Grundpraktikum 2: Schwarzer Strahler

Gregor Weihs

9. März 2016

1 Aufgaben

1. Überprüfung des Lambertschen Cosinus-Gesetzes der Abstrahlung eines Schwarzen Strahlers. Darstellung der emittierten Strahlungsintensität in Abhängigkeit vom Abstrahlwinkel in Polarkoordinaten.

2. Messung der emittierten Strahlung eines Schwarzen Strahlers in Abhängigkeit von der Temperatur $E(T)$ und Darstellung der Messergebnisse in drei Diagrammen zur Bestimmung des Exponenten im Stefan-Boltzmannschen Gesetz:
   - E gegen T
   - $\log E$ gegen $\log T$
   - $\log(dE/dT)$ gegen $\log T$

2 Erklärungen

2.1 Schwarzer Körper

Ein Körper heißt „absolut schwarz“ , wenn er bei beliebigen Temperaturen alle auf ihn einfallenden elektromagnetischen Wellen absorbiert. Sein Absorptionsvermögen,

$$a(\lambda, T) = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{auftreffende Strahlungsenergie}},$$

ist für alle Wellenlängen λ und alle Temperaturen T gleich $a(\lambda, T) = 1$. In Wirklichkeit ist kein Körper absolut schwarz. Jedoch gibt es einige Körper, deren optische Eigenschaften denen des absolut Schwarzen Körpers recht nahe kommen (z.B. Ruß, Platinschwärze, schwarzer Samt).

Als nahezu ideales Modell einer absolut schwarzen Oberfläche kann eine kleine Öffnung in der undurchsichtigen Wand eines abgeschlossenen Hohlraumes dienen. Die elektromagnetische Strahlung, die von außen in den Hohlraum dringt, wird nach vielfacher Reflexion von der Innenfläche des Hohlraumes praktisch völlig absorbiert. Heizt man die Wände des Hohlraumes auf eine bestimmte Temperatur, so stellt sich im Inneren eine Strahlung ein, die nicht mehr vom Material abhängt, sondern nur mehr von der Temperatur. Die aus der Öffnung austretende Strahlung ist damit die ideale Strahlung eines Schwarzen Körpers (Hohlraumstrahler). Dadurch, dass die Innenflächen des Hohlkörpers aus einem Stoff von starker Absorption hergestellt sind, braucht die notwendige Zahl der Reflexionen nur gering zu sein, so dass die Öffnung relativ groß gemacht werden kann. Bei einem Absorptionsvermögen $a = 0.9$ genügen bereits 2 Reflexionen, um bis auf 1/100 vollkommene Schwärzung zu erzielen.

Graue Strahler sind Strahler, dessen Absorptionsvermögen bei konstanter Temperatur T nicht von der Wellenlänge λ abhängt (also wie beim Schwarzen Körper), aber kleiner als 1 ist. Z.B. für glühende Kohle ist $a = 0.7$ im gesamten Wellenlängenbereich. Alle restlichen Strahler, deren Absorptionsvermögen $a(\lambda, T)$ wellenlängenabhängig ist, nennt man *Selektivstrahler*, z.B. viele Metalle und Halbleiter.

2.2 Kirchhoffsches Gesetz

Die Größe $E(\lambda, T)$ nennt man das Emissionsvermögen (emittierte Strahlung/Fläche) eines Körpers. Es ist gleich der Energie der Wärmestrahlung im Wellenlängenbereich $\lambda + d\lambda$, die in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit der Oberfläche eines Körpers abgestrahlt wird, der die Temperatur T hat.

$E(\lambda, T)$ hängt von der Frequenz, der Temperatur des Körpers, dessen Material und Oberflächenbeschaffenheit ab. Die Einheit ist (W/m^2). Zwischen dem Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen eines beliebigen undurchsichtigen Körpers besteht folgende Beziehung:

$$\frac{E(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = E_s(\lambda, T) = K(\lambda, T) \qquad \text{... Kirchhoffsches Gesetz} \tag{1}$$

E_s ... Emissionsvermögen eines Schwarzen Körpers
K ... Kirchhoffsche Funktion

Das bedeutet:

1. Strahlung eines beliebigen Temperaturstrahlers hängt nur von seinem Absorptionsvermögen ab, weil die Kirchhoffsche Funktion eine von den Körpereigenschaften völlig unabhängige Größe ist, nämlich eine universelle Funktion von λ und T.

   $$E(\lambda, T) = a(\lambda, T) E_s(\lambda, T)$$

2. Da für Schwarze Körper $a(\lambda, T) = 1$ ist, ist für jeden Wert von λ und T die Strahlung des Schwarzen Körpers größer als die eines jeden anderen Temperaturstrahlers.

3. Wenn $a(\lambda, T) = 0$ ist, dann ist auch $E(\lambda, T) = 0$, d.h. ein Temperaturstrahler kann nur solche Wellenlängen aussenden, die er bei gleicher Temperatur auch zu absorbieren vermag.

2.3 Plancksches Strahlungsgesetz

Das Plancksche Strahlungsgesetz gibt die Strahlungsleistung eines Schwarzen Körpers als Funktion von T und λ. Im Intervall $\lambda + d\lambda$ wird die Leistung

$$dE_s(\lambda, T) = \frac{2c^2 h}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1} \tag{2}$$

abgestrahlt. Das ist die spektrale spezifische Ausstrahlung unpolarisierten Lichtes aus einer 1 m^2 großen Öffnung senkrecht zur Öffnungsfläche in den Raumwinkel 1 sr (Steradian) mit der Einheit W/m^3.

Als Funktion der Wellenlänge bei fixen Temperaturen ergeben sich Isothermen (siehe Abb. 1). Isothermen verschiedener Temperaturen schneiden einander nicht. Bei steigender Temperatur verschiebt sich das Leistungsmaximum zu kürzeren Wellenlängen (siehe Wiensches Verschiebungsgesetz).

2.4 Wiensches Strahlungsgesetz

Im Bereich hoher Frequenzen, d.h. $ch/kT\lambda \gg 1$, liefert das Plancksche Strahlungsgesetz (2) die Näherung

$$dE_s(\lambda, T) = \frac{2c^2 h}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{ch}{kT\lambda}}}, \tag{3}$$

die als Wiensches Strahlungsgesetz bekannt ist.

2.5 Rayleigh-Jeanssches Strahlungsgesetz

Für $ch/kT\lambda \ll 1$ liefert (2) näherungsweise

$$dE_s(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4} d\lambda, \tag{4}$$

das Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz. Das Wiensche und das Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz sind Grenzfälle des Planckschen Strahlungsgesetzes und wurden vor diesem aufgestellt. Sie führten zum Versagen der klassischen Vorstellung („UV-Katastrophe“ für $\lambda \to 0$ im Rayleigh-Jeansschen Gesetz) und zur Entwicklung der Quantentheorie der Strahlung.

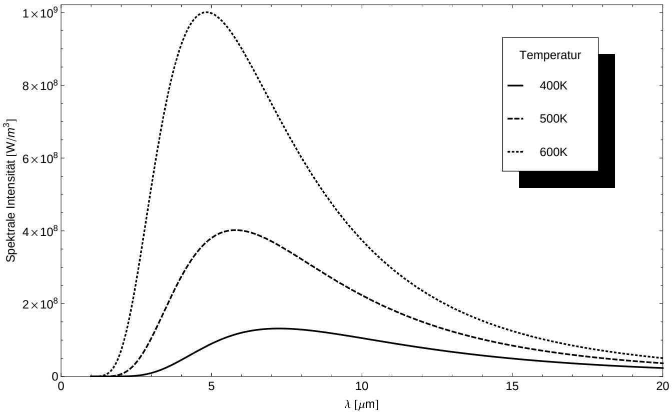

Abbildung 1: Isothermen: Strahlungskurven $E(\lambda)$ bei jeweils konstanter Temperatur T.

2.6 Stefan-Boltzmannsches Gesetz

Das Gesamtemissionsvermögen eines Schwarzen Körpers bei konstanter Temperatur ergibt sich aus der Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes über alle Wellenlängen bzw. Frequenzen. Das Plancksche Strahlungsgesetz in ν und $d\nu$ lautet

$$dE_s(\nu,T) = -\frac{2h}{c^2}\nu^3\frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

oder

$$dE_s(\nu,T) = a\nu^3\varphi\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu$$

Die Substitution

$$y = \frac{\nu}{T};\quad d\nu = T dy;\quad \nu^3 = y^3\,T^3$$

liefert

$$\int_0^\infty dE_s(\nu,T) = a\int_0^\infty y^3\,T^3\varphi(y)T\,dy.$$

Für konstante absolute Temperatur T ergibt sich daher, dass die gesamte abgegebene Strahlung – das ist die Fläche unter der Isotherme – proportional T^4 ist.

$$\int_0^\infty dE_s(\nu,T) = \text{const}\cdot T^4 = \sigma T^4$$

$$E_s(T) = \sigma T^4 \qquad \text{... Stefan-Boltzmannsches Gesetz} \tag{5}$$

$$\sigma = 5{,}6704\times 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$$

2.7 Wiensches Verschiebungsgesetz

Durch Nullsetzen des Differentialquotienten $dE_s(\lambda,T)/d\lambda = 0$ erhält man die Wellenlängen der maximalen Strahlungsleistung in Abhängigkeit von der Temperatur. Wenn wir $\beta = \frac{ch}{kT\lambda}$ setzen, erhalten wir

$$\frac{d}{d\lambda}\left(2hc^2\frac{\lambda^{-5}}{e^\beta-1}\right) = 0$$

$$\frac{-5\lambda^{-6}\left(e^\beta-1\right)+\lambda^{-5}e^\beta\frac{ch}{kT\lambda^2}}{\left(e^\beta-1\right)^2} = 0$$

$$-5\frac{kT\lambda}{hc}\left(e^{\beta}-1\right)+e^{\beta}=0$$
$$-5/\beta(e^{\beta})+e^{\beta}=0.$$

Diese transzendente Gleichung hat die Lösung $\beta=\beta_0$

$$\beta_0=\frac{ch}{kT\lambda_{max}} \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{max}T=\text{const.}$$

Es gilt also

$$\lambda_{max}T=2897{,}8\,\mu\text{m}\,\text{K}=\text{const.} \qquad \text{Wiensches Verschiebungsgesetz} \tag{6}$$

2.8 Lambertsches Cosinusgesetz

Jeder Punkt der Oberfläche eines idealer schwarzer Strahlers und damit näherungsweise Öffnung des Hohlraumstrahlers strahlt isotrop in alle Raumrichtungen gleichmäßig ab. Positioniert man einen Detektor im Winkel ϑ von der Normalen auf die Oberfläche wird daher die gesamte Strahlungsleistung auf den Detektor aus der Projektion auf die Detektorfläche entlang der Verbindungslinie berechnet. Damit ergibt sich

$$J(\vartheta)=J\cos\vartheta, \tag{7}$$

das Lambertsche Cosinusgesetz. Empirisch gilt dieser Zusammenhang für beliebige rauhe, strahlende oder diffus reflektierende Oberflächen, z.B. Papier.

3 Ausführung der Aufgaben

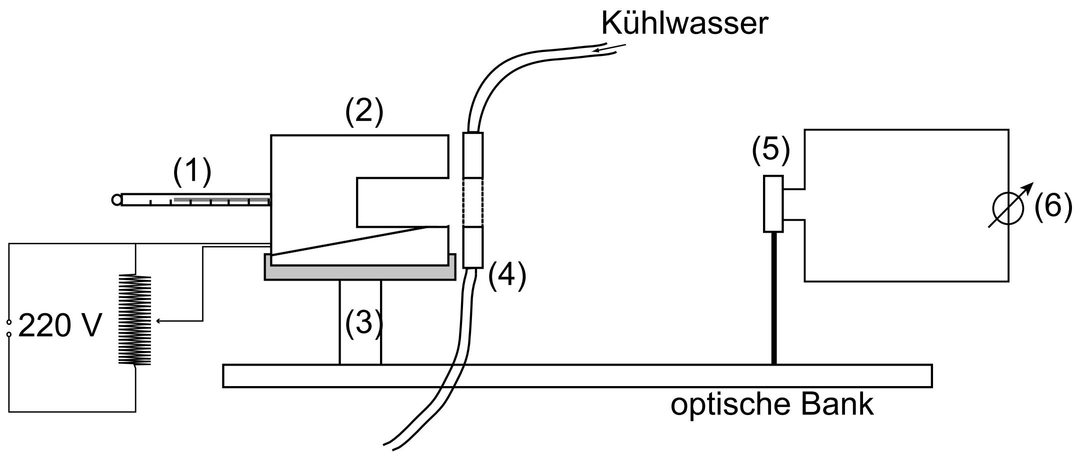

Abbildung 2: Versuchsaufbau

(1)	**Thermometer** (bis 350° C)	
(2)	**Rohrofen** (mit Schwarzkörpereinsatz)	zum Heizen des Schwarzen Körpers; wird über einen Regeltransformator bzw. einen Temperaturregler an 220 V angeschlossen;
(3)	**Tischchen**	
(4)	**Wassergekühlte Blende**	muss mit Hilfe von Stativen und Klemmen unabhängig von der optischen Bank justiert werden.
(5)	**Termosäule**	auf drehbarem Untersatz mit Winkelskala. Der Drehpunkt muss mit der Öffnung des Hohlraumes zusammentreffen.
(6)	**Messgerät**	Das Detektorsignal beträgt meist nur wenige mV, daher benötigen wir hier ein empfindlicheres Messgerät.

Die Thermosäule ist eine Anordnung von mehreren in Reihe geschalteten Thermoelementen (Kontakt zweier verschiedener Metalle, der eine temperaturabhängige Spannung generiert), die im Kontakt mit einer geschwärzten Fläche stehen. Sie hat eine nominelle Empfindlichkeit von $20\,\mu V/(W\,m^2)$ bis $40\,\mu V/(W\,m^2)$ für Strahlung, die auf die gesamte Stirnfläche einfällt. Der konische Reflektor konzentriert dabei die Strahlung (aus normaler Einfallrichtung $\pm 10°$) auf den eigentlichen Sensor. Die Thermosäule ist für Strahlung von $0{,}2\,\mu m$ bis $50\,\mu m$ Wellenlänge empfindlich. Für das Gerät ist eine Glasplatte zur Abdeckung vorhanden, welche nur Strahlung im Bereich von $0{,}3\,\mu m$ bis $3\,\mu m$ durchlässt und damit für unsere relativ kalten Schwarzen Strahler einen Großteil der Strahlung absorbiert. Alle Messungen sollten daher ohne die Glasplatte durchgeführt werden.

3.1 Überprüfung des Lambertschen Cosinusgesetzes

Bei symmetrischer Auslenkung muss sich ein symmetrischer Ausschlag ergeben. Der Nullpunkt kann auf der Winkelskala willkürlich festgelegt werden. Die Temperatur soll konstant sein (T ca. 300° C, Betriebspannung ca. 150 - 160 V). Fehler durch nicht konstant bleibende Ausstrahlung werden eliminiert, indem *zweimal* gemessen wird ($-45°...0°...45°...0°... -45°$).

Die gemessenen Werte trägt man in einem Diagramm mit Polarkoordinaten ein. Ist das Cosinusgesetz der Abstrahlung erfüllt, so ergibt sich ein Halbkreis, den man zum Vergleich mit der Theorie in dasselbe Diagramm einzeichnet. In der vorliegenden Versuchsanordnung ist das Cosinusgesetz vor allem wegen der Blende nicht streng erfüllt.

3.2 Messung der emittierten Strahlung in Abhängigkeit von T

Der Ofen ist bis zur Höchsttemperatur, die am Thermometer angezeigt werden kann, aufzuheizen. Den Empfänger auf Vollausschlag justieren und die Messung während der Abkühlung durchführen. Es wird empfohlen, alle 25° eine Ablesung zu notieren. Die Messung kann im unteren Temperaturbereich (100 bis 150° C) bei langsamer Abkühlgeschwindigkeit vorläufig abgebrochen werden. Ein weiterer Messpunkt wird dem Diagramm nachher ergänzend hinzugefügt. Tragen Sie die Messwerte E (bzw. der gemessenen Spannung U) zuerst als Funktion von T auf (**Diagramm a)**).

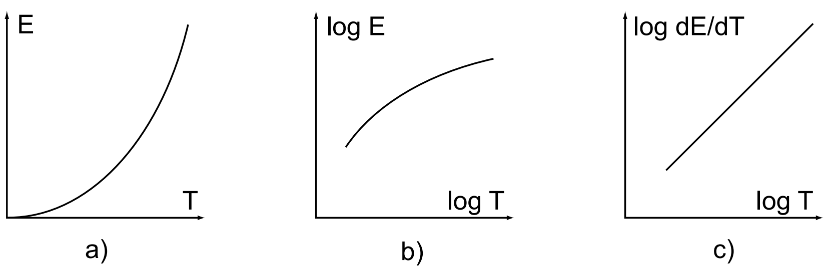

Abbildung 3: Diagrammdarstellungen der Strahlungsintensität E als Funktion der *absoluten* Temperatur T.

Diagramm b) Bei Strahlungsmessungen ist zu beachten, dass nicht nur die zu messende Strahlungsquelle (Temperatur T) Strahlung aussendet, sondern auch der Detektor (Temperatur T'), der bestrahlt wird. Daher ist der Energieeintrag auf den Detektor gegeben durch

$$E = \sigma(T^4 - T'^4)$$

$$\text{bzw.} \qquad \log E = \log\sigma + \log(T^4 - T'^4).$$

T' darf in unserem Falle nicht vernachlässigt werden (z.B. T=600 K bei T'=300 K). Daher ergibt sich in der Darstellung $\log E$ gegen $\log T$ keine Gerade außer im obersten Temperaturbereich wo $T' \ll T$.

Diagramm c) Es ergibt sich zwischen $\log \frac{dE}{dT}$ und $\log T$ im gesamten Temperaturbereich ein linearer Zusammenhang, der den Exponenten 3 liefert.

$$\frac{dE}{dT} = 4\sigma T^3$$

$$\log \frac{dE}{dT} = 3\log T + \log 4\sigma = 3\log T + \text{const.}$$

$\frac{dE}{dT}$ kann aus den Messdaten durch die Differenzen nächster Nachbarn gebildet werden. Beachten Sie, dass so gebildete Differenzenquotienten allerdings zu Temperaturwerten gehören, die zwischen den Messpunkten liegen. Das ist für die Bestimmung der Steigung nicht relevant, solange die Messpunkte gleiche und nicht zu große Abstände haben. Weiters ist wegen der Differenzenbildung die Streuung der Messpunkte hier etwas größer als im Diagramm b).

Absolute Strahlungsleistung: Überprüfen Sie weiters die absolute Übereinstimmung mit dem Stefan-Boltzmann Gesetz aus der bekannten Empfindlichkeit der Thermosäule, der Fläche des schwarzen Strahlers und dem vom Detektor aufgespannten Raumwinkel. Ist die beschränkte spektrale Empfindlichkeit der Thermosäule ein Problem?

3.3 Geräte

Optische Bank, Rohrofen mit Schwarzkörpereinsatz, wassergekühlte Blende, Drehgelenk mit Winkeleinteilung, Thermosäule, Thermometer 360° C, Regeltransformator bzw. Temperaturregler, Vielfachmessinstrument mit mV Bereich (Metrix MX 22).