Grundpraktikum 1
Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck
WS 2016/17

GPV06: Luftkissenschiene[1]

1 Ziele des Versuchs

Die reibungslose eindimensionale Bewegung wird auf einer Luftkissenschiene untersucht. Durch leichte Neigung der Schiene wird eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung realisiert. Das Konzept der momentanen Geschwindigkeit wird als Grenzfall der mittleren Geschwindigkeit veranschaulicht. Aus der gemessenen Beschleunigung entlang der geneigten Schiene wird die Erdbeschleunigung bestimmt. Desweiteren werden auf einer horizontalen Schiene verschiedene eindimensionale Stoßprozesse untersucht. Dabei wird die Impuls- und Energieerhaltung überprüft und die Stöße werden im Schwerpunktsystem interpretiert.

2 Aufgaben

- Verständnis der verwendeten Gerätschaften und deren Funktionsweisen (Luftkissenschiene und Lichtschrankensystem).
- Messung von mittleren Geschwindigkeiten für verschiedene Lichtschrankenabstände und Ermittlung der Momentangeschwindigkeit als Grenzfall der mittleren Geschwindigkeiten.
- Bestimmung der Beschleunigung durch Geschwindigkeitsmessung an zwei verschiedenen Orten.
- Bestimmung der Erdbeschleunigung und Vergleich mit dem Literaturwert.
- Untersuchung von Impuls- und Energieerhaltung bei eindimensionalen Stößen. Verständnis der Stöße im Schwerpunktsystem.

Literatur:

Jedes einführende Lehrbuch zur Mechanik, Vorlesungsunterlagen Physik I.

[1] Die vorliegende Version des Skripts basiert auf einer früheren Version von Emmerich Kneringer (Jan. 2016), die von Rudi Grimm weitgehend überarbeitet wurde (letzte Änderung 05.03.2017).

3 Geräte

3.1 Luftkissenschiene und Zubehör

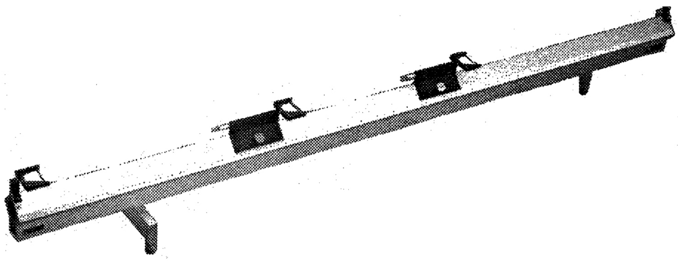

Abbildung 1: Die Luftkissenschiene mit zwei Reitern.

Die Luftkissenschiene (Abb. 1) ist eine 2 m lange Alu-Profilschiene. Durch kleine Löcher an der Oberseite wird mittels eines Gebläses ein gleichmäßiger Luftstrom erzeugt. Auf diesem Luftkissen gleiten Reiter mit geringer Reibung, da sie mit der Schiene nicht in Berührung kommen (siehe Diskussion der Restreibung im Anhang A). Die Masse dieser Reiter (180 g) kann durch zusätzliche Gewichte (je 50 g) verändert werden. Diese Gewichte müssen symmetrisch am Reiter angebracht werden, um die Balance zu gewährleisten. Weiteres, in Abb. 2 und 3 gezeigtes Zubehör (je 10 g) kann in den Löchern oben und seitlich angebracht werden. Die Schilder (10 g), die oben angebracht werden, dienen der Zeitnehmung.

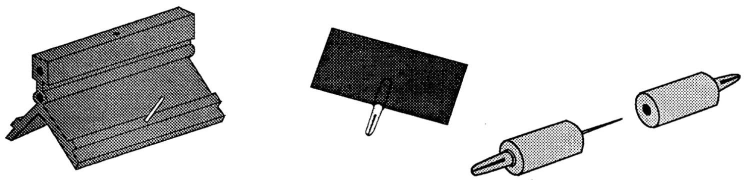

Abbildung 2: Reiter, Schild, Nadel und Wachsröhrchen.

Gummibandstoßelemente („Bumpers“) ermöglichen nahezu elastische Stöße zwischen zwei Reitern bzw. mit dem Endstop. Am Endstop können sie auch verwendet werden, um die Reiter mit relativ gut definierter Anfangsgeschwindigkeit zu starten. Für Stöße zwischen zwei Reitern muss auf dem zweiten eine Stoßplatte montiert werden.

Wachsröhrchen und Nadel werden bei inelastischen Stößen verwendet. Die Nadel gräbt sich bei einem Stoß immer tiefer in das Wachs ein, deshalb muss dieses nach einigen Stößen wieder im Röhrchen festgedrückt werden.

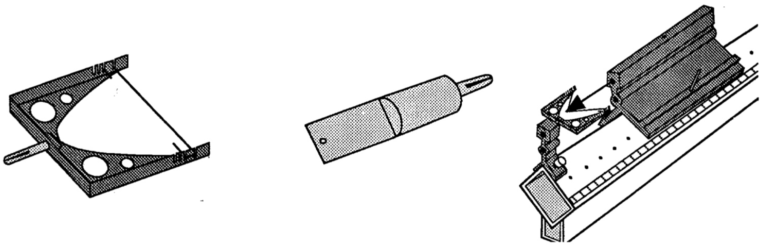

Abbildung 3: Bumper und Stoßplatte, Aufbau.

3.2 Lichtschranken

Zur Bestimmung von Zeitintervallen und Geschwindigkeiten wird ein System aus zwei Lichtschranken mit Controller verwendet, siehe Abbildung 4. Die Lichtschranken sind in U-förmigen Bügeln angebracht. Eine Leuchtdiode zeigt an, ob die jeweilige Lichtschranke unterbrochen ist. WICHTIG: Tritt der Laserstrahl nicht genau senkrecht auf das Schild, führt dies zu Messungenauigkeiten. Um solche **Parallaxenfehler** zu minimieren, soll die Lichtschranke so nahe wie möglich am Detektor (dieser ist unterhalb der Leuchtdiode) unterbrochen werden!

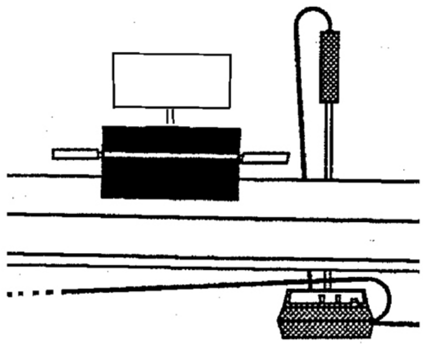

Abbildung 4: Reiter mit Schild, Lichtschranke und Controller.

Der Controller misst Zeiten und kann aufgrund der bekannten Abstände der Messstreifen auf dem Schild Geschwindigkeiten (und auch Beschleunigungen) ausgeben. Für die hier durchgeführten Zeit- und Geschwindigkeitsmessungen müssen die Lichtschranken auf die Höhe der zwei oberen Messstreifen des Schildes eingestellt werden. Achtung bei einer geneigten Schiene!

Folgende Betriebsmodi (siehe auch Abb. 5) sind für unsere Versuche relevant:

1. **Time – Two Gates**
   Einfacher Modus zur Zeitmessung zwischen zwei Lichtschranken. Die Messung wird bei Unterbrechung der Lichtschranke 1 gestartet und bei Lichtschranke 2 gestoppt.

2. **Speed – One Gate**
   Einfacher Modus zur Messung der Geschwindigkeit mit einer Lichtschranke (egal welche verwendet wird). Die Zeit wird zwischen der ersten und der zweiten Unterbrechung gemessen. Aus dem bekannten Abstand der Messstreifen (1 cm) wird so die Geschwindigkeit berechnet. Die Ausgabe auf dem Display erfolgt in cm/s. Für mehrere Messungen hintereinander Messwert schnell ablesen und wieder Start drücken.

3. **Speed – Collision** (für bis zu vier Messungen, zwei pro Lichtschranke)
   In diesem Modus erlaubt die Speicherfunktion die Messung von bis zu vier Geschwindigkeiten, aber auch die Messung der Geschwindigkeit nur eines Reiters an zwei Stellen der Schiene. Verwendung dieses Modus: Nach vier Messungen (zwei bei jeder Lichtschranke) werden die Messergebnisse automatisch angezeigt. Bei weniger Messungen muss *Stop* gedrückt werden. Dadurch werden die Messwerte der ersten Lichtschranke angezeigt. Durch Drücken von *Select* wird die Anzeige auf die Messwerte von Lichtschranke 2 umgeschaltet.

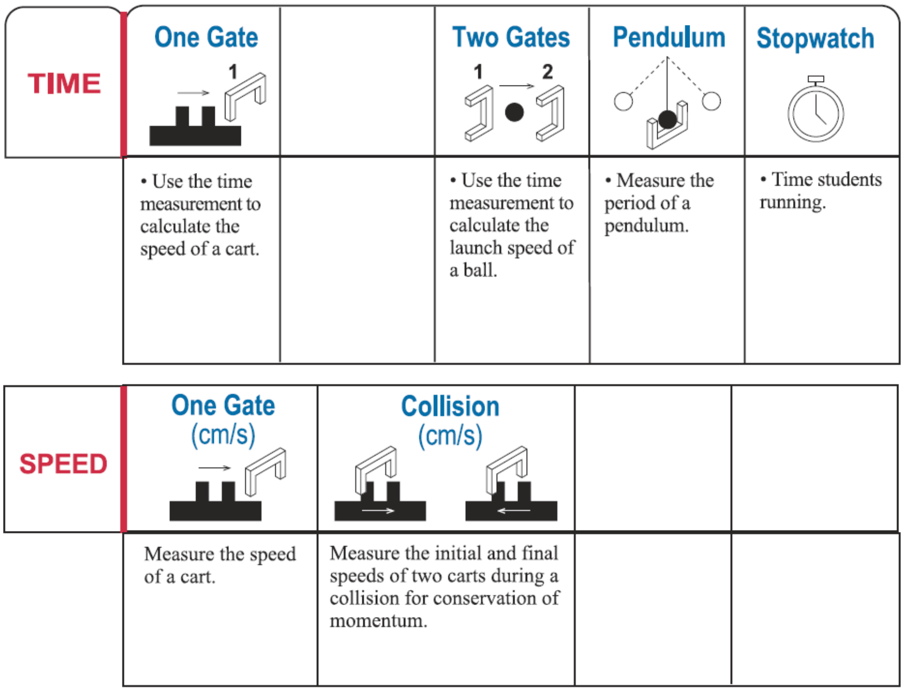

Abbildung 5: Betriebsarten zur Messung von Zeiten und Geschwindigkeiten des Smart-Timer-Moduls ME-8930 (Abbildung aus dem Instruction Manual von PASCO Scientific).

Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessungen: Während die Zeitmessungen als beliebig genau angenommen werden können, unterliegen die Geschwindigkeitsmessungen Fehlern, die für unsere Auswertungen bedeutend sein können.

- Ein **systematischer Fehler** ergibt sich aus den nicht ganz genauen Abständen der Messstreifen. Wie bisherige Untersuchungen gezeigt haben, werden dadurch die Geschwindigkeiten systematisch um etwa 1-2% zu hoch gemessen.

- Die allgemeine **statistische Messunsicherheit** wird vom Hersteller PASCO Scientific mit $\pm 0,1\,\mathrm{cm/s}$ angegeben.

- Ein **weitere Unsicherheit** ergibt sich aus der Diskretisierung der Zeitmessungen (die in Schritten von 0,1 ms erfolgen). Dadurch springen die berechneten Geschwindigkeiten in größeren Schritten als die Anzeigegenauigkeit suggeriert. So werden z.B. die Zahlenwerte 57.1, 57.4 und 57.8 ohne Zwischenwerte angezeigt. Dieser Diskretisierungseffekt führt (ähnlich wie ein Rundungsfehler) zu einer Ungenauigkeit, die durch den Ausdruck
$$\frac{\sigma_v}{v} \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{v}{\mathrm{cm/s}}$$
abgeschätzt werden kann. Der entsprechende Fehler kann insbesondere bei höheren Geschwindigkeiten von Bedeutung sein. Er kann mit der zuvor genannten statistischen Messunsicherheit quadratisch kombiniert werden.

4 Durchführung der Versuche

4.1 Vorbereitung

Zwei der drei Füße der Schiene sind verstellbar. Mit ihrer Hilfe muss die Schiene zuerst in eine waagrechte Position gebracht werden: Gebläse einschalten (Einstellung zwischen 1 und 1,5). Reiter ohne Gewichte in die Mitte der Schiene stellen. Füße so lange verstellen, bis Reiter nicht mehr in eine Richtung beschleunigt wird. Die Beschleunigung sollte im Idealfall entlang der gesamten Schiene Null sein.

4.2 Messung der mittleren und momentanen Geschwindigkeit

Die Luftkissenschiene wird nun durch Unterlegen eines Klotzes etwas geneigt (siehe Abb. 6), so dass der Reiter eine Beschleunigung erfährt. Wir wollen die Geschwindigkeit an einem Ort x_1 bestimmen, der etwa in der Mitte der Schiene liegt. Die Messung der momentanen Geschwindigkeit $v = dx/dt$ erfolgt näherungsweise über eine Messung der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t$, also über die Messung eines endlichen Zeitintervalls und Ortsintervalls. Dabei sind $\langle v \rangle$ und v im allgemeinen nicht identisch. Der aufzunehmende Graph soll die Annäherung der mittleren Geschwindigkeit an die momentane Geschwindigkeit zeigen, wenn Δt bzw. Δx gegen Null geht.

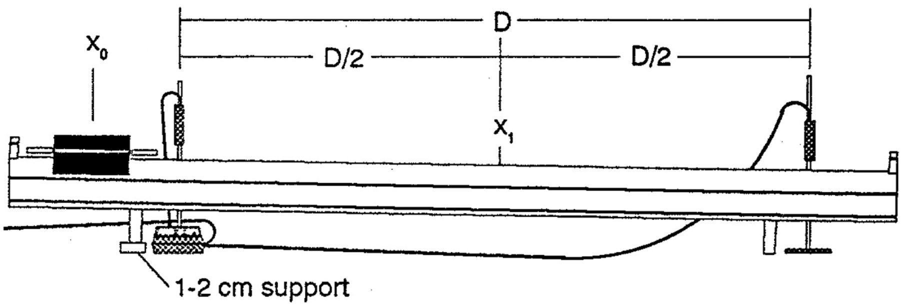

Abbildung 6: Messung von mittleren Geschwindigkeiten mit leicht geneigter Luftkissenschiene. Die beiden Lichtschranken befinden sich im Abstand D voneinander, symmetrisch angeordnet zur Position x_1. Die Reiter werden bei x_0 aus der Ruheposition losgelassen. Die Distanz $S = x_1 - x_0$ (nicht eingezeichnet) ist für die zu bestimmende Momentangeschwindigkeit relevant.

Positioniere beide Lichtschranken symmetrisch zu der ausgewählten Position x_1 (empfohlen[2] 115 cm) im Abstand $\pm D/2$ und wähle eine Startposition x_0 (empfohlen 15 cm). Die Positionen x_0 und x_1 und damit auch der Abstand $S = x_1 - x_0$ dürfen im Verlauf der gesamten Versuchsreihe nicht verändert werden. Bestimme die Laufzeit des Reiters (empfohlen ist die Verwendung von zwei 50g Gewichten) zwischen den beiden Schranken im Two-Gate-Modus, wobei fünf einzelne Zeitmessungen durchgeführt und dann gemittelt werden sollen. Wiederhole diese Messung für schrittweise kürzere Distanzen D (empfohlene Verringerung von 140 cm auf 20 cm in Schritten von 20 cm).

[2] Die empfohlenen Positionen beziehen sich auf die auf der Vorderseite (Hinterseite) angebrachten Skala, wenn die Schiene rechts (links) mit dem Gebläse verbunden ist.

Berechne schließlich für jede Distanz D die **mittlere Geschwindigkeit** und schätze dabei die jeweiligen Messfehler ab, wobei angenommen werden kann, dass der Fehler von der Längenmessung dominiert wird, und der Fehler der Zeitmessung vernachlässigbar ist. Stelle die Ergebnisse graphisch dar (mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ als Funktion der quadrierten Distanz D^2).

Ein wesentlicher Auswerteschritt ist nun die Bestimmung der **Momentangeschwindigkeit** v durch Extrapolation zu $D = 0$. Hierzu greifen wir auf die Theorie der gleichmäßig beschleunigten Bewegung zurück, aus der sich der allgemeine Zusammenhang

$$\langle v \rangle = \sqrt{2aS} \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{D}{2S}} + \sqrt{1 - \frac{D}{2S}} \right) , \tag{1}$$

herleiten läßt (siehe Anhang B). Der vordere Term $\sqrt{2aS}$ entspricht dabei der Momentangeschwindigkeit v und der zweite Term geht im Grenzfall $D \to 0$ gegen 1.

Für Anfänger: Wir können eine lineare Regression (siehe GP-Leitfaden) durchführen, wenn wir eine Taylorentwicklung 2. Ordnung von Gleichung (1) verwenden:

$$\langle v \rangle \approx v \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{D}{2S} \right)^2 \right] . \tag{2}$$

Für unseren Zweck stellt dies eine sehr gut geeignete Näherung dar, solange $D \leq S$ erfüllt ist. Bestimme aus denjenigen Messwerten, die diese Bedingung erfüllen, die Momentangeschwindigkeit v.

Für Fortgeschrittene: Führe die lineare Regression für die Werte mit $D \leq S$ unter Berücksichtigung der Fehlergewichte durch[3].

Für Datenanalyse-Experten: Verwende ein Datenanalyse-Programm und passe den Verlauf gemäß Gleichung (1) an den kompletten Satz von Messdaten (d.h. für alle D) unter Berücksichtigung der Messfehler an und bestimme so v mit dem zugehörigen Fehler. Die Gewichtung der Fehler ist dabei sehr wichtig („instrumentelle Gewichtung“ im Fitprogramm verwenden).

Führe nun eine Messung der Momentangeschwindigkeit mit nur einer Lichtschranke am Ort x_1 durch, wobei der Controller im Modus Speed One-Gate betrieben wird. Stimmt das Ergebnis mit dem zuvor ermittelten Wert überein? Diskutiere die Ursachen für mögliche Abweichungen und begründe, welchem Wert eher zu vertrauen ist, und verwende im folgenden diesen „besseren“ Wert.

Aus dem Ergebnis für die Momentangeschwindigkeit v und aus der Strecke S läßt sich schließlich die **Beschleunigung a entlang der Schiene** berechnen. Welcher Wert (mit Fehler) ergibt sich?

[3]Siehe z.B. das exzellente Lehrbuch *Measurements and their Uncertainties* von I. Hughes und T. Hase, Oxford Univ. Press. (2010).

4.3 Alternative Methode zur Messung der Beschleunigung

Eine alternative Methode zur Bestimmung der Beschleunigung a beruht auf der Messung der Geschwindigkeiten an zwei verschiedenen Orten. Wie man leicht aus der Energieerhaltung erkennt, gilt hier

$$v_1^2 - v_2^2 = 2a(x_1 - x_2)\,. \tag{3}$$

Wie Abbildung 7 zeigt, verwenden wir zur Messung von v_1 und v_2 wiederum zwei Lichtschranken, die diesmal aber im One Gate oder im Collision Modus betrieben werden.

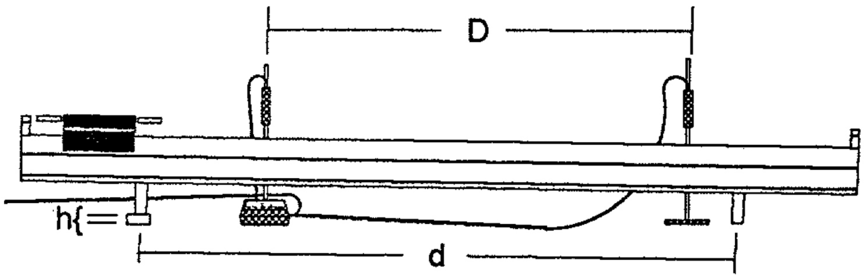

Abbildung 7: Einfache Messung der Erdbeschleunigung auf der geneigten Luftkissenschiene. Die beiden verwendeten Lichtschranken werden hier so betrieben, dass sie die Geschwindigkeiten an den beiden Orten messen.

Die Neigung der Schiene bleibt genauso wie im vorherigen Versuchsteil, ebenso sollte die Masse des Reiters nicht geändert werden (gleiche Gewichte wie vorher). Platziere die Lichtschranken an zwei geeigneten Positionen und führe eine Reihe von Messungen zur Bestimmung von a durch. Diskutiere die dabei auftretenden Messfehler unter besonderer Beachtung der Hinweise aus Abschnitt 3.2. Vergleiche das Ergebnis mit dem zuvor aus der Momentangeschwindigkeit ermittelten Wert und diskutiere, welche der beiden Messmethoden das genauere Ergebnis liefert.

4.4 Bestimmung der Erdbeschleunigung

Mit unseren Ergebnissen für die Beschleunigung a aus den Abschnitten 4.2 und 4.3 können wir nun die **Erdbeschleunigung** g bestimmen. Dazu müssen wir aus einfachen geometrischen Überlegungen (Abb. 7) den Neigungswinkel ermitteln, wozu wir die Höhe h des Klotzes ist mit einer Schublehre messen.

Welcher Wert ergibt sich für g und wie groß ist die gesamte Meßunsicherheit? Ist der Wert mit dem Literaturwert konsistent? Diskutiere mögliche Gründe für Abweichungen.

4.5 Impuls- und Energieerhaltung bei elastischen und inelastischen Stößen

Stelle die Schiene nun wieder waagrecht und überprüfe nochmals die exakte horizontale Ausrichtung. Stelle die Lichtschranken in einem geeigneten Abstand (empfohlen ca. 40 cm) voneinander auf, ungefähr in der Mitte der Schiene. Der Controller wird nun im Collision Modus mit Memory-Funktion betrieben, und kann so die Geschwindigkeiten beider stoßender Reiter vor und nach dem Stoß messen.

Nahezu elastischer Stoß gleicher Massen

Verwende zwei Reiter ohne zusätzliche Gewichte. Ein Reiter wird an dem stoßenden Ende mit einem Gummiband-Puffer versehen und der andere Reiter mit einer Stoßplatte, wobei für die Befestigung beider Elemente jeweils das untere Loch (nahe an der Schiene) verwendet werden soll. Setze beide Reiter außerhalb des Lichtschrankensystems händisch in Bewegung, so dass sie zwischen den Lichtschranken miteinander stoßen. Variiere die Anfangsgeschwindigkeiten, wobei die Relativgeschwindigkeit im Bereich zwischen 30 cm/s und 100 cm/s liegen sollte.

Fasse die Ergebnisse von fünf solchen Messungen (d.h. die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 vor dem Stoß und die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß) in einer Tabelle zusammen. Achte dabei auf das Vorzeichen. Zur Auswertung berechne für diese Messungen die Schwerpunktgeschwindigkeiten v_{SP} und v_{SP}' sowie die Relativgeschwindigkeiten $v_{\mathrm{rel}} = v_1 - v_2$ und $v_{\mathrm{rel}}' = v_1' - v_2'$ vor und nach dem Stoß.

Berechne für jede Messung die Änderung $\Delta v_{\mathrm{SP}} = v_{\mathrm{SP}}' - v_{\mathrm{SP}}$ der Schwerpunktgeschwindigkeit. Sind die Ergebnisse mit Null konsistent, so dass die **Impulserhaltung** (und damit auch die Erhaltung der kinetischen Energie im SP-System) bestätigt werden kann?

Wie ändert sich die Relativgeschwindigkeit durch den Stoß und was sagt dies über die Erhaltung der **kinetischen Energie** K_{rel} der Relativbewegung aus? Berechne jeweils den (bereits in der Vorlesung Physik I eingeführten) Elastizitätsparameter $\eta = K_{\mathrm{rel}}'/K_{\mathrm{rel}} = (v_{\mathrm{rel}}'/v_{\mathrm{rel}})^2$ und vergleiche die Werte der einzelnen Messungen. Wie nahe kommt man dem Idealfall des perfekt elastischen Stoßes?

Nahezu elastischer Stoß ungleicher Massen

Füge einem der beiden verwendeten Reiter vier Gewichte (insgesamt 200 g) zu und führe das gleiche Versuchs- und Auswerteprogramm wie zuvor durch.

Vollständig inelastischer Stoß

Untersuche nun auf gleiche Weise den vollständig inelastischen Stoß. Hierzu werden Gummiband und Stoßplatte durch den Nadelaufsatz und das Wachsröhrchen ersetzt. Hier können gleiche oder ungleiche Massen verwendet werden. Achte darauf, dass das weiche Wachs den Stoß völlig auffängt und dass nicht die Metalloberflächen der Halter miteinander stoßen. Der Controller muss bei dieser Messung von Hand gestoppt werden, da eine der Lichtschranken nur einmal durchlaufen wird.

Schlussfolgerungen

Welche allgemeinen Schlussfolgerungen können aus diesen Messungen zur Impuls- und Energieerhaltung gezogen werden?

Anhang

A Reibung

Alle hier auf der Luftkissenschiene durchgeführten Versuche können gut unter der Annahme von vernachlässigbarer Reibung ausgewertet werden. Nichtsdestotrotz wollen wir nun die geringe Restreibung quantitativ diskutieren. Die Reibung hat Stokes'schen Charakter und lässt sich daher durch eine geschwindigkeitsproportionale Kraft

$$F_R = -\beta v$$

beschreiben, wobei β den sogenannten Reibungskoeffizienten darstellt. Die Abnahme der Geschwindigkeit, bezogen auf eine zurückgelegte Strecke, läßt sich zunächst differenziell als

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{F_R}{mv} = -\frac{\beta}{m}$$

schreiben. Da sich hier eine Konstante gibt, ergibt sich unmittelbar die Proportionalität

$$\Delta v = -\frac{\beta}{m} \Delta x \,.$$

Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeitsänderung Δv nur von der Konstanten β/m und der zurückgelegten Strecke Δx abhängt, nicht aber von der Geschwindigkeit v.

Für unsere Luftkissenschiene haben Messungen[4] von Δv den Stokes'schen Charakter der Reibung bestätigt und einen typischen Reibungskoeffizienten von

$$\beta \approx 1,5\,\mathrm{g\,s^{-1}}$$

ergeben. Dies bedeutet z.B., dass ein Reiter der Masse $m = 190\,\mathrm{g}$ auf einer Strecke von 1 m eine Geschwindigkeitsabnahme von ca. 0,8 cm/s erfährt. Der für β genannte Wert kann zur Abschätzung der geringen Reibungseffekte bei den Versuchen verwendet werden.

B Herleitung von Gl. (1)

Seien $s_1 = S - D/2$ und $s_2 = S + D/2$ die Strecken vom Startpunkt bis zur ersten bzw. zweiten Lichtschranke und t_1 und t_2 die entsprechenden Zeiten. Die mittlere Geschwindigkeit lässt sich dann als

$$\langle v \rangle = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

schreiben. Setzen wir $s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$ und $s_2 = \frac{1}{2} a t_2^2$ ein, erhalten wir

$$\frac{a}{2} \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{a}{2}(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2a}\left(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}\right) \,,$$

woraus sich direkt Gleichung (1) ergibt.

[4] durchgeführt von R. Grimm am 29.10.2016.

Fragen zur Vorbereitung

- Wie beschreibt man allgemein eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung?
- Wie erhält man Gleichung (1) aus der gleichmäßig beschleunigten Bewegung?
- Wie leitet sich Gleichung (2) aus Gleichung (1) ab?
- Was bedeutet „Stokes'sche Reibung"?
- Wie ändert sich bei Stokes'scher Reibung die Geschwindigkeit mit der Zeit und wie mit dem zurückgelegten Weg?
- Was ist eine lineare Regression?
- Ist die Erdbeschleunigung konstant, oder wovon hängt sie ab?
- Welchen Wert hat die Erdbeschleunigung in Innsbruck?
- Wie berechnet man die Schwerpunkts- und die Relativgeschwindigkeit von zwei Körpern?
- Warum ist es sinnvoll, einen Stoß im Schwerpunktsystem zu beschreiben?
- Was unterscheidet elastische von inelastischen Stößen?
- Was geschieht mit der Energie der Schwerpunktsbewegung bei einem inelastischen Stoß?
- Was geschieht mit der Energie der Relativbewegung bei einem inelastischen Stoß?
- Wie berechnet man die Energie der Relativbewegung, wenn die Relativgeschwindigkeit bekannt ist?