}, x) = x$ . ■

**Proposição 1.20.** *Sejam  $G$  um grupo e  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação de  $G$  em  $M$ . A ação  $\alpha$  é livre se, e somente se  $G_x = \{e_G\}, \forall x \in X$ .* □

*Demonstração.* Suponha que  $\alpha$  é livre. Dado  $g \in G_X$ , temos que  $\alpha(g, x) = x$ . Porém, pela proposição 2.17, como  $\alpha$  é livre, isto implica que  $g = e$ , donde  $G_X = \{e\}$ .

Reciprocamente, suponha que temos  $G_X = \{e\}$ . Então  $\alpha(g, x) = x$  implica que  $g \in G_X$  e portanto  $g = e$ . Temos então a implicação  $\alpha(g, x) = x \implies g = e$ , que pela proposição 2.17 é o mesmo que dizer que  $\alpha$  é livre. ■

A partir de agora, usaremos a notação mais simplificada:  $gx = \alpha(g, x)$ .

### 1.6.1 Ações descontínuas em espaços topológicos

Veremos agora algumas definições importantes para o conceito de grupo fuchsiano.

**Definição 1.15.** Sejam  $G$  um grupo,  $X$  um espaço topológico

## 1.7 Grupos de Simetria

**Definição 1.16.** Seja  $M$  um conjunto. O conjunto de todas as bijeções de  $M$  para  $M$  forma um grupo sob a operação de composição e é chamado de grupo de simetria de  $M$ , denotado por  $\text{Sym}(M)$ . Um subgrupo de um grupo de simetria é chamado de grupo de permutação.

Na verdade, o grupo de simetria de um objeto matemático é o grupo de funções que preservam a estrutura deste objeto. Por exemplo, se for um espaço métrico, o grupo de simetria é o grupo de isometria. Se for um espaço topológico, é o grupo de homeomorfismos, se for uma variedade diferenciável, é o grupo de difeomorfismos... E assim por diante.

## 1.8 Geradores

Antes de passarmos para a próxima definição, convém lembrarmos que a intersecção arbitrária de subgrupos de um grupo ainda é um subgrupo. Notamos também que o mesmo não vale para uniões de subgrupos. Entretanto, até o final desta seção.

**Definição 1.17.** Seja  $G$  um grupo e  $X \subset G$  um subconjunto. O *subgrupo de  $G$  gerado por  $X$*  e denotado por  $\langle X \rangle$  é definido como:


$$\langle X \rangle := \bigcap_{S < G; X \subset S} S$$

O subgrupo gerado por  $X = \emptyset$  é  $\langle X \rangle = \{e\}$ .



Como a intersecção arbitrária de subgrupos é subgrupo, temos automaticamente que  $\langle X \rangle$  é subgrupo de  $G$ .

Agora, trabalharemos para apresentar uma definição equivalente de subgrupo gerado, começando com a definição de *palavra*:

**Definição 1.18.** Sejam  $G$  um grupo e  $X \subset G$  um subconjunto não-vazio. Um elemento de  $G$  é dito uma palavra de  $X$  quando pode ser escrito como  $x_1 \dots x_n$ , onde  $x_i$  ou  $x_i^{-1}$  pertence a  $X$ , para todo  $i$  natural entre 1 e  $n$ . 

Isso nos dá a seguinte:

**Proposição 1.21.** *Sejam  $G$  um grupo e  $X$  um subconjunto não vazio de  $G$ . Vale que  $\langle X \rangle$  é o conjunto de todas as palavras de  $X$ .*  $\square$

*Demonstração.* Seja  $W$  o conjunto de todas as palavras de  $X$ . É simples ver que  $W$  forma um subgrupo. Mais trivial ainda é ver que este subgrupo contém  $X$ . Portanto,  $\langle X \rangle \subset W$ , por definição. Reciprocamente, seja  $w \in W$  arbitrário. Dado um subgrupo  $S$  que contém  $X$ , por ser em particular um grupo, é fechado com relação a operação de grupo e de elemento oposto. Como  $w$  é justamente formada por elementos de  $X$  (e portanto de  $S$ ) e seus elementos inversos, então teremos  $w \in S$ . Pela arbitrariedade de  $w$  e  $S$  temos que  $W$  está contido na interseção de todos os subgrupos que contenham  $X$ . Isto é,  $W \subset \langle X \rangle$ .  $\blacksquare$

**Definição 1.19.** Seja  $G$  um grupo e  $X \subset G$ . Se  $\langle X \rangle = G$ , dizemos que  $X$  gera  $G$  e que os elementos de  $X$  são *geradores* de  $G$ . Se existe algum  $X$  finito que gera  $G$ , dizemos que  $G$  é finitamente gerado.

**Definição 1.20.** Seja  $G$  um grupo. Se existir  $x \in G$  tal que  $G = \langle x \rangle$ , dizemos que  $G$  é um grupo cíclico.

**Definição 1.21.** Seja  $G$  um grupo e  $x \in G$  um elemento. Então a ordem de  $x$  é definida como a ordem do grupo  $\langle x \rangle$ .

**Proposição 1.22.** *Seja  $G$  um grupo.  $x \in G$  tem ordem infinita se, e somente se todas as potências de  $x$  são distintas (pela proposição anterior, o conjunto das potências de  $x$  empata com  $\langle x \rangle$ ).*

*Demonstração.* Se todas as potências de  $x$  são distintas,  $\langle x \rangle$  é obviamente infinito. Reciprocamente, iremos provar a contra-positiva. Isto é, supondo que existam potências iguais, digamos  $x^m = x^l$ , provaremos que  $\langle x \rangle$  é finito. Sem perda de generalidade, consideremos  $m > l$ . Então teremos que  $x^{m-l} = e_G$ . Daí, o conjunto dos naturais tais que  $x^k = e_G$  é não vazio. Pelo princípio da boa ordenação, podemos achar o menor natural que valha a igualdade. Denotaremos este natural por  $n$ . Pelo algoritmo da divisão, tomando um inteiro  $m$

qualquer, podemos reescrevê-lo como  $m = nq + r$ , com  $0 \leq r \leq n - 1$ . Então  $x^m = (x^n)^q + x^r = (e_G)^q + x^r = x^r$ , o que mostra que  $\langle x \rangle = \{e_G, x, \dots, x^{n-1}\}$ , donde  $x$  tem ordem finita. ■

**Corolário 1.22.1.** *Se  $G$  é um grupo finito, então, dado  $x \in G$ , existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $x^n = x^{-1}$ .*

*Demonstração.* Basta ver que, como  $G$  é finito e como  $\langle x \rangle \leq G$ , devem existir  $m, l$  tais que  $x^m = x^l$ . Pelo que foi falado na demonstração da proposição, concluiremos que  $\langle x \rangle = \{e_G, x, \dots, x^{n-1}\}$ . Como  $x^{-1} \in \langle x \rangle$ , segue a asserção. ■

**Corolário 1.22.2.** *Se  $G$  é um grupo finito, vale que  $\langle x \rangle$  é o conjunto cujos elementos são da forma  $x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$ , com  $\epsilon_i \geq 0$ , para todo  $i$ .*

## 1.9 Grupos Livres

**Definição 1.22.** Sejam  $F$  um grupo,  $X$  um conjunto não-vazio e  $\sigma : X \rightarrow F$  uma função. Então  $(F, \sigma)$  é dito livre em  $X$  se, para todo grupo  $G$  e toda função  $\alpha : X \rightarrow G$ , existir e for único um homomorfismo  $\beta : F \rightarrow G$  tal que  $\alpha = \beta \circ \sigma$ .

Esta definição pode parecer muito estranho a uma primeira vista. Gastaremos um tempo buscando uma intuição para ela. Para tanto, faremos uma analogia com espaços vetoriais.

A base de espaço vetorial possui uma característica singular. Qualquer transformação linear fica unicamente determinada uma vez que se sabe o valor que esta assume nos elementos de uma base. Isto significa que há a total *liberdade* de escolhermos os valores da transformação nos vetores da base, sem correr o risco de chegar numa inconsistência. Isto se deve ao fato de que os vetores de uma base não satisfazem relações desnecessárias, só satisfazem as relações impostas pela definição de espaço vetorial. Este fato é sinônimo do fato de que os vetores são linearmente *independentes*. Por exemplo, se os vetores  $u, v, w$  satisfizerem a relação de dependência  $2u + v + 3w = 0$ , então não podemos escolher arbitrariamente os valores de uma transformação linear  $T(u), T(v), T(w)$  sem correremos o risco de sermos contraditórios.  $T(u), T(v), T(w)$  devem necessariamente satisfazer a mesma relação. Agora, basta trocarmos “espaço vetorial” por grupo e “transformação linear” por homomorfismo. Assim, um grupo  $F$  é livre sobre um conjunto de geradores  $X$  se qualquer homomorfismo de domínio  $F$  fica unicamente determinado pelos valores que assume nos elementos de  $X$  (que podem ser escolhidos “livremente”). Isso é análogo a  $X$  ser uma base de  $F$ . Ser “livre” significa que os elementos de  $X$  são “livres” de relações desnecessárias, isto é, que não aquelas impostas pelo fato de  $F$  ser grupo.



A principal diferença reside no fato de que todo espaço vetorial possui uma base, enquanto que nem todo grupo é livre sobre algum conjunto de geradores. Quanto um grupo é livre, então é possível traçar um análogo de “dimensão” no caso de espaços vetoriais, e que é chamado de posto.

Esta questão possui algumas facilidades de ser tratadas no caso de grupos abelianos. Isto decorre do fato de que um grupos abelianos podem ser vistos como módulos sobre  $\mathbb{Z}$ , isto é, são “quase”espaços vetoriais. Daí, um grupo abeliano livre de posto  $n$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .

Note que, implicitamente, esta discussão supôs que  $X \subset F$ . Na verdade, esta suposição não é exatamente injustificada. Sempre que um grupo for livre em um conjunto  $X$ , há, no mínimo, uma cópia de  $X$  dentro de  $F$ , que difere no máximo pela natureza dos elementos. Formalmente, a função  $\sigma : X \rightarrow F$  é injetiva:

**Proposição 1.23.** *Se  $G$  é um grupo livre em  $X$ , então a função  $\sigma : X \rightarrow F$  da definição é injetiva.*

*Demonstração.* Será por absurdo. Suponha que  $\sigma$  não é injetiva. Então existem  $x_1, x_2 \in X$  distintos tais que  $y = \sigma(x_1) = \sigma(x_2)$ . Tome  $G = \{g_1, g_2\}$  composto de dois elementos distintos e uma função  $\alpha : X \rightarrow G$  tal que  $\alpha(x_1) = g_1$  e  $\alpha(x_2) = g_2$ . Tomemos  $\beta$  tal que  $\beta \circ \sigma = \alpha$ , que existe pela definição de grupo livre. Entretanto,  $(\beta \circ \sigma)(x_1) = \beta(\sigma(x_1)) = \beta(\sigma(x_2)) = (\beta \circ \sigma)(x_2)$ , o que é um absurdo, pela definição de  $\alpha$ . ■

Não é difícil ver, a partir daí, que  $F$  seria livre também em  $\text{Im}\sigma$ , substituindo  $\sigma$  pela função inclusão  $i : \text{Im}\sigma \rightarrow F$ , donde todo grupo livre é livre sobre algum subconjunto. É possível mostrar que  $\text{Im}\sigma$  gera  $F$ . Mais que isso, um outro aspecto importante sobre um grupo ser livre é que  $F$  é, em certo sentido, o “maior” grupo que  $\text{Im}\sigma$  pode gerar. Enunciaremos o teorema sem demonstrá-lo, pois a demonstração possui diversos detalhes técnicos chatos, apesar de que a ideia da demonstração é simples, e sera dada.

**Proposição 1.24.** *Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Então existe um grupo  $F$  e uma função  $\sigma : X \rightarrow F$  tal que  $(F, \sigma)$  é livre em  $X$  e  $F = \langle \text{Im}\sigma \rangle$*

A demonstração é completamente por construção. Primeiro, devemos tomar um conjunto  $X^{-1}$ , disjunto a  $X$  e com a mesma cardinalidade, de forma que a cada elemento de  $X$ , corresponderemos um de  $X^{-1}$  para cumprir o papel de seu elemento inverso. Daí, tomaremos o conjunto  $S$  de todas as palavras (isto é, seqüências finitas de elementos) de  $X \cup X^{-1}$ , sendo que a palavra “vazia” cumprirá o papel de identidade. O produto de duas palavras é definida como a concatenação delas e o inverso se faz trocando cada elemento da palavra pelo seu inverso e invertendo também a ordem.  $S$  é quase  $F$ . Temos que

fazer apenas mais um ajuste. Do jeito que construímos, palavras como  $x^{-1}xa$ ,  $xx^{-1}a$  e  $a$  são diferentes uma da outra, enquanto que num grupo, elas seriam iguais. O resto do trabalho agora se reduz a unir palavras assim formando classes de equivalência, definindo operações da forma natural, provando que tudo está bem definido e de fato forma um grupo.  $F$  será o conjunto das classes de equivalência.

Por fim, deve-se provar que a função  $\sigma : X \rightarrow F$  por  $\sigma(x) = [x]$  faz de  $(F, \sigma)$  livre. Dada uma função  $\alpha : X \rightarrow G$ , construamos primeiro uma função  $\bar{\beta} : S \rightarrow G$ , do conjunto de todas as palavras, mapeando uma palavra  $x_1 \dots x_n$  para  $g_1 \dots g_n$ , onde  $g_i = \alpha(x_i)$ . É fácil ver que elementos na mesma classe de equivalência serão mapeados para o mesmo elemento em  $G$ , donde definimos  $\beta : F \rightarrow G$  por  $\beta([w]) = \bar{\beta}(w)$ . É fácil mostrar que tal  $\beta$  se torna um homomorfismo.

## Capítulo 2

# Topologia

Nesta seção abordaremos, primeiramente, formas típicas de construir topologias, como inicial, final, quociente e produto.

Construções do tipo “topologia inicial” e “topologia final” são muito comuns na matemática, principalmente no que se refere a uma álgebra de conjuntos. Prova disso é o conceito de  $\sigma$ -álgebra inicial e final. Devido ao fato deste tipo de construção ser tão comum e tão semelhante nos diversos casos, antes de partirmos para as definições formais, generalizaremos informalmente esta construção para estruturas quaisquer onde esta faz sentido.

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos e  $f : A \rightarrow B$ . Se pudermos construir uma “estrutura” a partir de  $B$  (por “estrutura”, pode-se ler topologia,  $\sigma$ -álgebra ou outros), digamos  $\mathcal{B}$ , então  $f$  induzirá naturalmente uma “estrutura” em  $A$ , chamada de “estrutura” inicial e definida como  $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{B})$ . A “estrutura” inicial é a menor estrutura que torna a função  $f$  um “morfismo” entre  $(A, \mathcal{A})$  e  $(B, \mathcal{B})$ . (Por morfismo, pode-se ler função contínua no caso de topologia ou função mensurável no caso de  $\sigma$ -álgebra).

Se, por outro lado, tivermos uma “estrutura” a partir de  $A$  e não em  $B$ , então  $f$  pode induzir naturalmente uma “estrutura” em  $B$  chamada de “estrutura” final e definida por  $\mathcal{B} := \{Y \subset B; f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}\}$ . Esta é a maior “estrutura” em  $B$  que torna  $f$  um “morfismo” entre  $(A, \mathcal{A})$  e  $(B, \mathcal{B})$ .

Passemos às definições formais para o caso específico de topologia.

**Definição 2.1.** Seja  $X, Y$  conjuntos,  $\tau_Y$  uma topologia em  $Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. O conjunto  $f^{-1}(\tau_Y) := \{f^{-1}(U), U \in \tau_Y\}$  é chamado de *topologia inicial induzida por  $f$* . Mais geralmente, seja  $(Y_i, \tau_{Y_i})$  uma família arbitrária de espaços topológicos indexadas por  $I$  e  $(f_i)$  uma família de funções indexadas pelo mesmo conjunto tal que  $f_i : X \rightarrow Y_i$ , para todo  $i \in I$ . Então, a *topologia*

inicial induzida por  $(f_i)_{i \in I}$  é definida como  $\tau_X := \{f_i(U), U \in \tau_{Y_i}, i \in I\}$ . ♣

**Definição 2.2.** Seja  $X, Y$  conjuntos,  $\tau_X$  uma topologia em  $X$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. O conjunto  $\{U \subset Y; f^{-1}(U) \in \tau_X\}$  é chamado de *topologia final induzida por  $f$* . Mais geralmente, seja  $(X_i, \tau_{X_i})$  uma família arbitrária de espaços topológicos indexadas por  $I$  e  $(f_i)$  uma família de funções indexadas pelo mesmo conjunto tal que  $f_i : X_i \rightarrow Y$ , para todo  $i \in I$ . Então, a *topologia final induzida por  $(f_i)_{i \in I}$*  é definida como  $\tau_Y := \{U \subset Y; f_i^{-1}(U) \in \tau_{X_i}, i \in I\}$ . ♣

É fácil ver que as topologias inicial e final são de fato topologias, pela forma como pré-imagens preservam uniões e intersecções. Além disso, também não é difícil ver que a topologia inicial é a menor topologia que torna  $f$  contínua (ou todas as funções de uma família  $(f_i)$  contínuas); já a topologia final é a maior topologia que torna  $f$  contínua ((ou todas as funções de uma família  $(f_i)$  contínuas).

Estas definições nos permitirão manejar melhor outras, como o conceito de topologia induzida, quociente e produto, apresentados ambos a seguir.

**Definição 2.3.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $S \subset X$ . A topologia induzida por  $\tau$  em  $X$  é definida por  $\tau_S := \{S \cap U, U \in \tau\}$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $S \subset X$ . Então a topologia induzida em  $S$  corresponde à topologia inicial induzida pela função inclusão  $i : S \rightarrow X, i(x) = x$ .*

**Definição 2.4.** Sejam  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Então o espaço quociente de  $(X, \tau_X)$  por  $\sim$  é definido como  $(Y, \tau_Y)$  onde  $Y = X/\sim$ , isto é,  $Y = \{[x] := \{v \in X; v \sim x\}; x \in X\}$  e onde  $\tau_Y = \{U \subset Y; \bigcup_{[x] \in U} [x] \in \tau_X\}$ . ♣

Em um certo sentido, a topologia do espaço quociente é mais “grossa”. Primeiro, note que, se um certo conjunto é um aberto do espaço quociente, então também é um aberto do espaço original, (“abrindo” as classes de equivalência). Por outro lado, a topologia quociente exclui os abertos que possuem elementos sem possuir toda a classe de equivalência deste elemento. (lembre-se que, no espaço quocientado, um elemento e sua classe de equivalência se confundem). Um exemplo fácil é o seguinte. Considere o plano com a topologia usual. Considere a relação de equivalência que quocienta o plano em linhas verticais, isto é, dois pontos estão na mesma classe de equivalência se, e somente se suas abscissas forem iguais. Uma faixa do plano sem a fronteira é um aberto tanto do plano quanto do espaço quociente. Entretanto, bolas abertas não são abertos do espaço quociente pois este conjunto não contém nenhuma classe de equivalência, isto é, nenhuma linha vertical, deixando de fazer sentido falar até mesmo que esse conjunto é subconjunto do espaço quociente. De certa maneira, podemos dizer que a topologia quociente é a maior topologia “contida” na topologia usual e que os abertos façam sentido para o espaço quocientado. Esta afirmação pode ser rigorosamente expressa na seguinte proposição:

**Proposição 2.2.** *Sejam  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $(Y, \tau_Y)$  o espaço quociente de  $(X, \tau_X)$  por uma relação de equivalência  $\sim$ . Seja  $q : X \rightarrow Y$  a projeção canônica de  $\sim$ , isto é, a função que mapeia um elemento  $x \in X$  na sua respectiva classe de equivalência  $[x] \in Y$ . Então  $\tau_Y$  empata com a topologia final induzida por  $q$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F}$  a topologia final induzida por  $q$ . Tome  $U \subset Y$ . Temos que  $\bigcup_{[x] \in U} [x] := \{a \in X; a \in [x], \text{ para algum } [x] \in U\} = \{a \in X; [a] \in U\}$ . De fato, se  $a$  está no segundo conjunto, então  $[a] \in U$ . Em particular, existe  $[x] \in U$  tal que  $a \in [x]$ , a saber,  $[x] = [a]$ . Se, por outro lado,  $a$  está no primeiro conjunto, então existe  $[x] \in U$  tal que  $a \in [x]$ . Por outro lado, pelo fato de serem classes de equivalência, temos que  $[a] = [x]$ . Assim,  $[a] \in U$  e portanto  $a$  está no segundo conjunto. Pois bem. Com isso em mãos, para completarmos a prova basta considerarmos as seguintes equivalências:  $U \in \mathcal{F} \iff q^{-1}(U) \in \tau_X \iff \{x \in X; q(x) \in U\} \in \tau_X \iff \{x \in X; [x] \in U\} \in \tau_X \iff \bigcup_{[x] \in U} [x] \in \tau_X \iff U \in \tau_Y$ . ■

Nosso objetivo agora é de definir uma topologia para o espaço definido como produto cartesiano de espaços topológicos. A forma mais natural seria a de considerar a topologia gerada pelo conjunto de todos os produtos cartesianos de abertos de cada topologia. Esta construção de fato existe, é chamada de topologia das caixas e é bastante adequada para o produto cartesiano de um número finito de espaços. Entretanto, ela passa a não se tornar mais tão adequada no caso de um produto infinito. Uma construção melhor é chamada de “topologia produto”. Esta topologia empata com a topologia das caixas no caso finito, e é mais adequada no caso infinito. De fato, a topologia produto é sempre mais “grossa” (isto é, possui um número menor de abertos) do que a topologia das caixas. Passemos às definições formais.

**Definição 2.5.** Seja  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  uma coleção arbitrária de espaços topológicos. O espaço produto desta coleção é definido como  $(X, \tau)$  tal que

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

e  $\tau$  é a topologia inicial induzida pela família de funções  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  contínuas, onde  $\pi_i$  são as projeções canônicas.

Não é difícil ver que esta topologia empata com a topologia gerada por elementos da forma  $\times_{i \in I} U_i$ , onde  $U_i \neq X_i$ , apenas para um número finito de índices.

A construção da topologia produto é análogo a muitas outras construções “produto” na matemática.

Por fim, relembremos alguns conceitos que serão importantes para a definição de grupo fuchsiano.

**Definição 2.6.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Dado um subconjunto  $S \subset X$ ,  $x \in S$  é dito *ponto isolado* se existe um aberto  $U \in \tau$  tal que  $S \cap U = \{x\}$ . Se todo ponto de  $S$  é isolado,  $S$  é chamado de conjunto discreto.

**Proposição 2.3.** *Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Um subconjunto  $S \subset X$  é discreto se, e somente se a topologia induzida por  $\tau$  em  $S$  for a topologia discreta de  $S$  (isto é, todo subconjunto de  $S$  estiver na topologia).*

*Demonstração.* Suponha que  $S$  é discreto. Dado  $x \in S$ , tomemos  $U_x$  tal que  $U_x \cap S = \{x\}$ . Daí,  $\{x\}$  são abertos da topologia induzida, por definição. Como topologias são fechadas por uniões arbitrárias, segue que todo subconjunto de  $S$  é aberto e portanto a topologia induzida empata com a topologia discreta de  $S$ . Reciprocamente, suponha que a topologia induzida em  $S$  seja a discreta. Então, dado  $x \in S$ ,  $\{x\} \in \tau_S$ . Ora, pela definição de topologia induzida, há de haver um aberto  $U$  de  $\tau$  tal que  $S \cap U = \{x\}$ , donde  $x$  é isolado. Pela arbitrariedade de  $x$ , segue que  $S$  é discreto. ■

## Capítulo 3

# Conexidade

**Proposição 3.1.** *Um conjunto conexo por caminhos é conexo. Um conjunto aberto e conexo é conexo por caminhos.*





## Capítulo 4

# Grupos Topológicos

Um grupo topológico é só um conjunto que possuem tanto estrutura de grupo quanto de espaço topológico e, além disso, estas estruturas conversam bem entre si. (especificamente, as operações de grupo são contínuas).

**Definição 4.1.** Uma tripla  $(G, +, \tau)$  é dita um grupo topológico se  $(G, +)$  é um grupo,  $(G, \tau)$  é um espaço topológico e se as funções  $+: G \times G \rightarrow G$  e  $-: G \rightarrow G$  tais que  $+(g, h) = g + h$  e  $-(g) = -g$  são contínuas, onde entende-se implicitamente que  $G \times G$  está munido com a topologia produto.

**Proposição 4.1.**  $G$  é um grupo topológico se, e somente se, a função  $f: G \times G \rightarrow G$  definida por  $f(g, h) = gh^{-1}$  é contínua.

A demonstração segue de fatos básicos sobre continuidade de funções e sobre a topologia produto.

Dado  $g \in G$ ,  $G$  grupo topológico, não é difícil ver que a função  $m_g(x): G \rightarrow G$  definida por  $m_g(x) = gx$  é uma bijeção contínua, sendo  $m_{g^{-1}}$  sua função inversa (também contínua). Assim,  $m_g$  é um homeomorfismo, para todo  $g \in G$ . Dados  $x, y \in G$  arbitrários, então  $m_{x^{-1}y}(x) = y$ , o que indica que o grupo de homeomorfismos de um grupo topológico é transitivo. Isto é, qualquer ponto de  $G$  é topologicamente semelhante a qualquer outro ponto. Espaços topológicos que gozem desta propriedade são comumente denominados espaços homogêneos. Mas esta denominação também é usada para um espaço métrico em que o grupo de isometrias aja transitivamente sobre ele. Como isometrias são homeomorfismos, é fácil ver que todo espaço métrico homogêneo é um espaço topológico homogêneo, se a topologia é induzida pela métrica.

Uma consequência de um espaço topológico ser homogêneo é de que toda vizinhança é homeomorfa a alguma vizinhança do elemento neutro:

**Proposição 4.2.** *Seja  $G$  um espaço topológico,  $g \in G$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $g$ . Então existe  $V$  vizinhança aberta de  $e$  (elemento neutro) tal que  $U$  e  $V$  são homeomorfos.*

*Demonstração.* Considere a função  $m_g$  como definida acima. Seja  $V := m_g^{-1}(U)$ . É fácil ver que  $V$  de fato é uma vizinhança aberta de  $e$ . Pela bijetividade de  $m_g$ , vale que  $m_g(V) = U$ . Defina então  $f : V \rightarrow m_g(V) = U$  por  $f(x) = m_g(x)$ .  $f$  será um homeomorfismo. É fácil ver que  $f$  será bijetiva e contínua, por ser restrição de função contínua, e também é fácil ver que  $f^{-1}$  é restrição de  $m_g^{-1} = m_{g^{-1}}$ , contínua, donde  $f^{-1}$  é contínua. ■

Esta semelhança entre as várias partes de um grupo topológico permite-nos encontrar um critério mais simples para decidir se um grupo é discreto, basta ver se apenas um elemento é isolado.

**Proposição 4.3.** *Sejam  $G$  um grupo topológico,  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $g \in H$ . Então  $H$  é um subgrupo discreto se, e somente se,  $g$  for um ponto isolado de  $H$ .*

*Demonstração.* Se  $H$  é discreto, segue trivialmente que existe  $g$  isolado (tome por exemplo a identidade) Por outro lado, seja  $U$  um aberto tal que  $U \cap H = \{g\}$ . Tome  $h \in H$  arbitrário e tome o homeomorfismo  $m_{gh^{-1}}$ . Note que  $m_{gh^{-1}}(h) = g$ , donde  $V := m_{gh^{-1}}^{-1}(U)$  é uma vizinhança aberta de  $h$ . Mostraremos, agora, que  $V \cap H = \{h\}$ . Seja  $x \in V \cap H$ . Pela definição de  $V$ , temos que  $m_{gh^{-1}}(x) = gh^{-1}x \in U$ . Por construção,  $gh^{-1}x \in H$ , donde devemos ter  $gh^{-1}x = m_{gh^{-1}}(x) = g$  necessariamente, por hipótese. Entretanto, como  $m_{gh^{-1}}$  é bijetiva e  $m_{gh^{-1}}(h) = g$ , devemos ter necessariamente  $h = x$ , portanto  $h$  é um ponto isolado. Pela arbitrariedade de  $h$ , concluímos que  $H$  é um subgrupo discreto. ■

**Corolário 4.3.1.** *Seja  $G$  um grupo topológico. Então  $G$  é discreto se, e somente se, existir um aberto da topologia contendo apenas um elemento do grupo.*

*Demonstração.* Se  $G$  é discreto, obviamente haverá abertos contendo apenas um elemento. Por outro lado, suponha que  $\{g\}$  é um aberto, para algum  $g \in G$ . então  $g$  é um ponto isolado de  $G$ , donde  $G$  é discreto, pela proposição. ■

## Capítulo 5

# Alguns Grupos de Matrizes

### 5.1 O grupo $SL(2, \mathbb{R})$

Nesta seção estudaremos algumas propriedades algébricas e topológicas do grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Por exemplo, a decomposição de Iwasawa, além de nos fornecer um conjunto gerador para  $SL(2, \mathbb{R})$ , nos permitirá ver que este grupo é homeomorfo ao produto de um círculo pelo semiplano, que implicará que o mesmo grupo é homeomorfo ao produto de um círculo pelo plano, ou de um círculo por um disco, que corresponde a um toro sólido sem a casca.

### 5.2 Grupos Projetivos

Grupos projetivos são uma classe de grupos muito importantes para nossos propósitos. Por isso, e por serem pouco familiares para muitas pessoas, decidimos escrever uma seção especialmente para introduzir os conceitos por trás deles.

Grupos projetivos são, em geral, grupos quocientes de grupos de matrizes, sendo os mais importantes os grupos  $PGL(n, \mathbb{K})$  e  $PSL(n, \mathbb{K})$ , onde  $\mathbb{K}$  é um corpo.

A motivação por detrás dos grupos projetivos vem, como o próprio nome sugere, da geometria projetiva. Ingenuamente, podemos pensar que na geometria projetiva, uma transformação multiplicada por um escalar é idêntica à transformação original. Isto é, transformações que só diferem por multiplicação de escalar são iguais, o que nos leva a querer criar classes de equivalência e tratar uma

transformação do espaço projetivo como todo um conjunto de transformações que agem da mesma forma.

O mesmo fenômeno ocorre com um grupo de transformações conhecido como transformações de Möbius. Estas transformações são muito importantes para a análise complexa (por ser o grupo de automorfismos da esfera de Riemann) e para a geometria hiperbólica (pois um subgrupo seu é o grupo de isometrias que preservam orientação de um dos modelos do espaço hiperbólico).

Convém conhecermos um pouco sobre as transformações de Möbius para motivarmos o estudo dos grupos projetivos, uma vez que acreditamos ser de mais fácil compreensão que geometria projetiva (e mais úteis para os nossos propósitos).

Veremos com mais detalhes na próxima seção que, em geral, uma transformação de Möbius é uma função da forma:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ac - bd \neq 0$ . Veremos também que estas funções formam um grupo, denotado por  $\text{Möb}(\mathbb{C})$ . Queremos associar uma transformação de Möbius com uma matriz contendo seus respectivos coeficientes. Isto pode ser feito com uma função  $\theta : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}(\mathbb{C})$  que mapeia:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

É possível mostrar que esta função é um epimorfismo, mas não é um isomorfismo, pois  $\theta(\lambda M) = \theta(M)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $\forall M \in GL(2, \mathbb{C})$ . De fato:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \mapsto \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)} = \frac{\lambda(az + b)}{\lambda(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

Eis uma situação em que convém tratar um conjunto de matrizes que diferem apenas por multiplicação de escalar como uma coisa só, justamente pela estrutura de uma transformação de Möbius. Como já comentamos (e como era de se esperar), faremos isso quocientando o grupo de matriz em questão. Mas quocientar com qual subgrupo (normal)?

Uma escolha natural seria usar o próprio núcleo de  $\theta$ , que já sabemos ser um subgrupo normal (ref). Entretanto, esta escolha depende da existência de um tal  $\theta$ , e queremos construir os grupos projetivos de maneira mais geral, sem

dependem de homomorfismos específicos, apesar de o resultado acabar sendo o mesmo. Na verdade, queremos tratar realmente do caso geral, com  $GL(n, \mathbb{K})$ , com  $n$  natural arbitrário e  $\mathbb{K}$  corpo arbitrário.

Também sabemos que o centralizador de um grupo é um subgrupo normal (ref). Mas será que, neste caso, quocientar com o centralizador resultaria no resultado desejado? Em outras palavras, o centralizador de  $GL(n, \mathbb{K})$  é o conjunto de “transformações escalares”  $\lambda \mathbb{I}_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ? A resposta é sim!

Note que  $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$  e multiplicar uma matriz por um escalar é o mesmo que multiplicar por essas “transformações escalares”.

**Proposição 5.1.** *O centralizador  $Z(n, \mathbb{K})$  do grupo  $GL(n, \mathbb{K})$  é o conjunto  $\{\lambda \mathbb{I}_n, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ .*

Isso nos motiva a seguinte:

**Definição 5.1.** O grupo linear projetivo  $PGL(n, \mathbb{K})$  é definido como o grupo quociente  $GL(n, \mathbb{K}) \setminus Z(n, \mathbb{K})$ .

Para o caso específico de  $n = 2$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , sabendo que  $\ker \theta = Z(2, \mathbb{C})$ , pelo Primeiro Teorema de Isomorfismos (ref), ganhamos de graça que  $PGL(2, \mathbb{C}) \approx \text{Möb}(\mathbb{C})$ .

Enquanto que a definição de  $PGL$  é relativamente unânime entre os autores (alguns quocientam com o núcleo de um homomorfismo específico, ou não chamam a atenção para o fato do conjunto ser centralizador... mas o conjunto sempre é o mesmo), a definição de  $PSL$  possui duas definições (realmente) diferentes, embora os grupos resultantes sejam isomorfos.

Na definição que seguiremos, somos motivados a quocientar dessa vez o grupo  $SL(n, \mathbb{K})$ , de uma maneira parecida com a que fizemos para o grupo  $GL(n, \mathbb{K})$ , de modo que o grupo quociente resultante herde de  $SL$  a propriedade de que seus elementos *tenham* determinante 1. Mais especificamente, queremos que cada elemento de  $PSL$  seja uma classe de equivalência com *todos* os elementos tendo determinante 1 e que difiram apenas pela multiplicação por um escalar.

Na outra definição, simplificada,  $PSL$  seria formado por classes de equivalência de elementos que *podem* ter determinante 1 *ao serem multiplicados por um escalar adequado*. E, portanto, não seria um quociente de  $SL$ . Veremos mais para frente o que seria.

Mais uma vez: na nossa definição,  $PSL$  será um grupo cujos elementos são classes de equivalência contendo *apenas* matrizes de determinante 1. Na definição alternativa,  $PSL$  seria o grupo cujos elementos são classes de equivalência contendo matrizes que *podem* ter determinante 1 ao serem multiplicadas por um

escalar, ou seja, classes de equivalência que contém *algum* elemento de determinante 1. A possibilidade de multiplicar a matriz por um escalar de modo que seu novo determinante seja 1 depende do corpo considerado. Veremos que, quando tratamos do corpo dos complexos, isso sempre é possível. Assim, *na definição alternativa*, valeria que  $PGL(n, \mathbb{C}) = PSL(n, \mathbb{C})$ . Esta igualdade não se verificará entretanto na nossa definição, sendo substituída por um isomorfismo.

Dada a motivação do que queremos que  $PSL$  seja, acabará que nossa definição será parecida com a do  $PGL$ . A única diferença é que devemos quocientar por um subgrupo de  $SL$ , não podendo ser, portanto,  $Z(n, \mathbb{K})$  completamente. Quocientaremos, portanto, pelo grupo  $SZ(n, \mathbb{K}) := \lambda \mathbb{I}_n \cap SL(n, \mathbb{K})$  que afirmo ser um subgrupo normal (falta provar).

**Definição 5.2.** O grupo linear especial projetivo  $PSL(n, \mathbb{K})$  é definido como o grupo quociente  $SL(n, \mathbb{K}) \backslash SZ(n, \mathbb{K})$ .

Vejamos como seria a cara do grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$ , a título de exemplo. O grupo  $SZ(2, \mathbb{C})$  é o grupo das matrizes  $\lambda \mathbb{I}$  com determinante 1. Ora:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

E então queremos que  $\lambda^2 = 1$ , que só é possível caso  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ . Explicitamente isso nos dá  $SZ(2, \mathbb{C}) = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$  e os elementos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  são parzinhos da forma  $\{M, -M\}$ , com  $M \in SL(2, \mathbb{C})$ . Analogamente, temos também que os elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  são parzinhos da forma  $\{M, -M\}$ , com  $M \in SL(2, \mathbb{R})$ .

Em especial, a identidade de  $PSL(2, \mathbb{C})$  seria então o parzinho  $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$ , que claramente não possui  $2\mathbb{I}$  como elemento, apesar de que  $2\mathbb{I}$  é elemento da identidade de  $PGL(2, \mathbb{C})$ , que é exatamente  $Z(2, \mathbb{C})$ . Isso mostra que  $PGL(2, \mathbb{C}) \neq PSL(2, \mathbb{C})$ , definitivamente.

Agora, para atingir o objetivo da definição alternativa, teríamos que definir  $PSL(n, \mathbb{K})$  como a imagem de  $SL(n, \mathbb{K})$  pela aplicação quociente  $q : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow PGL(n, \mathbb{K})$ . Esta aplicação  $q$  manda cada matriz de  $GL$  no respectivo conjuntinho de  $PGL$  que a contém.

**Definição 5.3.** O grupo linear especial alternativo  $PSL * (n, \mathbb{K})$  é definido como  $\{q(M), M \in SL(n, \mathbb{K})\}$ , onde  $q : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow PGL(n, \mathbb{K})$  é a aplicação quociente.

A identidade de  $PSL * (2, \mathbb{C})$  é então  $q(\mathbb{I}) = Z(2, \mathbb{C})$ , que, em particular, contém o elemento  $2\mathbb{I}$ . Não apenas isso mas, mais geralmente, temos  $PGL(n, \mathbb{C}) = PSL * (n, \mathbb{C})$ . A prova deste fato usa violentamente o fato que  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, o que motiva o seguinte resultado:

**Proposição 5.2.**  $PGL(n, \mathbb{K}) = PSL * (n, \mathbb{K})$  se, e somente se  $\mathbb{K}$  possui a raiz  $n$ -ésima de todo elemento.

### 5.3 O grupo $PGL(2, \mathbb{C})$

Começaremos achando um gerador para  $PGL(2, \mathbb{C})$ .

**Proposição 5.3.**  $PGL(2, \mathbb{C}) = \langle G \rangle$ , onde  $G = \{ \}$ .

### 5.4 O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$





## Capítulo 6

# Análise Complexa

### 6.1 A Esfera de Riemann

Há algumas vantagens em usar o corpo dos números complexos. Uma delas é de que os complexos são algebricamente fechados. Outra, é de que uma função que é diferenciável uma vez em um domínio<sup>1</sup> é diferenciável infinitas vezes neste domínio e, para todo ponto dele, podemos escrever a função como uma série de potências convergente em uma determinada vizinhança do ponto (são as chamadas funções *holomorfas* ou *analíticas*). Duas desvantagens dos complexos são: não poder dividir por zero e  $\mathbb{C}$  não ser compacto (e portanto poder haver sequências sem nenhuma subsequência convergente). Estas duas desvantagens podem ser ambas dribladas acrescentando  $\infty$  aos complexos. Este novo conjunto será chamado de *plano complexo estendido*, e denotado por  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$ . Para os leitores preocupados, a natureza do elemento  $\infty$  não importa - a princípio, pode tomar qualquer objeto que não pertença a  $\mathbb{C}$ .

**Proposição 6.1.** *Seja  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  a esfera unitária de centro em  $(0, 0, 0)$ . A projeção estereográfica  $\pi : S^2 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  é um homeomorfismo.*  $\square$

*Demonstração.* A projeção estereográfica é dada por:

$$\pi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \quad (6.1)$$

Para ver que a projeção é contínua, basta ver que cada uma das funções coordenadas são contínuas (nunca se tem  $z = 1$ ).

---

<sup>1</sup>Neste capítulo, domínio será sinônimo de aberto conexo, quando subentendido pelo contexto.

Falta ver que a função inversa é contínua. Para tanto, achemos agora uma expressão para esta. Definindo  $u := \operatorname{Re}(\bar{\pi})$  e  $v := \operatorname{Im}(\bar{\pi})$ , temos:

$$u^2 + v^2 + 1 = \frac{x^2 + y^2 + (1 - z)^2}{(1 - z)^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1 - 2z}{(1 - z)^2}$$

Como  $(x, y, z) \in S^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e daí:

$$u^2 + v^2 + 1 = \frac{2 - 2z}{(1 - z)^2} = \frac{2}{1 - z}$$

Por (1), temos que:

$$u = \frac{x}{1 - z} \implies x = u(1 - z) = \frac{2u}{2/(1 - z)} = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}$$

Analogamente:

$$y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$$

Para achar  $z$  em função de  $u$  e  $v$ , veja que:

$$u^2 + v^2 + 1 = \frac{2}{1 - z} \implies 1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} \implies z = 1 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$\implies z = \frac{u^2 + v^2 + 1 - 2}{u^2 + v^2 + 1} \implies z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

Com isto, chegamos finalmente que:

$$\bar{\pi}^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \quad (6.2)$$

Que é evidentemente contínua pois cada função coordenada é contínua. ■

Podemos construir uma bijeção  $\pi : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  estendendo  $\bar{\pi}$  de forma que  $\pi(0, 0, 1) = \infty$ . A semelhança entre  $\overline{\mathbb{C}}$  e  $S^2$  se estende também para a topologia,

por isso os dois objetos costumam ser identificados e costumamos chamar  $\overline{\mathbb{C}}$  de *esfera de Riemann*.

Definiremos a topologia de  $\overline{\mathbb{C}}$  como as imagens por  $\pi$  de abertos de  $S^2$ , e teremos:

**Proposição 6.2.**  $\pi$  é um homeomorfismo. □

*Demonstração.* Seja  $A$  um aberto de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Quero mostrar que  $\pi^{-1}(A)$  é aberto de  $S^2$ . Ora, por definição de aberto em  $\overline{\mathbb{C}}$ , existe  $B$  aberto de  $S^2$  tal que  $A = \pi(B)$ . Como  $\pi$  é uma bijeção,  $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\pi(B)) = B$ , que é aberto de  $S^2$ . Está provado que  $\pi$  é contínua.

Agora, dado  $B$  aberto de  $S^2$ , quero provar que  $\tau^{-1}(B)$  é aberto de  $\overline{\mathbb{C}}$ , onde  $\tau$  é a função inversa de  $\pi$ . Ora, a imagem inversa da função inversa de uma função, coincide com sua imagem direta, donde  $\tau^{-1}(B) = \pi(B)$ , que é aberto por definição. ■

**Corolário 6.2.1.**  $\overline{\mathbb{C}}$  é compacto □

*Demonstração.*  $S^2$  é compacto e  $\overline{\mathbb{C}}$  é a imagem de  $S^2$  sob  $\pi$ . Como  $\pi$  é homeomorfismo, em particular é contínua. Como a imagem de compactos por funções contínuas é compacto, a proposição segue. ■

**Proposição 6.3.** *Todo aberto de  $\overline{\mathbb{C}}$  ou é um aberto de  $\mathbb{C}$ , ou é o complementar de um compacto de  $\mathbb{C}$  unido com  $\infty$*  □

O processo que acabamos de fazer é o caso particular de uma técnica mais geral conhecida como compactificação de espaços topológicos (mais especificamente, *compactificação de Alexandrov*).

## 6.2 Círculos e Retas

## 6.3 Funções Racionais

Ao transformar o plano complexo na esfera de Riemann, o conceito de holomorfismo pode ser generalizado. Agora, funções com certas singularidades podem se tornar bem definidas, se definirmos o valor da função na singularidade como sendo infinito. Por questões de bom comportamento, estas singularidades devem ser pólos e devem ser isoladas. Uma função complexa holomorfa em todo plano exceto em um conjunto discreto de pontos que são pólos é chamada de função meromorfa. Assim, “holomorfismo” na esfera de Riemann passa a ser

uma adaptação das funções meromorfas no plano. Alguns autores chamam esta generalização de “holomorfismo” para a esfera de Riemann de holomorfismo de fato, enquanto outros ainda usam o termo meromorfismo. Usaremos o segundo.

Assim como holomorfismo no plano implicava em continuidade, a proposição seguinte nos garante que:

**Proposição 6.4.** *Se  $f$  é meromorfa em  $\overline{\mathbb{C}}$ , então  $f$  é contínua em  $\overline{\mathbb{C}}$*  □

Diferentemente das funções holomorfas no plano, é possível descrever a forma de todas as funções meromorfas:

**Teorema 6.5.** *Uma função de  $\overline{\mathbb{C}}$  para  $\overline{\mathbb{C}}$  é meromorfa se, e somente se é uma função racional* □

E além disso:

**Proposição 6.6.** *Uma função racional  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  é injetiva se, e somente se for composta por polinômios de grau igual a 1.*

O conjunto das funções meromorfas em  $\overline{\mathbb{C}}$  forma um corpo  $\mathbb{C}(z)$ . Este corpo possui um subcorpo isomorfo a  $\mathbb{C}$  (o das funções constantes) e portanto,  $\mathbb{C}(z)$  pode ser considerado uma extensão de  $\mathbb{C}$

## 6.4 Transformações de Möbius

**Definição 6.1.** Uma função  $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  é dita ser uma *Transformação de Möbius* se existem  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  com  $ad - bc \neq 0$  tais que:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ .



Note que é necessário que a função tome valores nos complexos estendidos, para estar bem definida.

É fácil ver que as transformações de Möbius formam um grupo sob a operação de composição. Este grupo será denotado por  $\text{Möb}(\mathbb{C})$ . Já vimos brevemente este grupo na seção (ref). Lembro que  $\text{Möb}(\mathbb{C}) \approx PSL(2, \mathbb{C})$ . Assim, as propriedades de  $\text{Möb}(\mathbb{C})$  puramente algébricas, como geradores, podem ser recicladas diretamente da seção (ref). Na presente seção, iremos nos dedicar a estudar

as propriedades de  $\text{Möb}(\mathbb{C})$  mais relacionadas com sua ação em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Recomendo fortemente a leitura das seções (refs) antes da presente.

Na verdade, podemos pensar nas transformações de Möbius como a expressão da ação do grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$  em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Neste sentido, esta seção irá se preocupar em estudar o grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$  enquanto agente deste espaço. Assim, estudaremos questões de pontos fixos, estabilizadores, transitividade, etc.

Convém estabelecer uma notação que será seguida no decorrer de todo o texto, daqui em diante. Dada uma matriz  $M$ , seja de um grupo linear quanto de um grupo projetivo, denotaremos por  $f_M$  a respectiva transformação de Möbius.

Voltando um pouco em seu papel na análise complexa, as transformações de Möbius são precisamente os automorfismos da esfera de Riemann. Isto significa que estas transformações preservam a estrutura de variedade complexa da esfera. Sem entrar em muitos detalhes agora, mas preservar a estrutura de variedade complexa significa que a transformação é uma bijeção meromorfa com inversa também meromorfa. A proposição seguinte demonstra isto, juntamente com o fato já conhecido que  $\text{Möb}(\mathbb{C})$  é um grupo.

Uma questão interessante a se pensar: quais são os “automorfismos” do plano enquanto variedade diferenciável real?

**Proposição 6.7.** *Uma função  $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{C})$  se, e somente se  $T$  é uma bijeção meromorfa*  $\square$

*Demonstração.* Basta usar em conjunto o teorema 5.5 e a proposição 5.6.  $\blacksquare$

**Corolário 6.7.1.** *Se  $T \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ , então  $T$  é homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$ .*  $\square$

*Demonstração.* Pela proposição 5.7,  $T$  é meromorfa. Pela proposição 5.4,  $T$  é contínua em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Como  $\text{Möb}(\mathbb{C})$  é um grupo,  $T^{-1} \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ , donde  $T^{-1}$  é meromorfa e portanto contínua. A afirmação segue.  $\blacksquare$

Chamo a atenção para o fato de que a proposição acima diz que preservar a estrutura de variedade complexa nos dá automaticamente que a topologia também é preservada.

Uma outra característica importante das transformações de Möbius é o que se segue:

**Teorema 6.8.** *Uma transformação da esfera de Riemann em si mesma é um homeomorfismo conforme que preserva orientação se, e somente se, é uma transformação de Möbius.*

*Transformações de Möbius diferentes da identidade possuem no máximo dois pontos fixos. Isto é, se uma transformação de Möbius deixa três pontos fixos,*

*então é a identidade. Podemos usar a interpretação acima e então este fato pode ser expresso nos seguintes termos: é impossível fazer quaisquer movimentos numa esfera fixando três dedos nela (em pontos diferentes).*

## Parte II

# Grupos Fuchsianos





## Capítulo 7

# Introdução à Geometria Hiperbólica

### 7.1 O Espaço Hiperbólico

Lembremos que os cinco axiomas de Euclides permaneceram por muito tempo sendo os princípios norteadores da geometria. O quinto axioma, que é equivalente a dizer: “dada uma reta e um ponto fora da reta, há apenas uma outra reta paralela à primeira que passa pelo ponto” ou (o que é equivalente), “a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ”, era o axioma menos natural de ser aceito sem demonstração, e muitas pessoas tentaram provar que este axioma podia ser provado a partir dos outros quatro. Na primeira metade do século XIX, Gauss provou que isto não era possível, construindo uma geometria em que não valia o quinto axioma mas mesmo assim era consistente. Especificamente, triângulos podiam ter a soma interna de seus ângulos menor do que  $180^\circ$ . Apesar de Gauss não ter publicado este trabalho, anos mais tarde, os matemáticos Lobachevsky e Bolyai publicaram versões semelhantes, dando origem ao embrião do que seria a geometria hiperbólica.

O ambiente natural para tratar de geometria hiperbólica é o espaço hiperbólico. O espaço hiperbólico aparece naturalmente ao se fazer a classificação das variedades riemannianas completas, simplesmente conexas e de curvatura seccional constante. Para cada dimensão  $n$  e cada valor de curvatura, há apenas um tipo de variedade assim (a menos de isometrias):  $\mathbb{R}^n$ , se a curvatura for nula, a esfera ( $\mathbb{S}^n$ ), se a curvatura for positiva, e o espaço hiperbólico ( $\mathbb{H}^n$ ), se a curvatura for negativa.

A exemplo deste teorema, uma compreensão mais aprofundada dos temas

abordados aqui necessitam de uma ampla dose de geometria diferencial, mais especificamente, de variedades riemannianas. Não exigiremos, entretanto, tais requisitos e pessoas sem conhecimento em geometria diferencial poderão acompanhar a imensa maioria do texto sem problemas. A despeito disto, durante o texto poderão haver alguns comentários, tratando das nossas construções enquanto variedades riemannianas propriamente ditas, a fim de esclarecer construções obscuras, sanar a curiosidade dos leitores interessados ou que possuem os requisitos para tal. A próxima seção tem como objetivo introduzir esta abordagem, sem compromissos.

Um modo natural de se construir o espaço hiperbólico é como uma esfera num espaço de Minkowski, mas há outras construções (isométricas, pelo teorema citado acima). Estas construções são chamadas nesta seção de “modelos do espaço hiperbólico”. Veremos principalmente três deles: o modelo do semiplano, o modelo do disco de Poincaré e o modelo do hiperboloide (que é a construção mencionada acima como a mais natural), nesta ordem. A princípio, veremos todos os modelos em apenas duas dimensões, mas é possível generalizá-los para uma dimensão  $n$  arbitrária.

Como iremos ver, a geometria hiperbólica é completamente diferente da euclidiana e causa disto é a diferença no modo de medir distância em cada geometria. Mais que isso, veremos que a forma de construir distância em cada modelo é peculiar e pode parecer arbitrária, à primeira vista. Por isso, optamos por introduzir brevemente o modo usual de definir distância numa variedade riemanniana, para motivar a definição de distância no nossos modelos. A situação é análoga para áreas.

Na verdade, a construção do grupo de isometrias, geodésicas e outros objetos será muito mais trabalhoso no primeiro modelo que iremos tratar. Como os demais modelos são isométricos ao primeiro, basta encontrar a isometria e ela poderá ser usada para transportar todos os resultados do primeiro modelo para os outros de forma relativamente fácil.

Grande parte dos resultados que serão expostos na seção 3 e seguintes estão detalhadamente provados em [ref], por isso não demonstraremos a maior parte deles em detalhes, dando apenas uma ideia ou roteiro da demonstração.

## 7.2 Um nada de Variedades Riemannianas

### 7.2.1 Distância

O modo de definir distância numa variedade riemanniana reflete muito sobre a estrutura deste objeto, por isto gastaremos um tempo falando disto. Para

os leitores menos habituados, uma variedade é uma generalização do conceito de superfície (se for diferenciável, é uma superfície onde faz sentido falar de coisas como derivadas e diferenciabilidade). Uma variedade riemanniana é uma variedade que possui uma estrutura a mais, chamada de métrica riemanniana. Esta estrutura é semelhante a um produto interno, dando portanto noção de comprimentos e ângulos e não deve ser confundida com métrica no sentido de espaço métrico<sup>1</sup>. Para ser mais exato, a métrica riemanniana é um objeto  $g$  que a cada ponto  $P$  da variedade associa um produto interno  $g_P(\cdot, \cdot)$  no espaço tangente a este ponto (generalização de plano tangente para uma superfície) e que também deve satisfazer a um certo critério de suavidade. Este objeto também costuma ser chamada de tensor métrico. O tensor métrico não nos permite calcular distâncias diretamente, mas ele induz uma norma em cada espaço tangente, que pode ser usada para calcular comprimento de vetores tangentes a uma curva, e portanto comprimentos de curvas na nossa variedade. Explicitamente, seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana e  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva em  $M$ . Então, o comprimento de  $\gamma$  pode ser obtido assim:

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

É possível mostrar que esta integral é invariante por diferentes parametrizações.

Mas isto ainda não é a distância entre pontos. Como podemos usar comprimento de curvas para obter informações sobre a distância entre pontos? Tomando emprestada a intuição já construída sobre o conceito de distância, gostaríamos que a distância entre dois pontos tome o menor valor, considerando todas as formas de partir de um e chegar no outro. Assim, podemos definir a distância entre dois pontos como o ínfimo dos comprimentos de curvas ligando ambos. Vale considerar um critério de suavidade, como curvas de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Habitualmente tomaremos esta última<sup>2</sup>. Nos nossos modelos, construiremos distância justamente assim, sendo o ínfimo do comprimento de curvas ligando dois pontos, induzida por uma certa métrica e deixando clara a estrutura de variedade riemanniana destes espaços. É possível mostrar que uma função construída desta maneira é de fato uma métrica (no sentido de espaço métrico) em qualquer variedade riemanniana, mas a prova disto exige conhecimentos mais avançadas. Por isso, provaremos para os casos específicos que iremos tratar. Ainda, provaremos que existe e é única a curva que liga quaisquer dois pontos e cujo comprimento coincide com a distância (chamaremos de geodésica), sendo curvas análogas a retas, no caso euclidiano. A existência de tais curvas, apesar de ser uma propriedade dos espaços euclidiano e hiperbólico,

---

<sup>1</sup>Para não confundir, passaremos a nos referir a métrica no sentido de espaço métrico como distância sempre que possível.

<sup>2</sup>Dá para mostrar que as duas escolhas citadas levam sempre aos mesmos resultados, mas a prova disto é difícil.

não é verdade para qualquer espaço. Considere, por exemplo,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  com a métrica usual e tome dois pontos no eixo  $y$ , um positivo e outro negativo.

Vale observar que esta definição só faz sentido em variedades conexas, para que haja pelo menos uma curva ligando dois pontos.

Uma outra observação, agora um pouco mais técnica, é a seguinte. A definição formal de variedade demanda que esta seja um espaço topológico. É possível provar que a topologia induzida pela distância da forma como a construímos empata com a topologia que começamos, isto é, da variedade enquanto espaço topológico, e isto vale para toda variedade riemanniana (Hausdorff). Isso mostra que, em algum sentido, a distância que definimos é topologicamente consistente com nossa variedade.

Apesar de não provarmos que qualquer métrica riemanniana dá origem a uma distância bem definida, provaremos para uma classe bem geral de métricas. São métricas do tipo:  $g_P(v, v) = f^2(P)\langle v, v \rangle$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual, definidas num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Esta classe de métricas receberá especial atenção no nosso texto. Na demonstração deste fato, usaremos que o produto interno usual induz de fato uma distância. A prova deste fato pode ser vista na próxima seção.

**Lema 7.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto conexo por caminhos e seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $g$  é uma métrica riemanniana em  $U$  definida por*

$$g_P(v, v) = f^2(P)\langle v, v \rangle$$

*Então a distância  $d_f$  induzida pelo ínfimo dos comprimentos  $l_f$  de curvas  $C^\infty$  por partes :*

$$l_f(\gamma) = \int |f(P)| |\gamma'(t)| dt$$

*É uma métrica.*

*Demonstração.* Antes de tudo, notamos que a distância está bem definida pelo fato do domínio ser conexo. Assim, sempre haverá pelo menos uma curva ligando dois pontos do domínio e estaremos tomando o ínfimo de um conjunto sempre não-vazio.

É evidente que o integrando é sempre positivo, donde  $l(\gamma) \geq 0$ , para toda curva possível  $\gamma$ , e portanto  $d(P, Q) \geq 0$ ,  $\forall P, Q \in U$ . Tomando  $\gamma(t) = P$ , a curva constante, temos que  $\gamma'(t) = 0$ ,  $\forall t$ , e daí o integrando vai ser identicamente nulo, resultando em  $l(\gamma) = 0$  e portanto  $d(P, P) \leq 0$ ,  $\forall P \in U$ . Usando ambas as desigualdades, chegamos em  $d(P, P) = 0$ ,  $\forall P \in U$ .

Seja agora  $P \neq Q \in U$ . Como  $U$  é aberto, existe  $r_1 > 0$  tal que  $B[P, r_1] \subset U$  (bola fechada com distância euclidiana). Além disso, seja  $r_2 = (1/2) \cdot d_{\text{euc}}(P, Q) > 0$  e tome  $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$  de forma que  $K := B[P, r] \subset U$ .  $K$  é compacto, donde  $|f|$  assume um mínimo em  $K$ . Seja  $m > 0$  tal mínimo. Mostrarei que  $m \cdot r > 0$  é uma cota inferior para o conjunto dos comprimentos  $l_f(\gamma)$ , com  $\gamma$  adequada. Tome uma tal curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  arbitrária. Não é difícil ver que  $\gamma$  irá interceptar  $\partial K$  em pelo menos um ponto, seja  $R \in \text{Im} \gamma \cap \partial K$  o primeiro deles e seja  $t^* \in [a, b]$  tal que  $\gamma(t^*) = R$ . Então:

$$l_f(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \geq \int_a^{t^*} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \geq m \int_a^{t^*} \|\gamma'(t)\| dt$$

Pois  $\gamma(t) \in K$ ,  $\forall t < t^*$ . Note que a última integral é o comprimento euclidiano da curva  $\gamma$  restrita a  $[a, t^*]$  que é maior que a distância euclidiana de  $\gamma(a) = P$  a  $\gamma(t^*) = R$ , por definição de distância euclidiana. Isto é,  $l_f(\gamma) \geq |R - P|$ . Agora, basta ver que, como  $R \in \partial K$ ,  $|R - P| = r > 0$ , e aí  $l_f(\gamma) > m \cdot r$ . A implicação  $P \neq Q \implies d(P, Q) > 0$  segue da arbitrariedade de  $P$ ,  $Q$  e  $\gamma$ .

Para ver que  $d(P, Q) = d(Q, P)$ , basta ver que reparametrizações que invertem o sentido da curva são difeomorfismos e portanto não alteram o valor do comprimento da curva, pelo teorema da mudança de variáveis na integral.

Por fim, provemos a desigualdade triangular. Sejam  $P, Q, R \in U$  arbitrários. Pela definição de ínfimo, para todo  $n$  existem curvas  $\gamma_n$  e  $\mu_n$  tais que  $l(\gamma_n) \leq d(P, Q) + 1/2n$  e  $l(\mu_n) \leq d(Q, R) + 1/2n$ . Tomando  $\alpha_n$  como as concatenações de  $\gamma_n$  e  $\mu_n$ , sendo eventualmente necessário reparametrizações, teremos que:

$$d(P, R) \leq l(\alpha_n) = l(\gamma_n) + l(\mu_n) \leq d(P, Q) + d(Q, R) + \frac{1}{n}$$

Como esta desigualdade vale para todo  $n$ , obtemos a desigualdade triangular:  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$  para quaisquer pontos. ■

## 7.2.2 Diferenciais

Lembre-se de que, se  $f$  é uma função diferenciável entre  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , então sua diferencial é uma aplicação que a cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  associa uma transformação linear  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Em verdade, a transformação linear  $df_p$  é a transformação linear que melhor aproxima  $f$  nas proximidades do ponto  $p$ . A diferencial possui uma propriedade bastante interessante. Se  $\gamma'(t)$  é o vetor tangente a uma curva  $\gamma$  no ponto  $p$ , então  $df_p(\gamma'(t))$  será o vetor tangente à curva  $f \circ \gamma$  no ponto

$f(p)$ . Esta propriedade parece nos indicar que, enquanto pontos se transformam através de funções do tipo  $f$ , vetores se transformam com os respectivos diferenciais. Esta propriedade motiva a generalização de diferencial para variedades.

Se  $M, N$  são variedades diferenciáveis, e  $f : M \rightarrow N$  é uma função diferenciável, então a diferencial de  $f$  é a aplicação que a cada ponto  $p \in M$  associa uma transformação linear entre os espaços vetoriais  $T_p M$  e  $T_{f(p)} N$  ( $T_p M$  é o espaço tangente a  $p$  na variedade  $M$ ) de maneira que se  $\gamma$  é uma curva em  $M$  e  $\gamma'(t) \in T_p M$ , então  $df_P(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t) \in T_{f(p)} N$ .

A versão generalizada da regra da cadeia diz que, se  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow O$ , então:

$$d(g \circ f)_p = (dg_{f(p)}) \circ (df_p)$$

### 7.2.3 Áreas

As funções mais famosas do produto interno são a de medir comprimento de vetores e medir ângulo entre dois vetores. Entretanto, uma função menos óbvia está relacionada com volume. De fato, se  $V$  é um espaço vetorial com produto interno, então o  $k$ -volume do  $k$ -paralelepípedo formado pelos vetores  $v_1, \dots, v_k$  pode ser obtido tomando a raiz quadrada do determinante da matriz cuja entrada  $a_{ij}$  é  $\langle v_i, v_j \rangle$ . Podemos usar esta propriedade para calcular o  $k$ -volume de uma variedade de dimensão  $k$ . Dado um sistema de coordenadas locais  $\phi(P) = (x_1, \dots, x_k)$ , podemos escrever  $g_P$  como uma matriz  $g_{ij}(P) = g_{ij}(x_1, \dots, x_k)$ . Definimos então o  $k$ -volume de um conjunto  $E \subset M$  por:

$$\mu(E) = \int_{\phi(E)} \sqrt{\det(g_{ij}(x_1, \dots, x_k))} dx_1 \dots dx_k$$

No caso de uma métrica do tipo  $g_P(v, v) = f^2(P) \langle v, v \rangle$ , a matriz de  $g$  será do tipo  $f^2 Id$  (na verdade,  $(f \circ \phi^{-1})^2$ ), onde  $Id$  é a matriz identidade  $k \times k$ . O determinante desta matriz será então  $f^{2k}$  e daí:

$$\mu(E) = \int_{\phi(E)} f^k dx_1 \dots dx_k$$

No caso específico em que a dimensão da nossa variedade é 2 (que será o caso em que estaremos principalmente focados aqui), a área será simplesmente a integral da função que multiplica o produto interno.

## 7.3 Revisão de Geometria Euclidiana

Nesta seção, iremos apresentar o roteiro que seguiremos para os modelos do espaço hiperbólico e usaremos o plano euclidiano, que já nos é muito familiar, como primeiro exemplo. Antes de começarmos, é interessante ponderar um pouco sobre o significado do termo “geometria”. Felix Klein, dentro do programa de Erlangen, define geometria da seguinte forma: “Dado um conjunto munido de uma estrutura e de um grupo de transformações que preservam tal estrutura, geometria é o estudo dos objetos que são invariantes por tais transformações. Nosso roteiro será então o seguinte: tomaremos um conjunto, definiremos uma distância nele (a partir da estrutura de variedade riemanniana, pelo processo já mencionado) e acharemos o grupo de transformações que preservam esta estrutura, isto é, o grupo de isometrias. Estudaremos também, em cada modelo, objetos invariantes por isometria, como geodésicas (informalmente, curvas que minimizam distância entre pontos) e áreas.

No caso da geometria euclidiana, o conjunto é  $\mathbb{R}^2$  (ou  $n$ , mais geralmente). Neste caso específico, apesar de também ser uma variedade riemanniana, o plano possui uma estrutura natural de espaço métrico e portanto há um jeito fácil de escrever a métrica sem recorrer a ínfimo de comprimentos. Apesar desta estrutura métrica natural, iremos tratar o plano como uma variedade riemanniana dotada do produto interno usual e definir distância como mencionado acima, para sermos coerentes com nosso programa. Acharemos também o grupo de isometrias, usualmente denotado por  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  e o grupo de isometrias que preservam orientação, denotado por  $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ .

A métrica do plano euclidiano enquanto variedade riemanniana é dada por:

$$g_P(v, v) = \langle v, v \rangle$$

Onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual. Note que a métrica não depende do ponto  $P$ , isto é, é uma métrica constante. Por algumas razões técnicas, este tipo de métrica é uma classe de métricas interessante de ser considerada. Veremos que as métricas dos modelos do espaço hiperbólico não são constantes, com exceção do modelo do hiperboloide. Isto é parte do motivo de considerarmos este modelo mais natural.

Com isso, o comprimento de uma curva  $\gamma$  é:

$$L_{\text{euc}}(\gamma) = \int \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt = \int \|\gamma'(t)\| dt$$

Para o caso euclidiano, faremos uma pequena alteração no roteiro. Em vez de provarmos primeiro que a distância definida usando ínfimo de comprimentos

de curvas está bem definida, usaremos a expressão acima para acharmos o comprimento de uma reta ligando dois pontos e depois provaremos que qualquer outra curva que os conecte tem comprimento maior, donde o comprimento da reta empata com a distância entre os pontos. Desta forma, teremos uma expressão para a distância entre pontos e com ela concluiremos que de fato satisfaz as propriedades desejadas.

Em primeiro lugar, deve ser provado que o comprimento da reta ligando pontos  $P$  e  $Q$  coincide com  $\|Q - P\|$ . Isso mostra que a distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  é menor ou igual a  $\|Q - P\|$ . Para a outra desigualdade, basta mostrar que o comprimento de qualquer curva é maior ou igual a  $\|Q - P\|$ . Isto se faz usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz para estimar  $\|\gamma'(t)\|$  por baixo usando o  $\|Q - P\|$ . Depois disto, usa-se a relação do produto interno com a derivada de forma a poder se usar o teorema fundamental do cálculo. Uma vez que a distância entre dois pontos é dado por uma norma, segue que de fato é uma métrica, e ainda coincide com a usual.

Uma maneira alternativa de provar que retas realizam distância é provar inicialmente para o caso mais fácil em que os dois pontos estão na mesma abscissa e posteriormente usar rotações e translações para atingir quaisquer dois pontos.

Agora que já definimos a distância e justificamos que ela de fato o é (e de quebra achamos geodésicas), caracterizaremos o grupo de isometrias do espaço euclidiano. Você pode começar verificando que as translações e as transformações ortogonais são isometrias. De fato, toda isometria de  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrita como a composição de uma transformação corresponde a alguma matriz de  $O(n, \mathbb{R})$  com uma translação. É matéria de fácil verificação que o conjunto destas funções forma um grupo. (e também, que coincide com o grupo gerado pelos subgrupos de transformações ortogonais e translações)

No caso específico do plano, pode ser mostrado que as transformações ortogonais podem ser apenas rotações em torno da origem ou reflexões em torno de uma linha. Para os leitores familiarizados com o estudo dos grupos de Lie, lembre-se que  $O(2, \mathbb{R})$  é um grupo de Lie de uma dimensão, e portanto o grupo das isometrias do plano é um grupo de Lie de três dimensões.

**Teorema 7.2.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria. então existem  $A \in O(2, \mathbb{R})$  e  $p \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\phi(v) = Av + p$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^2$ .*

A ideia da demonstração é definir uma função  $\psi(v) = \phi(v) - \phi(0)$ , de forma que  $\psi$  fixe a origem. Dado que  $\phi$  é isometria, é fácil ver que  $\psi$  também será. Daí,  $\|\psi(v)\| = d(\psi(v), 0)$ . Como  $\psi$  preserva origem,  $\|\psi(v)\| = d(\psi(v), \psi(0)) = d(v, 0) = \|v\|$ , donde  $\psi$  preserva norma. Como a norma vem de um produto interno, temos que  $2\langle v, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2$  e disto pode ser tirado que  $\psi$  preserva produto interno. Ainda, destes fatos podemos concluir que  $\|\psi(v + w) - \psi(v) - \psi(w)\|^2 = 0$  e  $\|\psi(tv) - t\psi(v)\|^2 = 0$ , e portanto  $\psi$  é linear.



Sendo  $\psi$  linear e que preserva produto interno, é fácil ver que é ortogonal. Dada uma base, vai haver uma matriz  $A$  que representa  $\psi$ . Daí,  $\langle Av, Aw \rangle = (Av)^T(Aw) = v^T A^T A w$  necessariamente deve ser igual a  $\langle v, w \rangle = v^T w$ , isto é, temos que  $v^T A^T A w = v^T w$ . escolhendo  $v$  e  $w$  de maneira esperta podemos obter os componentes da matriz  $A^T A$  e não é difícil ver que vai ser a identidade.

Chamando  $\phi(0)$  de  $p$ , temos que  $\phi(v) = Av + p$  com  $A$  ortogonal, como gostaríamos.

Seja  $E(2)$  o subgrupo das bijeções de  $\mathbb{R}^2$  gerado pela união dos conjuntos de transformações ortogonais e das translações. Pela proposição [ref], este grupo empata com o grupo de todas as concatenações finitas de transformações ortogonais e translações. Não é difícil ver que esta concatenação sempre vai dar funções da forma do teorema anterior. Considere a composição de duas destas e depois use indução. Seja  $\phi(v) = A(v) + p$  e  $\psi(v) = B(v) + q \in E(2)$ . Então  $\phi \circ \psi = A(B(v) + q) + p = A(B(v)) + A(q) + p$ . Como a composição de transformações ortogonais é ortogonal, seja  $C \in O(2, \mathbb{R})$  tal que  $C = A \circ B$  e seja  $r = A(q) + p$ . Então  $\phi \circ \psi = C(v) + r$ . Além disso, funções inversas também são da mesma forma. Tome  $\xi(v) = D(v) + s$  onde  $D = A^{-1}$  e  $s = -D(p)$ . Então  $\xi \circ \phi = D(A(v) + p) + s = D(A(v)) + D(p) + s = A^{-1}(A(v)) + D(p) - D(p) = v$ . Isto demonstra que  $E(2) = Isom(\mathbb{R}^2)$ .

Afirmamos, ainda, que  $Isom^+(\mathbb{R}^2)$  é o subgrupo gerado pelas transformações lineares cujas matrizes estão em  $SO(2, \mathbb{R})$  e pelas translações. Isto empata com as funções que podem ser escritas como  $\phi(v) = Av + p$  com  $A \in SO(2, \mathbb{R})$  e  $p \in \mathbb{R}^2$ . A demonstração é análoga àquela feita no parágrafo anterior.

Um assunto interessante, e que será de especial interesse neste estudo, é a chamada *tesselação*. Isto não é nada mais do que um ladrilhamento do plano, isto é, cobrir o plano com polígonos de forma que os polígonos não se superponham e de forma que vértices se encontrem com vértices. Caso os polígonos sejam regulares, as únicas tesselações possíveis do plano são com triângulos, quadrados ou hexágonos. Na geometria hiperbólica, entretanto, há um número infinito de tesselações possíveis, revelando uma estrutura mais rica do que a da geometria euclidiana. Os grupos fuchsianos, pelos quais estamos interessados, serão ferramentas importantes no estudo das tesselações do plano hiperbólico. Há uma associação entre uma tesselação e um grupo de isometria (o grupo de isometria que preserva a tesselação), conectando assim álgebra com geometria. E, no caso da geometria hiperbólica, estes grupos serão os fuchsianos.

## 7.4 O Semiplano

Partiremos agora, de fato, para a geometria hiperbólica. Começaremos considerando o modelo do semiplano complexo superior.

O conjunto que servirá de substrato para este modelo é  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\} \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ . Usaremos a extensão do plano complexo para abranger  $\infty$  quando necessário, daí, rapidamente nota-se que  $\mathbb{H}$  corresponde a um dos hemisférios (aberto) da esfera de Riemann.

Nossa métrica riemanniana será dada por:

$$g_P(v, v) = \frac{1}{y^2} \langle v, v \rangle$$

Onde  $P = (x, y)$ . A norma será então:

$$||v||_{\mathbb{H}} = \frac{1}{y} ||v||$$

O comprimento de curvas de classe  $\mathcal{C}^\infty$  por partes  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  será:

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_I \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

E a distância entre dois pontos como o ínfimo do valor do comprimento de todas as curvas  $\mathcal{C}^\infty$  por partes que os ligam.

Chamaremos  $l_{\mathbb{H}}$  e  $d_{hyp}$  apenas de  $l$  e  $d$ , mas ficará claro pelo contexto.

Para ver que esta métrica de fato induz uma distância, basta notar que ela é do tipo  $g_P(v, v) = f^2(P) \langle v, v \rangle$  com  $f(x, y) = 1/y$  e usar o lema [ref].

Antes de passarmos a estudar o grupo de isometrias, analisaremos nesta seção algumas características particulares da distância hiperbólica definida. Isto servirá tanto para nos familiarizarmos e criarmos intuição com a geometria hiperbólica, tanto para deduzirmos resultados preliminares que serão necessários nas próximas etapas. Na verdade, há diversos resultados preliminares que precisam ser provados antes de conseguirmos achar o grupo de isometrias. Além de estudarmos como a distância hiperbólica se comporta, precisamos primeiros ver algumas isometrias e depois estudar geodésicas e algumas de suas propriedades antes de conseguirmos achar o grupo de isometrias.

Vamos começar abertamente comparando e confrontando a distância hiperbólica com a euclidiana. Note que o comprimento de curvas verticais ligando os pontos  $(x_0, a)$  e  $(x_0, b)$  é  $\log(\frac{b}{a})$ , o que significa que quanto menor for  $a$ , maior é o comprimento da curva, tendendo pra infinito. Essa é uma das razões pelas quais dizemos que o eixo real é chamado de círculo no infinito (o “círculo” vem da esfera de Riemann). O mesmo acontece quando  $b$  vai a infinito,

mas é possível ver que pedaços de cima contribuem menos para o comprimento da curva. Por exemplo se temos uma reta de  $(x_0, 1)$  para  $(x_0, 3)$ , esperaríamos, de acordo com a geometria euclidiana, que a reta de  $(x_0, 1)$  a  $(x_0, 2)$  tivesse o mesmo comprimento da reta de  $(x_0, 2)$  a  $(x_0, 3)$ , mas na verdade, a primeira parte tem comprimento  $\log 2 \approx 0,69 > 0,41 \approx \log 3/2$ , que é o comprimento da segunda parte.

Por outro lado, retas horizontais ligando  $(a, y_0)$  a  $(b, y_0)$  possuem comprimento  $(b - a)/y_0$ . Isto é completamente novo com relação a nossa intuição de geometria euclidiana. O comprimento de retas com os mesmos extremos é tão maior quanto menor for a ordenada em que ela se encontra.

Vemos, de modo geral, que caminhar em pontos de ordenada pequena tende a contribuir bastante para o aumento do comprimento. Assim, nada mais razoável que imaginar que andar em linha “reta” entre dois pontos de diferentes abscissas talvez não seja o mais eficiente, mas sim subir e descer, tomando também cuidado para não subir e descer muito, o que também não seria eficiente. Assim, é possível imaginar que o caminho mais eficiente entre dois pontos de abscissas próximas, se existir (de fato, sempre vai existir) sobe e desce menos do que se forem mais afastados. Em verdade, veremos que os caminhos mais eficientes são dados por arcos de circunferência com centro no eixo  $x$ , no caso de pontos com abscissas diferentes (isto não é óbvio, poderiam ser pedaços de retângulo ou arcos de parábola).

Com estas propriedades, fica fácil ver, ainda que sem provar, que o centro de uma bola na distância hiperbólica é deslocada para baixo. Também não iremos provar, mas o formato da bola é o mesmo da bola euclidiana, com exceção do centro estar deslocado.

Agora, veremos uma maneira de estimar por baixo o valor da distância entre dois pontos quaisquer.

**Proposição 7.3.** *Sejam  $P = (x_0, x_1)$  e  $Q = (y_0, y_1)$  pontos de  $\mathbb{H}$  quaisquer. Supondo sem perda de generalidade que  $y_1 \geq y_0$  Então  $d(P, Q) \geq \log(y_1/y_0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^\infty$  por partes  $\gamma = (x(t), y(t))$  tal que  $\gamma(a) = P$  e  $\gamma(b) = Q$ . Naturalmente teremos  $x'(t)^2 \geq 0$ , donde

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\sqrt{y'(t)^2}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt = \int_a^b [\log(y(t))]' dt \\ &= \log \left( \frac{y(b)}{y(a)} \right) = \log \left( \frac{y_1}{y_0} \right) \end{aligned}$$

■

Note que, apesar de valer para quaisquer dois pontos, esta estimativa deixa de ser útil para pontos de mesma ordenada, pois a estimativa dá zero e não acrescenta nada de novo. Entretanto, veremos uma utilidade fundamental desta estimativa no seguinte

**Corolário 7.3.1.** *Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  na mesma abscissa, digamos,  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_0, y_1)$ , com  $y_1 \geq y_0$  temos que  $d(P, Q) = \log(y_1/y_0)$  e este valor é alcançado (unicamente) pelo segmento de reta vertical que os une, isto é, a reta realiza o menor comprimento.*

*Demonstração.* Basta lembrar que a reta possui o mesmo comprimento da cota inferior estabelecida na proposição. Para a unicidade, note que, se a curva não for um segmento de reta, então teremos  $x'(t) > 0$  para algum  $t$  (na verdade, para um certo intervalo, pela continuidade de  $x'(t)$ ), donde a integral que fornece o comprimento será estritamente maior que a da reta vertical. ■

Neste caso, vemos que a reta realiza o menor comprimento tanto da geometria hiperbólica quanto euclidiana. Na verdade, isto só ocorre neste caso, como veremos adiante.

Apesar de já sabermos que a distância no semiplano está bem definida, apresentaremos uma demonstração alternativa que utiliza mais diretamente as características de  $\mathbb{H}$ . Em especial, a estimativa que acabamos de deduzir.

**Proposição 7.4.**  *$(\mathbb{H}, d)$  é um espaço métrico.*

Quero mostrar agora que pontos diferentes possuem distância maior de zero. Caso os pontos tenham ordenadas diferentes, isto pode ser visto usando o corolário [ref]. Vejamos agora o caso em que as ordenadas são iguais (e, portanto, as abscissas serão necessariamente diferentes). Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  uma curva. Se a ordenada desta curva é limitada por  $y^* = y_0 + 1$ , podemos estimar o comprimento da curva por baixo supondo que ela está inteiramente nesta ordenada (isto vem do fato já discutido que quanto maior é a ordenada, menor é o comprimento da curva). Formalmente:

$$l_{\text{hyp}}(\alpha) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|x'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|x'(t)|}{y^*} dt \geq \frac{x_1 - x_0}{y^*} > 0$$

Se, entretanto, a curva não for limitado por  $y^*$ , pelo teorema do valor intermediário, deve haver um  $t^*$  tal que  $\gamma(t^*) = y^*$ . Então, o comprimento da curva será maior que o comprimento da restrição para  $[a, t^*]$ , que por sua vez terá um

comprimento maior do que o comprimento se a curva tivesse apenas ordenada em  $y^*$ . Formalmente:

$$l_{\text{hyp}}(\alpha) \geq \int_a^{t^*} \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \log \left( \frac{y^*}{y_0} \right) > 0$$

Uma vez que  $y^* > y_0$  por definição. Em qualquer hipótese, temos:

$$l_{\text{hyp}}(\alpha) \geq \min \left\{ \frac{x_1 - x_0}{y^*}, \log \left( \frac{y^*}{y_0} \right) \right\} > 0$$

que conclui nossa demonstração.

As outras propriedades se fazem do mesmo modo do lema [ref].

#### 7.4.1 Algumas isometrias

Relembramos que o semiplano superior pode ser tratado tanto como parte de  $\mathbb{R}^2$  como  $\mathbb{C}$ . O intercâmbio entre os dois modos de ver ficará mais nítido nesta seção.

Daremos agora alguns exemplos de isometrias do plano hiperbólico. Para provar que uma certa função  $\phi$  é uma isometria, note que é suficiente mostrar que, para toda curva  $\gamma$ , vale que  $l(\phi \circ \gamma) = l(\gamma)$

Funções do tipo  $T_\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $T_\lambda(z) = \lambda z$  com  $\lambda > 0$  são chamadas de homotetia. Estas funções criam o efeito de *zoom in* ou *zoom out* focadas na origem. Não é difícil ver que, para qualquer curva,  $l(T_\lambda \circ \gamma) = l(\gamma)$ , donde homotetias são isometrias. Este fato pode parecer surpreendente a princípio, dado o efeito de ampliação e redução que estas funções exibem, mas na verdade, estas funções também deslocam os objetos para cima e baixo. Por exemplo, uma reta que vai de  $(-1, 1)$  a  $(1, 1)$ , se torna uma reta que vai de  $(-2, 2)$  a  $(2, 2)$ . A reta aumenta de comprimento (no sentido euclidiano), mas também sobe no plano e um efeito anula o outro. Em coordenadas polares, é possível ver que uma homotetia leva um ponto de  $(r, \theta)$  para  $(\lambda r, \theta)$ , aumentando a distância da origem mas mantendo o ângulo com o eixo real.

Translações no eixo real, do tipo  $L_r : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dadas por  $L_r(z) = z + r$  com  $r \in \mathbb{R}$  também são isometrias. Translações imaginárias não são. Isso mostra como o plano é simétrico na horizontal mas “não simétrico” na direção vertical, confirmando o que já sabíamos.

A reflexão  $R(x, y) = (-x, y)$  também é uma isometria. Em notação complexa,  $R(z) = -\bar{z}$ .

Por fim, temos uma função que merece uma atenção um pouco maior. É a inversão. Dado um ponto  $P$ , a inversão leva este ponto para um outro ponto  $Q$  da reta  $OP$ , de modo que  $d(0, Q) = 1/d(0, P)$ . É fácil ver que esta função em coordenadas polares será dada por  $I(r, \theta) = (1/r, \theta)$ . Passando para coordenadas cartesianas, teremos  $I(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ , e para números complexos,  $I(z) = 1/\bar{z}$ . Note que esta função deixa o (semi) círculo unitário invariante. A ação dela é semelhante a da homotetia, isto é, apesar de reduzir e ampliar coisas, esta função leva coisas de um lugar do plano para outro, onde as contribuições para a distância são maiores ou menores.

Algo que não foi comentado mas que é muito importante e fácil de ser provado, é de que todas estas funções são bijetivas, caso contrário, não poderiam ser isometrias.

Apenas com translações e homotetias já é possível ver que o plano hiperbólico é um espaço homogêneo:

**Proposição 7.5.** *O espaço métrico  $(\mathbb{H}, d)$  é homogêneo.*

*Demonstração.* Sejam  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  pontos quaisquer de  $\mathbb{H}$ . Note que  $\phi_1(0, 1) := (L_{x_0} \circ T_{y_0})(0, 1) = P$ , donde  $(0, 1) = \phi_1^{-1}(P)$ . Analogamente,  $\phi_2(0, 1) := (L_{x_1} \circ T_{y_1})(0, 1) = Q$ , donde  $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(P) = Q$ . Como inversas e compostas de isometrias também são isometrias, para qualquer par de pontos achamos uma isometria que leva um no outro, donde a afirmação segue. ■

Enunciaremos agora, sem provar, um lema que nos ajudará a estudar as geodésicas do plano.

**Lema 7.6.** *Sejam  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  uma curva  $C^\infty$  por partes e  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  uma isometria. Então  $l(\gamma) = l(\phi \circ \gamma)$ .*

## 7.4.2 Geodésicas

Caracterizaremos agora as geodésicas do plano hiperbólico, isto é, informalmente, as curvas que desempenham o papel das retas na geometria euclidiana. Já vimos que retas também desempenham este papel para pontos com a mesma abscissa e veremos agora que os arcos de circunferência com centro no eixo real desempenham esta função para o outro caso. Antes disso, vejamos que dados dois pontos é único o arco de circunferência nestas condições.

**Lema 7.7.** *Sejam  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  pontos de  $\mathbb{H}$ . Se  $x_0 \neq x_1$ , então existe e é única a circunferência de centro no eixo real (isto é, centro  $(c, 0)$ ) que passa pelos dois pontos.*

*Demonstração.* Tome o ponto  $(c, 0)$  tal que:

$$c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - x_1^2 - y_1^2}{2(x_0 - x_1)}$$

e  $r = ||P - (c, 0)||$  e veja que o círculo de centro  $(c, 0)$  e raio  $r$  satisfaz as condições especificadas. Agora, igualando  $||P - (c, 0)|| = ||Q - (c, 0)||$ , é possível ver que  $c$  necessariamente deve ter a fórmula descrita acima, donde vem a unicidade. ■

A prova de que arcos de circunferência minimizam distância utiliza o lema [ref] e o fato que existem isometrias que levam retas verticais nos arcos. Para ver isto usaremos o lema a seguir.

**Lema 7.8.** *Sejam  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  pontos de  $\mathbb{H}$ . Se  $x_0 \neq x_1$ , então existe  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  isometria tal que  $\phi(P)$  e  $\phi(Q)$  possuem a mesma abscissa. Além disso, se  $\gamma : [p, q] \rightarrow \mathbb{H}$  é o arco de semicírculo ligando  $P$  e  $Q$ , então a imagem por  $\phi$  de  $\gamma([p, q])$  é o segmento de reta entre  $\phi(P)$  e  $\phi(Q)$ .*

*Demonstração.* Seja  $C$  o semicírculo que passa por  $P$  e  $Q$ . Sejam  $c$  e  $r$  a abscissa do centro e o raio de  $C$ , respectivamente. Tome então a translação  $L_{r-c}$ . Seja  $\alpha$  uma parametrização em coordenadas polares de  $L_{r-c}(C)$ , de forma que o raio de  $\alpha$  coincida com seu centro e a circunferência se torne tangente ao eixo imaginário. Deveremos ter, necessariamente:

$$(\rho(t) \cos(\theta(t)) - r)^2 + \rho(t)^2 \sin^2(\theta(t)) = r^2 \implies$$

$$\rho(t)^2 \cos^2(\theta(t)) - 2r\rho(t) \cos(\theta(t)) + r^2 + \rho(t)^2 \sin^2(\theta(t)) = r^2$$

$$\implies \rho(t)^2 = 2r\rho(t) \cos(\theta(t)) \implies \rho(t) = 2r \cos(\theta(t))$$

Tomando então  $\theta = t$ , ficamos com a curva  $\alpha : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\alpha(t) = (2r \cos(t), t)$ , em coordenadas polares. Seja  $I$  a inversão. Então

$$(I \circ \alpha)(t) = \left( \frac{1}{2r \cos(t)}, t \right)$$

Passando para coordenadas cartesianas, ficamos com:

$$(I \circ \alpha)(t) = \left( \frac{1}{2r}, \frac{\tan(t)}{2r} \right)$$

E é fácil ver que esta reta parametriza a semirreta  $x = 0$ . Como  $I$  e  $L_{r-c}$  são isometrias e  $P, Q \in C$ , segue que a isometria  $I \circ L_{r-c}$  leva  $P$  e  $Q$  para o eixo imaginário. ■

**Teorema 7.9.** *Sejam  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  pontos de  $\mathbb{H}$ . Se  $x_0 \neq x_1$ , então o arco de circunferência  $C_{PQ}$  ligando  $P$  a  $Q$  é a única curva com a propriedade de que  $l(C_{PQ}) = d(P, Q)$ .*

*Demonstração.* Pelo lema anterior, sabemos que existe uma isometria  $\phi$  que leva  $C_{PQ}$  em um segmento de reta no eixo imaginário. Assim,  $\phi^{-1}$  é uma isometria que leva a um segmento de reta vertical no arco  $C_{PQ}$ . Uma vez que isometrias levam curvas de menor comprimento em curvas de menor comprimento (falta provar) e que segmentos de reta verticais são curvas minimizantes, segue que  $l(C_{PQ}) = d(P, Q)$ . ■

Até agora temos utilizado “curvas minimizantes de comprimento” e “geodésicas” como sinônimos. A próxima definição, entretanto, desfará a confusão e veremos que geodésicas são classes de curvas mais gerais, que só precisam minimizar comprimentos localmente.

**Definição 7.1.** Uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$  que é  $C^1$  por partes é dita uma geodésica se para todo  $t \in I$ , existe  $\epsilon(t) > 0$  tal que:

$$d_{\text{hyp}}(\alpha(t), \alpha(s)) = l_{\text{hyp}}(\alpha|_{I_{st}})$$

Para todo  $s \in I$  com  $|s - t| < \epsilon(t)$ , onde:

$$I_{st} = \begin{cases} [s, t], & \text{se } s < t; \\ [t, s], & \text{se } t < s \end{cases}$$

Uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$  é dita uma geodésica completa se não existe uma extensão  $\beta : J \longrightarrow \mathbb{H}$  de  $\alpha$ , com  $I \subset J$ , i.e, se  $\beta : J \longrightarrow \mathbb{H}$  é uma geodésica e  $\beta|_I = \alpha$ , então  $I = J$  e  $\alpha = \beta$ .





Não bastaria dizer que a curva é minimizante (isto é, que o comprimento entre dois pontos da curva dá no mesmo que a distância entre eles)? Por que introduzimos o critério do  $\epsilon$ ? Pense no caso de uma esfera. Imagine um grande círculo quase completamente ao redor da esfera. Como exemplo concreto, pense num grande círculo ao redor da terra que passe por São Paulo e pelo Rio de Janeiro, mas que não seja completo, isto é, há um buraco na curva entre as duas cidades (na parte mais curta ligando as duas), e elas só podem ser ligados dando toda a volta pelo globo no outro sentido, isto é, pela parte do grande círculo mais longa ligando as duas. Nesse caso, não vale que a distância entre São Paulo e o Rio de Janeiro é o comprimento da curva que passa entre os dois. O comprimento da curva é todo o diâmetro da Terra menos a distância entre Rio e São Paulo. Então, a curva não minimiza a distância entre quaisquer dois pontos dela, mas minimiza localmente, para pontos próximos o que motiva a definição acima.

O teorema abaixo estabelece um critério definitivo sobre quais curvas são geodésicas completas.

**Teorema 7.10.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  uma geodésica completa. Então, ou  $\gamma$  é uma semi-reta vertical, ou  $\gamma$  é um semi-círculo centrado na reta real.*

A proposição seguinte diz que, no sentido do programa de Erlangen, geodésicas são objetos de estudo da geometria.

**Proposição 7.11.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  uma geodésica e  $M$  uma isometria. Então a curva  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\mu = M \circ \gamma$  também é uma geodésica.*

*Demonstração.* Tome  $t \in [a, b]$ . Como  $\gamma$  é geodésica, existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$|s - t| < \epsilon \implies d(\gamma(t), \gamma(s)) = l(\gamma|_{I_{st}})$$

Tomando o mesmo  $\epsilon$  e  $|s - t| < \epsilon$ , como  $M$  é isometria, vem que:

$$d(\mu(t), \mu(s)) = d(M \circ \gamma(t), M \circ \gamma(s)) = d(\gamma(t), \gamma(s)) = l(\gamma|_{I_{st}})$$

Como isometrias preservam comprimento de curvas (lema 7.5), temos que  $l(\gamma|_{I_{st}}) = l(M \circ \gamma|_{I_{st}}) = l(\mu|_{I_{st}})$ , donde:

$$|s - t| < \epsilon \implies d(\mu(t), \mu(s)) = l(\mu|_{I_{st}})$$

Pela arbitrariedade de  $t$  concluímos que isometrias levam geodésicas em geodésicas. ■

O lema a seguir mostra uma propriedade técnica das geodésicas e nos auxiliará a achar o grupo de isometrias do semiplano.

**Lema 7.12.** *Sejam  $P = (0, y_0)$  e  $Q = (0, y_1)$  com  $0 < y_0 < y_1$ . Então para toda geodésica completa  $g \subset \mathbb{H}$  com  $P \in g$ , são equivalentes:*

- $d_{hyp}(P, Q) = d_{hyp}(Q, g)$ ;
- $g = g_0$ , onde  $g_0 = S_{y_0} \cap \mathbb{H}$ , sendo  $S_{y_0}$  o círculo euclidiano de centro na origem e raio  $y_0$ .

A demonstração deste lema pode ser vista em detalhes em [ref]. Veremos aqui apenas a ideia da prova. A parte mais fácil é provar que a segunda afirmação implica na primeira. Para tanto, note que  $P$  é o ponto da circunferência cuja ordenada é um máximo global. Assim, tomando qualquer outro ponto  $S = (x, y)$ , podemos estimar a distância dele a  $Q$  por baixo usando o ponto  $(0, y)$  (proposição 7.2). Por outro lado, a distância de  $P$  a  $(0, y)$  será maior que a de  $P$  a  $Q$ , uma vez que  $y_1 > y$ , pelo que já foi comentado.

Para a recíproca, a prova será por absurdo, isto é, suporemos que a geodésica não está centrada na origem mas que mesmo assim a distância entre  $Q$  e a geodésica empata com  $d(P, Q)$ , isto é, não há outro ponto da geodésica com distância a  $Q$  menor que  $P$ . Chame a abscissa do centro da geodésica de  $a$ . Usaremos o Teorema da Função Implícita na função  $F(x, y) = x^2 - 2ax + y^2 - y_0^2$  (certifique-se que  $\partial_y F(0, y_0) \neq 0$ ) para obter uma função  $s : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $t \mapsto (t, s(t))$  parametriza um trecho da geodésica. Para cada  $t$ , podemos calcular explicitamente a o comprimento da reta ligando  $Q$  a  $(t, s(t))$ , fazendo uma função  $l(t)$ . Agora, basta calcular  $l'(0)$  e será possível ver que  $l'(0) \neq 0$ , donde  $l(t)$  é estritamente monótona numa vizinhança de 0, e portanto há  $t_0$  tal que  $d(P, Q) = l(0) > l(t_0) \geq d(Q, (t_0, s(t_0)))$ . No cálculo de  $l'(0)$  usamos que  $s'(0) \neq 0$ , que pode ser visto usando a relação que o próprio Teorema da Função Implícita nos dá para derivada de  $s$ .

**Corolário 7.12.1.** *O lema vale ainda que as abscissas de  $P$  e  $Q$  não sejam zero.*

Basta tomar translações horizontais e lembrar que são isometrias.

### 7.4.3 O Grupo de Isometrias

Nesta seção finalmente acharemos o grupo de isometrias do plano. De antemão, informo que este grupo tem ligações bem fortes com um outro grupo já conhecido por nós:  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$ . Antes de tudo, vejamos que elementos desse grupo estão bem definidos tendo o plano hiperbólico como domínio e contradomínio.

**Proposição 7.13.** *Sejam  $\phi \in \text{Möb}_+(\mathbb{R})$  e  $z \in \mathbb{H}$ . Então  $\phi(z) \in \mathbb{H}$ .*

*Demonstração.* Como  $\phi \in \text{Möb}_+(\mathbb{R})$ , existem  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $ad - bc > 0$ :

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Já sabemos que  $\phi(z) \in \mathbb{C}$ . Basta agora provarmos que  $\text{Im}(\phi(z)) > 0$ . De fato:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\phi(z)) &= \text{Im} \left( \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} \right) = \text{Im} \left( \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} \right) \\ &= \frac{(ad - bc)\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0 \end{aligned}$$

■

Além disso, é possível mostrar que os elementos de  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$  são biholomorfismos de  $\mathbb{H}$  preservando portanto a orientação.

Não é difícil ver que há um epimorfismo  $\eta$  entre  $SL(2, \mathbb{R})$  e  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$ . Iremos denotar  $\eta(M) = f_M$ . Aproveitando-se deste epimorfismo, eventualmente poderemos escrever elementos de  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$  na forma matricial sempre que convir.

Há dois tipos especiais de transformações de  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$ , que são isometrias do plano hiperbólico já bem conhecidas. Dados  $\lambda > 0$  e  $r \in \mathbb{R}$ , considere:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$N_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não é difícil ver que a primeira matriz corresponde a homotetias  $T_\lambda$  e a segunda a translações  $L_r$ . Note que não há nenhuma transformação em  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$  que corresponde à inversão  $I$ , pois ela muda a orientação do espaço. Agora, aproveitaremos a semelhança de  $\text{Möb}_+(\mathbb{R})$  com  $SL(2, \mathbb{R})$  para reciclar um teorema importante:

**Proposição 7.14.** *Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $ad - bc = 1$ . Então as funções  $\phi, \psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  tais que:*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\psi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$$

*São isometrias.*

*Demonstração.* Caso  $a \neq 0$ , basta notar que

$$\psi(z) = (L_{\frac{c}{a}} \circ T_{a^2} \circ I \circ L_{\frac{b}{a}})(z)$$

Além disso,  $\phi(z) = (I \circ \psi)(z)$ . A afirmação então segue do fato que as funções citadas são isometrias como já visto e que composição de isometrias é isometria.

Se, por outro lado,  $a = 0$ , devemos ter necessariamente  $c \neq 0$ . Sejam  $a' = c' = c$ ,  $d' = d$  e  $b' = b + d$ . Daí,  $a' \neq 0$ . Além disso,  $a'd' - b'c' = cd - cd - bc = -bc = ad - bc = 1$ . Assim, podemos usar o resultado anterior e notar que a função  $\zeta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$z \mapsto \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{cz + b + d}{cz + d}$$

É uma isometria. Agora, basta ver que  $\phi(z) = (L_{-1} \circ \zeta)(z)$ , e portanto  $\phi$  é isometria. O fato de  $\psi$  ser isometria vem do fato que  $\psi = I \circ \phi$ . ■

**Lema 7.15.** *Seja  $\gamma$  uma geodésica completa. Então existe  $M \in SL(2, \mathbb{R})$  tal que  $f_M \circ \gamma$  é a reta  $L = \{z \in \mathbb{H}; \operatorname{Re}(z) = 0\}$ .*

*Demonstração.* Sabemos, pelo teorema 7.9, que geodésicas completas podem ser ou retas verticais, ou semicírculos centrados na reta real. Se for o primeiro caso, a transformação que estávamos procurando será trivialmente uma translação, que já vimos pertencerem a  $Möb_+(\mathbb{R})$ . Suponha, do contrário, que seja o semicírculo. Seja então  $\gamma$  este semicírculo, intersectando o eixo real nos pontos  $a$  e  $b$  e suponha sem perda de generalidade que  $a < b$ . Afirmando que a seguinte transformação transforma  $\gamma$  numa reta vertical:

$$f_M(z) = \frac{\frac{z}{\sqrt{b-a}} - \frac{b}{\sqrt{b-a}}}{\frac{z}{\sqrt{b-a}} - \frac{a}{\sqrt{b-a}}}$$

Pelo lema 7.10, sabemos que  $(f_M \circ \gamma)(t)$  é uma geodésica, isto é, ou é um trecho de reta vertical ou é um semicírculo centrado nalgum ponto do eixo real. Se  $t_0$  é tal que  $\gamma(t_0) = a$  (ou  $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = a$ ), é fácil ver que  $(f_M \circ \gamma)(t_0) = f_M(a) = \infty$  (caso se sinta desconfortável, transforme esta igualdade num limite). Como semicírculos não tomam valor no infinito (ou, como são limitados, não pode haver algum limite tendendo ao finito), só nos resta assumir que  $(f_M \circ \gamma)(t)$  é o trecho de uma reta vertical. Podemos fazer o limite pelo outro lado dando zero. Por continuidade, só nos resta assumir que  $(f_M \circ \gamma)(t)$  é uma reta vertical. Agora, recaímos no caso anterior e podemos realizar uma translação. Lembrando do fato de que  $Möb_+(\mathbb{R})$  é um grupo, sabemos que a composição delas ainda está no conjunto, o que conclui nossa demonstração. ■

Agora iremos caracterizar definitivamente o grupo de isometrias do plano hiperbólico. Antes disso, veremos um lema que nos servirá de auxílio para encontrarmos o grupo de isometria. O lema diz que as únicas isometrias que deixam todos os pontos do eixo imaginário fixos são a identidade e a reflexão em torno deste eixo.

**Lema 7.16.** *Seja  $\phi$  uma isometria de  $\mathbb{H}$  tal que  $\phi(iy) = iy$ ,  $\forall y > 0$ . Então  $\phi(z) = z$  ou  $\phi(z) = -\bar{z}$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}$ .*

Novamente, detalhes em [ref]. A ideia da demonstração consiste em notar primeiro que as geodésicas completas centradas na origem são fixadas pela isometria. Para ver isso, usamos que a imagem por  $\phi$  de uma geodésica é uma geodésica (proposição 7.10), tomamos um ponto  $P$  no eixo imaginário acima da geodésica e, usando o fato que  $\phi$  é uma isometria e que  $\phi(P) = P$ , pela unicidade do lema 7.11, concluímos que a imagem da geodésica pela  $\phi$  deve ser a própria geodésica.

Depois, dado um ponto  $z$ , tomamos a geodésica que contém  $z$ , centrada na origem e que atravessa o eixo  $y$  em  $Q$ . Devemos ter que  $d(Q, z) = d(Q, \phi(z))$ . É possível mostrar que isso só acontece se  $\phi = z$  ou  $\phi = \bar{z}$ . Isso pode ser feito usando fórmulas explícitas para a distância entre pontos ou podemos nos convencer que  $z$  e  $\phi(z)$  devem ter a mesma ordenada. De qualquer forma, basta agora usarmos a continuidade para mostrar que  $\phi(z)$  ou  $\phi(z) = -\bar{z}$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}$ .

Veremos agora que as funções  $\phi$  e  $\psi$  definidas na proposição 7.13 são as únicas isometrias do plano hiperbólico

**Teorema 7.17.** *Seja  $Isom(\mathbb{H})$  o grupo de Isometrias de  $\mathbb{H}$ . Então:*

$$Isom(\mathbb{H}) = \{f_M : M \in SL(2)\} \cup \{I \circ f_M : M \in SL(2)\}$$

A ideia da demonstração é tomar uma isometria que preserva orientação e mostrar que é possível compô-la com um transformação de Möbius  $f_M$  de tal

forma que ela fixe a semirreta imaginária. Pelo lema 7.15 e usando a hipótese que a transformação preserva orientação, devemos ter necessariamente que esta composição é a identidade, e portanto que a isometria é a função inversa de  $f_M$ , donde segue que é uma transformação de Möbius.

A parte chata da demonstração é mostrar a existência da transformação de Möbius satisfazendo a propriedade citada acima. Na verdade, pelo lema 7.14, podemos achar uma transformação de Möbius que compoado com a isometria torna a semirreta imaginária invariante. Podemos ainda compor com uma homotetia para garantir que  $i$  fique invariante. Então, a parte realmente chata é mostrar que, dado que esta composição deixa  $i$  invariante, então também deixa todo outro ponto da semirreta imaginária invariante para usarmos o lema 7.15.

Vejamos uma expressão para o diferencial das isometrias.

**Proposição 7.18.** *Seja  $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  dada por:*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

*Então:*

$$d\phi_z(v) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} v$$

**Proposição 7.19.** *Isometrias preservam a métrica. Isto é, se  $\phi$  é uma isometria, então  $g_{\phi(z)}(d\phi_z(v), d\phi_z(w)) = g_z(v, w)$ , onde  $v$  e  $w$  estão em  $T_z\mathbb{H}$ .*

**Corolário 7.19.1.** *Isometrias preservam a norma, isto é, se  $\phi$  é uma isometria, então  $\|d\phi_z(v)\|_{\mathbb{H}} = \|v\|_{\mathbb{H}}$*

Já vimos que o semiplano é homogêneo, isto é, dados dois pontos  $P, Q$ , existe uma isometria que leva um no outro. Agora, veremos que o semiplano é isotrópico, isto é, dados dois pontos  $p$  e  $q$  quaisquer e vetores quaisquer  $v \in T_p\mathbb{H}$ ,  $w \in T_q\mathbb{H}$ , existe uma isometria que ao mesmo tempo leva  $p$  em  $q$  e cuja diferencial leva  $v$  em  $w$ .

**Proposição 7.20.**  *$\mathbb{H}$  é isotrópico.*

#### 7.4.4 Área

Em acordo com o que foi comentado na subseção [ref], a área “hiperbólica” de um subconjunto  $E \subset \mathbb{H}$  pode ser definida por:

$$\mu_{\mathbb{H}}(E) = \iint_E \frac{1}{y^2} dx dy$$

E temos que:

**Proposição 7.21.** *Áreas são preservadas por isometrias. Isto é, se  $\phi$  é uma isometria do semiplano, então  $\mu_{\mathbb{H}}(E) = \mu_{\mathbb{H}}(\phi(E))$*

Ao comparar com a área usual do plano, observamos características semelhantes às aquelas comentadas quando comparamos as distâncias. Ponto com ordenada menor contribuem muito mais para a área.

#### 7.4.5 Mais sobre a distância

### 7.5 O Disco de Poincaré

Começamos aqui o nosso segundo modelo do espaço hiperbólico. O leitor poderá notar claramente que todas as construções aqui serão muito mais fáceis e diretas. Isto porque basta acharmos uma isometria entre este modelo e o do semiplano e importar todos os resultados que já conhecemos de lá. Este será o argumento ubíquo nesta seção.

Nosso objeto desta vez será o disco unitário  $\mathbb{B}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} \approx \{z \in \mathbb{C}; |z|^2 < 1\}$ . A métrica será dada por:

$$g_z(v, w) = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle$$

Apesar de ser uma expressão um pouco mais desengonçada, ela ainda é da forma  $g_z(v, w) = f(z) \langle \cdot, \cdot \rangle$ , com:

$$f(z) = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}$$

O que já garante que a distância induzida por esta métrica de fato está bem definida, pelo lema [ref]. A norma ficará:

$$\|v\|_{\mathbb{B}^2} = \frac{2}{1 - |z|^2} \|v\|$$

E o comprimento de uma curva  $\gamma$ :

$$l(\gamma) = \int \frac{2\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{1 - x(t)^2 - y(t)^2} dt$$

O disco unitário munido da distância obtida tomando o ínfimo destes comprimentos é chamado de Disco de Poincaré.

Se formos comparar esta distância com a euclidiana, vemos que pontos com maior módulo, isto é, mais próximos (no sentido euclidiano) da fronteira do disco contribuem mais para a distância hiperbólica. Analogamente, esperamos que, se dois pontos estão muito próximos da fronteira, então a geodésica tende a se afastar da borda e depois voltar. Veremos que de fato isto ocorre e as geodésicas serão arcos de circunferência que incidem perpendicularmente na fronteira do disco de Poincaré. Isto não ocorre, por outro lado, com pontos que estão no eixo  $y$ , por exemplo. Pois, para qualquer que seja o lado que a curva penda, ficará mais próxima da borda. De modo geral, se dois pontos são colineares com o centro do disco então a geodésica é uma reta de fato.

O próximo lema nos dará uma transformação de Möbius que é isometria entre o semiplano e o disco de Poincaré:

**Lema 7.22.** *A função:*

$$\Phi(z) = \frac{-z + i}{z + 1}$$

*É uma isometria entre  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{B}^2$ .*

Com isto também podemos mostrar que a distância induzida pela métrica também está bem definida. A inversa é:

$$\Phi^{-1} = \frac{z - 1}{i(z + 1)}$$

Calcularemos a função para alguns pontos para ter uma ideia geral de como estas isometrias agem. É possível ver, por exemplo, que  $\Phi$  leva o círculo no infinito na fronteira do disco e  $i$  na origem do disco. Além disso, achemos os pontos que vão nos quatro pontos cardeais do disco. Os pontos  $0$ ,  $1$ ,  $\infty$  e  $-1$  são mapeados em  $1$ ,  $i$ ,  $-1$  e  $-i$  respectivamente. Vemos então que há como se fosse uma rotação de 90 graus entre o semiplano e o disco.



### 7.5.1 Isometrias

**Teorema 7.23.** *O grupo de isometrias de  $\mathbb{B}^{22}$  é o subgrupo de  $Möb(\mathbb{C})$  tal que  $d = \bar{a}$ ,  $c = \bar{b}$  e  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ .*

Este grupo é homomorfo ao grupo  $SU(1, 1)$ , que é o grupo das matrizes

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Com  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

Uma classe importante de isometrias do disco de Poincaré são as rotações. Para uma rotação de ângulo  $\theta$ , tome  $\alpha = \exp(i\theta/2)$  e  $\beta = 0$

### 7.5.2 Geodésicas

**Proposição 7.24.** *As geodésicas de  $\mathbb{B}^2$  são os círculos ortogonais a  $\partial\mathbb{B}^2$ , incluindo as linhas retas.*

### 7.5.3 Área

Conforme foi discutido, podemos definir área no Disco de Poincaré como:

$$\mu_{\mathbb{B}^2}(E) = \iint \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} dx dy$$

É possível mostrar que esta definição é consistente com a área do semiplano. Isto é:

**Proposição 7.25.** *Seja  $E \subset \mathbb{B}^2$ . Então  $\mu_{\mathbb{B}^2}(E) = \mu_{\mathbb{H}}(\Phi^{-1}(E))$*

## 7.6 O hiperboloide

Para este modelo, o conjunto que consideraremos é uma esfera no espaço de Minkowski. Refresquemos a memória.

**Definição 7.2.** Espaço de Minkowski é um espaço vetorial real (ou espaço afim) de dimensão finita munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada de índice 1.

Onde:

**Definição 7.3.** Se  $B$  é uma forma bilinear, então o índice de  $B$  é o número da dimensão do subespaço de maior dimensão possível onde a forma é negativa definida, isto é, onde  $v \neq 0 \implies B(v, v) < 0$ , para todo  $v$  do subespaço.

Espaços de Minkowski são sempre isométricos ao  $\mathbb{R}^n$  com a forma bilinear  $h(v, w) = v_1w_1 + \dots + v_{n-1}w_{n-1} - v_nw_n$ , onde  $v = (v_1, \dots, v_n)$  e  $w = (w_1, \dots, w_n)$ . Esta forma será chamada neste texto de *produto de Minkowski*. Este produto não é um produto interno, caso exigirmos que produtos internos sejam positivos definidos. (Isto é, nem sempre vale que  $v \neq 0 \implies h(v, v) > 0$ ). Tome, por exemplo  $v = (0, \dots, 1)$ . Assim, ao falarmos espaço de Minkowski estaremos sempre nos referindo ao  $\mathbb{R}^n$  munido do produto de Minkowski, por ser menos abstrato. Mais especificamente, estaremos interessados no  $\mathbb{R}^3$ .

Note que o conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } h(v, v) = -1\}$  é uma esfera “de raio -1” com relação ao produto de Minkowski. Mas trata-se do conjunto  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ , que é um hiperboloide, com duas folhas (de revolução em torno do eixo  $z$ ). O conjunto que estaremos interessados nesta seção é especificamente a folha superior do hiperboloide:  $\{\mathcal{H} = (x, y, z); z > 0, x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ , o que justifica o nome do modelo (modelo do hiperboloide).

Para as pessoas menos familiarizadas, vale saber que o espaço de Minkowski é o espaço físico segundo a teoria da relatividade restrita de Einstein. As pessoas mais familiarizadas sabem que este espaço não é uma variedade riemanniana pois, como vimos,  $h(\cdot, \cdot)$  não é um produto interno. Entretanto, a restrição de  $h$  à  $\mathcal{H}$  constitui-se sim uma métrica riemanniana.

Isso, entretanto, não será tão importante pois definiremos distância de um jeito diferente do que estávamos acostumados a definir. Definiremos:

$$d_{\mathcal{H}}(p, q) = (-h(p, q))$$

## Capítulo 8

# Grupos Fuchsianos

### 8.1 Polígonos

Para nós, um polígono é definido da seguinte forma:

**Definição 8.1.** Um polígono é uma região  $X \subset \mathbb{R}^2$  tal que:

- a)  $X$  é fechado
- b)  $\partial X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i$

Sendo que cada  $E_i$  é ou um segmento de reta, ou uma reta ou uma semirreta. E satisfaz as seguintes propriedades:

- i. Cada  $E_i$  é fechado
- ii. Só se intersectam nas extremidades
- iii. Apenas dois elementos de  $(E_i)$  podem se intersectar num dado ponto.

Cada  $E_i$  é chamado de aresta e o ponto onde dois deles se encontram é chamado de vértice.

Note que, para nós, um polígono pode ser ilimitado. Será útil lembrar que um conjunto é fechado se, e somente se, possui todos seus pontos de fronteira. Além disso, um conjunto é aberto se, e somente se, é disjunto de todos os seus pontos de fronteira.

Dotaremos os polígonos de uma métrica definida como o ínfimo dos comprimentos de curvas de classe  $\mathcal{C}^\infty$  por partes contidas no polígono, à semelhança do que fizemos em grande parte do capítulo anterior. Caso o polígono for conexo, é fácil ver que esta métrica coincidirá com a restrição da métrica euclidiana ao polígono.

## 8.2 Grupos Fuchsianos

Há duas maneiras comuns (e equivalentes) de definir um grupo fuchsiano. Ambas, dizem que um grupo fuchsiano é um tipo particular de subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Uma delas diz que grupo fuchsiano é um subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , enquanto a outra diz que grupo fuchsiano é um grupo que age descontinuamente.