Leitfaden für das Grundpraktikum

Bachelorstudium Physik
Wintersemester 2019/2020

Institut für Experimentalphysik der Universität Innsbruck

Organisation:	Tracy Northup (Grundpraktikum 1)
Lehrende:	Ayasli Atilay, Charly Beulenkamp, Camilo Cantillano, Armin Denoth, Manuele Landini, Viktor Messerer, Thomas Steindl
Studentische Mitarbeiter:	Felix Bösch, Moritz Kruska, Verena Podlesnic

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Grundlegendes

Im physikalischen Grundpraktikum sollen die Basisbegriffe des experimentellen naturwissenschaftlichen Arbeitens vermittelt werden. Diese umfassen

- Selbstständige Vor- und Nachbereitung der physikalischen Grundlagen eines Experiments anhand der Anleitung und der darin angegebenen Literatur.
- Umgang mit elementaren Messgeräten wie Schiebelehre, Stoppuhr, Thermometer, Volt- und Amperemeter etc.
- Erlernen von gängigen Methoden zur Datenauswertung wie Mittelwertbildung, graphische Darstellung der Daten, oder Ermitteln von Geradensteigungen und anderer Parameter des Graphen.
- Quantitatives Einschätzen der Zuverlässigkeit einer Messung aufgrund der systematischen und statistischen Unsicherheiten.
- Dokumentation und Kommunikation der durchgeführten Experimente im einem Laborbuch sowie in einem Bericht.
- Teamarbeit.

Im Gegensatz zur späteren Anwendung des Erlernten bei der Diplomarbeit, Dissertation oder weiterer Laborarbeit in der industriellen oder akademischen Forschung führen die Versuche im Praktikum meistens zu Ergebnissen, die aus den Vorlesungen oder der Versuchsanleitung bekannt sind. Dies mag auf den ersten Blick so erscheinen, als wäre das Praktikum ein sinnloses Wiederholen althergebrachter Versuche. Tatsächlich soll das Praktikum aber eine Art Training für die im weiteren Berufsweg eines(r) Physikers(in) anstehenden praktischen Aufgaben sein. Spätere gute Leistungen im Labor können nur durch konsequentes Training und sicheres Beherrschen der Grundtechniken erbracht werden. Ist das im Praktikum bestimmte Ergebnis als Literaturwert bekannt, so kann der Vergleich des eigenen Resultats mit der Erwartung zur Überprüfung des eigenen Könnens benutzt werden. Stimmt das Ergebnis, im Rahmen der Messunsicherheiten, mit der Erwartung überein, kann man davon ausgehen, dass die benutzten Experimentiertechniken richtig erlernt und angewandt wurden.

Darüber hinaus sind die Versuche thematisch mit dem Stoff der Grundvorlesungen aus der Experimentalphysik verwandt und dienen daher zur praktischen Vertiefung des gehörten Stoffes. Oft trägt ein „begreifbarer“ Versuch mehr zum Verständnis bei als tausend Worte. Dazu muss man sich allerdings wirklich mit dem Experiment auseinandersetzen („Was passiert, wenn ich hier drehe, und warum?“) und es nicht nur wie ein Kochrezept nachahmen.

1.1 Protkoll- und Berichtsführung

Versuchsprotokolle im Laborbuch sowie Versuchsberichte dienen zur Dokumentation und zur späteren Reproduzierbarkeit eines physikalischen Experiments. Sie sollten daher präzise, vollständig, prägnant und klar den durchgeführten Versuch wiedergeben. Jede Gruppe benötigt dazu zwei Laborbücher, die abwechselnd verwendet werden, damit man eines bearbeiten kann, während das andere in Korrektur ist.

1.1.1 Aufzeichnungen während des Versuchs (Laborbuch)

Ein guter Bericht kann man nur erstellen, wenn die Aufzeichnungen während der Versuchsdurchführung einwandfrei sind. Diese Aufzeichnungen werden in das *Laborbuch* eingetragen und werden im Anschluss vom Betreuer bewertet. Dazu gehören, Titel, Datum, nummerierte Seiten, ein kurzer Satz, worum es sich in dem Experiment handelt inkl. einer Handskizze des Aufbaus. Neben den Messdaten sollten die experimentellen Unsicherheiten gleich abgeschätzt, und besondere Ereignisse vermerkt werden. Wenn zweckmäßig, sollte man auch gleich während der Versuchsdurchfährung einfache Graphen zeichnen, um sofort erkennen zu können, ob die Daten wie erwartet sind oder ob es Abweichungen gibt. Im Laborbuch wird nichts gelöscht, sondern (lesbar) durchgestrichen. Das Laborbuch ist in der Forschung ein sehr wichtiges Dokument.

1.1.2 Bericht

Der klar gegliederte Bericht wird nach jedem Praktikumstermin angefertigt, ins Laborbuch gelegt (weder eingeklebt noch geheftet) und bis spätestens einen Werktag vor dem folgenden Termin um 12:00 im 4. Stock zur Korrektur abgegeben. Das Schreiben des Berichts wird in Abschnitt 2 diskutiert werden. Eine Checkliste für die Laborbucheintragungen sowie für den Bericht findet sich auf OLAT, diese Checkliste soll jede Woche mit dem Laborbuch und Bericht abgegeben werden.

1.2 Was geht in die Bewertung des Praktikums ein?

Bewertet werden

- die Vorbereitung auf den Versuch anhand der Fragen zur Vorbereitung am Ende jedes Versuchsskriptums (max. 2 Punkte),
- die Versuchsdurchführung und die Ausführung der Laborbucheintragungen (max. 2 Punkte),
- der Bericht nach den Kriterien von Abschnitt 2 (max. 6 Punkte).

Bei der Durchführung der Versuche wird die Zusammenarbeit der Gruppe sowie die Arbeit jedes einzelnen bewertet. Ziel ist ein koordiniertes Bearbeiten der einzelnen Aufgaben und eine sinnvolle Beschreibung durch den Bericht. Wir bitten um Verständnis, dass nicht jeder Betreuer exakt gleich bewertet. Dadurch, dass jede Gruppe alle Beispiele (mit den jeweiligen Betreuern) bearbeitet, gelten für alle die gleichen Voraussetzungen.

1.3 Die Betreuer in eigener Sache

Solltet ihr in diesen Richtlinien oder den Anleitungen der Versuche Schreib-, Erklärungs- oder Rechenfehler finden, so bitten wir euch, sie den Betreuern mitzuteilen. Die Fehler werden dann gesammelt und in zukünftigen Auflagen der Anleitungen ausgemerzt. Genauso sind wir für konstruktive Vorschläge zur Verbesserung der Versuchsanordnungen oder Vorgehensweise immer dankbar.

Zuletzt möchte Euch das Team der Praktikumsbetreuer viel Spaß und Erfolg im Grundpraktikum wünschen.

1.4 Anerkennung

Das heutige Dokument ist eine Zusammensetzung und Erweiterung von früheren Versionen und anderen Dokumenten, für die wir uns bei den Autoren bedanken:

- „Grundpraktikum WS2011/12 Skript“ von G. Weihs, M. Brownnutt, A. Fritsche, T. Günthner, P. Mai und Z. Vörös,
- Erweiterungen im SS2016 von Rianne S. Lous und Slava Tzanova,
- „Leitfaden zum Schreiben der Praktikumsberichte“ von T. Monz, K. Laiho, T. Kauten, G. Weihs und R. Grimm
- „Anleitung zur Anfertigung einer Versuchausarbeitung“ von P. O. Schmidt.

2 Leitfaden zum Schreiben des Berichts

Die im Rahmen der Pratika verfassten Berichte sollen auf das Schreiben von wissenschaftlichen Arbeiten vorbereiten. Im Folgenden findet man eine Zusammenstellung von Kriterien, die sowohl die Praktikumsberichte, die Bachelor- und Masterarbeiten, Dissertationen als auch spätere wissenschaftliche Arbeiten erfüllen sollten.

2.1 Struktur

2.1.1 Titel

Vollständiger *Titel des Versuch*, *Namen* der durchführenden Studierenden, *Kontakt*, *Gruppennummer*, und *Datum* der Durchführung. *Wer, was, wo, wann?*

2.1.2 Kurzfassung

- Die Kurzfassung findet sich direkt nach dem Titel.
- Sie ist unabhängig vom Haupttext, soll das Wesentliche des Berichts beschreiben und erklären welche Erkenntnisse man gewonnen hat.
- Sie ist nicht in Zukunftsform verfasst.
- Da die Kurzfassung kein Bestandteil des Haupttextes ist, findet sich hier auch keine Kapitel bzw. Abschnittsnummer.
- Die Kurzfassung besteht aus einem einzelnen Absatz.
- Sie besteht generell aus nicht mehr als 200 Wörtern.
- Die Kurzfassung beinhaltet keine Formeln oder Sonderzeichen.
- Ergebnisse (im Sinne von Zahlenwerten) werden nur wenn wirklich notwendig aufgezeigt.

Wenn man nur 2 Minuten hätte um einem Kollegen/einer Kollegin die Arbeit zu erklären, was soll er/sie davon wissen?

2.1.3 Inhaltsangabe

Mittels LaTeXwird diese meist automatisch generiert. Sie zeigt die verschiedenen Kapitel und Seitenangabe auf.

2.1.4 Einleitung

Die Einleitung (zusammen mit der Kurzfassung) soll das Interesse des Lesers wecken und ihn motivieren, weiter zu lesen. Hierbei ist es wichtig, die folgende Arbeit auch in einem breiteren Kontext darzustellen und Zusammenhänge aufzuzeigen. Der Leser sollte kurz in das Thema des Versuchs eingeführt werden und die Relevanz im breiteren Raum der Physik diskutiert werden. Fasse in der Einleitung keine Bücher zusammen (Referier!), sondern beschränke

dich auf die wesentlichen Merkmale und Prinzipien des Versuchs. Die Einleitung soll am Ende das Ziel des Versuchs erklären.
Worum geht es in dem Versuch? Was ist die Hauptfrage und warum ist sie interessant?

2.1.5 Theorie

- Eine kurze Beschreibung der Aufgabenstellung inklusive Definition der verschiedenen Größen und die Beziehungen zwischen den unmittelbaren Messgrößen und den abgeleiteten Größen.
- Ein knapper Abriss über die für den Versuch notwendige Theorie sowie die wichtigsten (benutzten) Formeln.
- **Kein umschreiben/kopieren der Theorie im Skriptum.** Sei prägnant und referiere.
- Alle Definitionen sind hier zu erklären.

Was sind die wichtigen physikalischen Grundlagen?

2.1.6 Aufbau und Methode(n)

- **Skizze** mit Beschriftungen und Beschreibung des experimentellen Aufbaus sowie des Ablaufs jedes einzelnen Versuchs.
- Verweise auf Versuchsskript.
- Aufgrund dieser Beschreibung sollte der Versuch jederzeit von einer anderen Person so wiederholbar sein, dass sie zu den selben Resultaten innerhalb der Abschätzung der Unsicherheiten kommt.
- Alle verwendeten Geräte, Elemente, usw. müssen aufgezählt, wenn passend mittels Bild gezeigt, beschrieben und erklärt werden.
- Insbesondere sollte es hierbei klar werden, unterstützt durch die vorherigen Theorie und Einleitung, warum und wie das Experiment funktioniert. Ebenfalls muss klar hervorgehen, wie die Messungen durchgeführt wurden.

Was würde jemand brauchen, um den Versuch zu wiederholen?

2.1.7 Ergebnisse

- Alle relevante gemessenen Werte mit deren Einheiten, Messunsicherheiten und sämtliche relevanten Beobachtungen. Lange Messtabellen aus den Aufzeichnungen im Laborbuch während der Versuchsdurchführung müssen im Bericht nicht reproduziert werden.
- Graphische Darstellungen von Messwerten auf Millimeterpapier (bzw. auf logarithmischem Papier) oder computergestützt erstellt. *Beschriftung der Achsen, Einheiten und Titel der Graphen sollten nicht vergessen werden.*

- Die Versuchsergebnisse sollten hervorgehoben werden.
- Die Berechnung von Ergebnissen muss nachvollziehbar sein.
- Alle dargestellten Daten müssen in die Auswertung eingeflossen sein. „Ausreisser“ können dargestellt werden, müssen aber als solche eindeutig bezeichnet und gekennzeichnet sein.
- Abschätzung der Messunsicherheiten zu jedem Versuchsergebnis, Diskussion der Messunsicherheiten und Quellen von Abweichungen.
- Sollten im Bericht mehrere Experimente/Versuche durchgeführt worden sein, so sind die Ergebnisse jeweils direkt folgend aus das Experiment zu präsentieren. Merke dass ein „geführter Leser“ viel eher den Werten vertraut, und einem Bericht ungleich positiver gegenübersteht, als ein Leser der konstant zwischen theoretischen Grundlagen, Experiment und Ergebnissen herumblättern muss da Inhalte nicht als Einheit geschlossen dargestellt werden.

Was ist(sind) die gemessene Antwort(en) auf die Hauptfrage(n)?

2.1.8 Diskussion und Schlussfolgerung

- Diskussion der Ergebnisse und ihren Bedeutung. Wenn möglich, ist der Messwert mit einem Literaturwert zu vergleichen und Abweichungen zu begründen. Sämtliche Parameter und deren Erwartungswerte sollen nur relativ zur Messunsicherheit diskutiert werden. Eine Abweichung von $2\,\sigma$ zwischen Messwert und Erwartungswert mag noch plausibel sein und kann statistisch interpretiert werden. Hingegen kann eine Abweichung von 5, (relativ zum erwarteten Wert) nicht interpretiert werden.
- Die Schlussfolgerungen stellen meist den letzten und wichtigsten Teil dar.
- Bei der Schlussfolgerung werden keine neuen bzw. weiteren Beobachtungen präsentiert. Schlussfolgerungen nehmen nur auf bereits gezeigtes Bezug.
- Man kann jedoch auf weitere, alternative Messungen oder Messmethoden (im Sinne eines Ausblicks) hinweisen. Hierbei sollte man sich jedoch kurz fassen.

Was ist die Endantwort und soll sie vertraut werden? Wie hätte man den Versuch anders oder besser durchführen können?

2.1.9 Referenzen

BibTeX hilft hierbei viel und vereinheitlicht die Darstellung. Zum Erstellen und Verwalten der Bibliotheken kann man jabref, citeulike oder ähnliche Programme verwenden, welche das Erstellen der bib-Dateien wesentlich erleichtern.

Wer Texte unreferenziert kopiert, oder Bilder, Abbildungen, oder sonstige Daten unreferenziert verwendet, begeht Plagiat!

- Muss ausreichend Information beinhalten, so dass der betreffende Artikel gefunden werden kann.

- In der Physik generell numerisch nach Aufscheinen sortiert, in eckigen Klammern angegeben.
- Die Angabe von Journalartikeln erfolgt meist mittels: Autor(en) normal, der Titel des Journals kursiv, die Nummer des Bandes fett, und Artikel- oder Seitennummer normal, Datum (meist nur Jahr) normal.
- Bei Autorennamen wird der Vorname generell auf die Initialen abgekürzt.
- Bei längeren Autorenlisten nur den Erstautor angeben - die weiteren Autoren werden durch 'et al.' ersetzt.
- Der Name des Journals wird meist abgekürzt. Hierbei einheitlich die gleiche Abkürzung für das gleiche Journal verwenden. Eine Liste für gängige Journalabkürzungen kann man, z.B., dem „Web of Science“ unter „Journal Title Abbreviations“ entnehmen.
- Bei der Seitenanzahl soll, nach Möglichkeit, Start- und Endseite angegeben werden.
- Bei Büchern ist der Titel kursiv, der Verlag normal geschrieben.
- Alle verwendeten Referenzen müssen im Text mindestens einmal erwähnt werden.

Was habe ich von anderen benutzt?

2.1.10 Unterschriften

Wir möchten dass Sie ihre Berichte unterschreiben, um damit anzugeben, dass sie sie selber geschrieben haben. Diese sind am Ende des Haupttextes, sowohl handschriftlich als auch leserlich anzugeben.

2.1.11 Appendix

Im Appendix finden sich zusätzliche Kapitel zu schwierigen Nebenrechnungen, zusätzlichen Auswertungen, Datensätzen und ähnliche Informationen, die zwar für manche Leser wichtig sein mögen, jedoch nicht zwingend in den Haupttext gehören. *Ist ein Appendix wirklich notwendig für den Versuch?*

2.2 Stilistische Details

2.2.1 Allgemeine Stilhinweise

- Der gesamte Bericht sollte klar, logisch strukturiert und eindeutig sein
- Der Bericht sollte ein generelles Thema enthalten, das als roter Faden durch den Text fließt.
- Einheitliche Sprache verwenden - nicht englische und deutsche Begriffe mischen. Englische Begriffe sollen nur dann verwendet werden, wenn es keine passende deutschen Ausdrücke gibt (oder deutsche Entsprechungen viel komplizierter sind).

- Es befinden sich keine Abkürzungen oder Symbole am Beginn eines Satzes aus Gründen der Lesbarkeit
- Unnötige Verweise („wie im vorigen Kapitel diskutiert“) direkt streichen bzw. unterlassen.
- Ein neuer Absatz ist durch eine Einrückung gekennzeichnet.
- Es gibt keine „Ein-Satz-Absätze“.
- Referenzen befinden sich innerhalb des Satzes, nicht nach dem Satzzeichen.
- Seiten müssen nummeriert sein.

2.2.2 Einheiten, Symbole und Zahlen

- Einheiten werden nicht *kursiv* geschrieben.
- *Symbole* für Größen (Variable) sind *kursiv* zu schreiben.
- Alle Symbole müssen im Text eingeführt werden, idealerweise so dass zuerst Grundlegendes erklärt wird, dann eine Formel angegeben und dann die darin vorkommenden Symbole erklärt werden, wobei Symbole nicht mehrfach definiert werden sollten, insbesondere nicht in verschiedener Verwendung!
- Zwischen einer Zahl und der dazugehörigen Einheit sollte sich ein „Half-space“ befinden. Tipp: benutzen Sie das \,-Kommando in TEXoder das LATEX-paket „SIunitx“, welches diese Details automatisiert.
- Der „Verlust“ der Verbindung von Zahl und Einheit bei einem Zeilenumbruch kann mittels $\sim$ in TeX verhindert werden, das erübrigt sich aber bei Verwendung von „SI-unitx“.
- Es ist auf eine signifikante Anzahl von Nachkommastellen zu achten.
- Sinnvolle Zahlendarstellung (10^x wenn notwending, bzw mK, μm, ...)
- In englischsprachigen Texten ist der Punkt als Dezimaltrennung zu verwenden, während in deutschsprachigen Texten das Komma als Dezimaltrennzeichen zu verwenden ist.
- Bei Absolutwerten kleiner als 1 ist vor dem Dezimaltrennzeichen eine 0 anzuführen. „0,35“ ist korrekt, während „ ,35“ falsch ist.
- Messunsicherheiten werden entweder in Klammern oder mittels $\pm$ angegeben. Die in Klammern angegebene Messunsicherheit bezieht sich auf die letzen Stellen des Messwertes, während eine Angabe der Messunsicherheit mittels $\pm$ generell in den angegebenen Einheiten erfolgt. Beispiel: $(70{,}25 \pm 0{,}05)$ cm ist gleichbedeutend mit 70,25(5) cm.
- Allgemein ist auf vernünftige Angabe von Werten und Unsicherheiten zu achten: Wenn der Durchmesser eines Drahtes 7,5 mm ist, mit einer Unsicherheit von 0,101 mm, dann reicht als Angabe 7,5(1) mm völlig aus.

2.2.3 Gleichungen

- Wichtige Gleichungen sollten freigestellt und zentriert sein.
- Alle wichtige Gleichungen sollten nummeriert sein. Die Nummern sind in Klammern (macht TeX automatisch).
- Alle Variablen eingeführt und erklärt.
- Alle Variablen kursiv.
- Indizes (hochgestellt oder niedergestellt) sind aufrecht wenn sie eine Bezeichung sind, jedoch *kursiv*, wenn sie eine Variable sind. Im Beispiel

  $$E_m = g\mu_\mathrm{n}Bm \tag{1}$$

  ist m die z-Komponente des Kernspins und *kursiv* weil sie verschiedene Werte annehmen kann. Hingegen n ist aufrecht, weil es zum Kernmagneton μ_n gehört.
- Eine Gleichung sollte direkt in dem Textfluss eingebaut sein (siehe oben).
- Herleitungen bzw. Beweise sollten sich eher im Anhang oder im Referenz als im Haupttext befinden.
- Als Multiplikationszeichen im Deutsch ist ein $\cdot$ (cdot) und keinen Stern oder vergleichbares zu verwenden. Im Englisch kann man $\times$ (times) verwenden.
- Verweis nach Gleichungen, passiert mittels Nummer in runde Klammern. Beispiel: Gl. (1)

2.2.4 Abbildungen und Tabellen

- Alle Abbildungen und Tabellen in Text referenzieren.
- Alle Tabellen und Abbildung haben einen einfachen Titel, gefolgt von einer erklärenden Bildunterschift in ganzen Sätzen.
- Die Bildunterschriften sollte auf die Legende, alle verwendeten Symbole, die einzelnen Abbildungen usw. Bezug nehmen. Das Bild sollte sich (mit den Vorwissen aus dem Haupttext) rein durch die Bildunterschrift erschlißen.
- Die Bildunterschrift endet mit einem Satzzeichen.
- Es befinden sich keine Absätze in Bildunterschriften.
- In Bildunterschriften findet kein Diskussion oder Schlussfolgerung statt. Es wird lediglich erklärt, was abgebildet ist.
- Bei Abbildungen bestehend aus mehreren Einzelbildern sind diese eindeutig kennzuzeichen, (mit (a), (b), ...). In der Bildunterschrift muss dann auf sämtliche Abbildungen eingegangen werden.
- Man sollte insbesondere auf eine vernünftige Darstellung (Platzbedarf) achten: Tabellen sollten nach Möglichkeit die Breite der Seite nutzen; zwei kleinere (zusammenpassende) Abbildungen Blattbreite-füllend verschmelzen, mit (a) und (b) kennzeichnen.

2.2.5 Graphen

- Alle Achsen mit Symbolen und Einheiten beschriften.
- Fitkurven, zum Vergleich mit der analytischen Vorhersage aus Theorie: Fitparameter, inklusive deren Unsicherheiten sind im Haupttext angegeben.
- Messpunkte nicht miteinander verbinden.
- Bei der graphischen Darstellung von Unsicherheitsbalken (früher „Fehlerbalken“) sollte nur die statistische Unsicherheit angegeben werden. Dieser kann leicht interpretiert und kontrolliert werden (z.B.: sollte grob ein Drittel der Datenpunkte mehr als $1\,\sigma$ (der statistischen Ungenauigkeit) von der Fitkurve entfernt liegen). Nicht-statistische Abweichungen können so nicht interpretiert werden und führen oft zu falschen Schlussfolgerungen aus den graphisch dargestellten Messpunkten.
- Sollten alle nicht-statistischen Abweichungen bei den Messpunkten ungefähr gleich groß sein, so sollten diese nicht in den Graphen dargestellt werden. Sie müssen aber verbal im Text angeführt und diskutiert werden.
- Falls die Unsicherheitsbalken kleiner sind, als die Symbole, welche in der Abbildung verwendet wurden, so ist dies im Bildtext eindeutig zu erwähnen.

3 Auswertung von Messdaten und Abschätzung der Unsicherheiten

Im folgenden Abschnitt werden die Verarbeitung von Messdaten und ihren Unsicherheiten im Bericht erläutert und anhand einiger exemplarischer Beispiele vorgeführt. Ein gut geführter Bericht sollte die Messdaten und ihre Unsicherheiten in der unten beschriebenen Weise enthalten. Messdaten oder hergeleitete Größen ohne Einheiten, Unsicherheiten oder mit unsinnig vielen angegebenen Stellen sind unwissenschaftlich und vermitteln daher nicht unbedingt den Eindruck einer kompetenten Bearbeitung des Praktikumsversuchs.

3.1 Berechnung des Wertes einer Größe aus den Messwerten anderer Größen

Eine Größe ist definiert als das Produkt aus einem Zahlenwert, der Maßzahl, und einer Einheit. Eine bestimmte Größe ändert sich beim übergang zu einer anderen Einheit nicht. So behält z.B. eine 1/4" Schraube ihren Durchmesser, auch wenn man ihn als 6,35 mm angibt. Das Produkt aus dem Zahlenwert und der Einheit ist daher, wie die dazugehörige Größe selbst, gegen Änderung der Einheit invariant.

In einem Versuch geht es oft darum, eine der Messung nicht direkt zugängliche Größe G aus direkt gemessenen Größen zu ermitteln. Dabei ergibt sich G aus unmittelbar Messbaren Größen x, y, z, ...

$$G = f(x, y, z, ...). \tag{2}$$

Die Funktion f stellt eine Rechenvorschrift dar, die jedem Satz von Werten der x, y, z, ... einen eindeutig bestimmten Wert G zuordnet. Dies ist z. B. nicht der Fall wenn für die Größen x, y, z, ... nur deren Zahlenwerte eingesetzt werden. Ändert man nämlich bei einer dieser Größen die Einheit, so ändert sich auch ihr Zahlenwert und damit das Ergebnis für G.

Die Messgrößen x, y, z, ... müssen also stets als Produkte von Zahlenwert und Einheit in Gleichung (2) eingesetzt werden, um ein eindeutiges Ergebnis für G zu erhalten. Die auf diese Weise gebildete Gleichung nennt man Größengleichung. Man behandelt eine Größengleichung vom Typ Gl. (2), indem man auf ihrer rechten Seite zunächst alle Zahlenwerte und alle Einheiten zu jeweils einem Ausdruck zusammenfasst, so, dass sie selbst die Form zweier Produktteile, der eine aus Maßzahlen und der andere aus Einheiten, annimmt. Ausmultiplizieren des ersten Teiles ergibt die Maßzahl von G, ausmultiplizieren und eventuelles Kürzen des zweiten Teiles die Einheit. Dabei ist es erlaubt die Einheiten von x, y, z, ... durch andere zu ersetzen, wenn gleichzeitig ihre Maßzahlen entsprechend geändert werden. Folgendes Beispiel soll das Verfahren illustrieren: Aus dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz erhält man die Viskosität η einer Flüssigkeit die aus einem Rohr durch eine Kapillare ausströmt aus folgender Größengleichung:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho\, g\, t}{8lA \ln\left(\frac{h_0 - h_\infty}{h_t - h_\infty}\right)}. \tag{3}$$

Es wurden folgende Größen durch unmittelbare Messung bestimmt:
Radius der Kapillare: $r = 430\,\mu\mathrm{m}$
Länge der Kapillare: $l = 237\,\mathrm{mm}$
Querschnitt des senkrechten Rohres: $A = 3{,}53\,\mathrm{cm}^2$
Dichte der Flüssigkeit $\rho = 0{,}7914\,\mathrm{g/cm}^3$ (aus Tabelle)

Erdfeldbeschleunigung: $g = 9{,}80744\,\mathrm{m/s^2}$ (aus Tabelle)
Zeitdauer des Ausströmens: $t = 20\,\mathrm{min}\ 45\,\mathrm{s}$
Höhe des Flüssigkeitsspiegels im Rohr zu Beginn des Ausströmens: $h_0 = 298\,\mathrm{mm}$,
nach Ablauf der Zeit t: $h_t = 34\,\mathrm{mm}$,
Grenzwert für $t \to \infty$: $h_\infty = 13\,\mathrm{mm}$

Zur Berechnung von η wird nun zunächst jede Größe als Produkt von Maßzahl und Einheit in Gl. 3 eingesetzt.

$$\eta = \frac{\pi(430\,\mathrm{\mu m})^4 \cdot 0{,}7914\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 9{,}807\,44\,\mathrm{m/s^2} \cdot (20\,\mathrm{min}\ 45\,\mathrm{s})}{8 \cdot 237\,\mathrm{mm} \cdot 3{,}53\,\mathrm{cm^2} \ln\left(\frac{298\,\mathrm{mm}-13\,\mathrm{mm}}{34\,\mathrm{mm}-13\,\mathrm{mm}}\right)}. \tag{4}$$

Bei der Umformung sind nun folgende Regeln zu beachten:

- Größen gleicher Art dürfen addiert und subtrahiert werden, Größen ungleicher Art nicht. Aus Summen und Differenzen von Größen kann die gleiche Einheit ausgeklammert werden.
- Größen dürfen unbeschränkt miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert werden. In Produkten aus mehreren Größen ist die Reihenfolge der Maßzahlen und Einheiten beliebig.
- die n-te Wurzel (n ganzzahlig) kann nur aus einer Größe gezogen werden, die selbst die n-te Potenz einer anderen Größe ist.
- Ein Ausdruck der als Ganzes die unabhängige Variable einer transzendenten Funktion (z.B. Sinus, Exponentialfunktion, Logarithmus etc.) bildet, muss dimensionslos sein.

Nachdem der Logarithmus in Gl. (4) gemäß dem letzten Punkt behandelt wurde kann man t ganz in Sekunden ausdrücken, $20\,\mathrm{min}\ 45\,\mathrm{s} = 20 \times 60 + 45\mathrm{s} = 1245\,\mathrm{s}$. Dann kann man die Einheit s kürzen und den Rest der Einheiten in den SI-Basiseinheiten kg und m ausdrücken ($1\,\mathrm{g} = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{\mu m} = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, etc.) und die Zahlenfaktoren entsprechend anpassen (z.B. $430\,\mathrm{\mu m} = 4{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$).

Nach der Zusammenfassung aller Zahlen und Einheiten nimmt Gl. 4 folgende Gestalt an:

$$\eta = 5{,}95 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} = 5{,}95 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa\,s}. \tag{5}$$

Warum man die Angabe des Ergebnisses auf drei Stellen beschränkt wird später aus der Betrachtung der Messunsicherheit begründet.

3.2 Unsicherheiten bei Messungen

Da ein reales Messverfahren niemals vollkommen sein kann, *hat jede Messung eine Unsicherheit*, das heißt der Messwert muss nicht notwendig mit dem wahren Wert übereinstimmen. In der Praxis eines Forschungs- oder Industrielabors bedeutet dies oft, dass die Abschätzung der Unsicherheit genau so wichtig wird wie die Bestimmung des Messwerts selbst. Diese Unsicherheit bestimmt die Toleranzen eines Produktes oder die Genauigkeit, mit der ein theoretisches Modell bestätigt oder zurückgewiesen werden kann. Ein Messwert ohne

Angabe der Unsicherheit ist für solche Zwecke wertlos. Für das Praktikum, das auf den späteren Alltag in Forschung oder Industrie vorbereiten soll, bedeutet dies, *dass alle gemessenen Werte auch mit einer Angabe der Unsicherheit im Bericht verzeichnet werden.* Die Unsicherheit von Größen, die aus gemessenen Werten abgeleitet sind, wird durch die Berechnung der Fortpflanzung der Messunsicherheiten berechnet. Im Folgenden werden zunächst die Unsicherheiten bei Messungen etwas genauer besprochen und dann einige Grundbegriffe der Statistik und der Berechnung von Unsicherheiten eingeführt, die bei der Umrechnung von gemessenen Werten hin zum Endergebnis des Experiments wichtig sind.

Die Abweichungen, die bei Messungen auftreten, werden in zwei Klassen eingeteilt: *systematische Abweichungen* und *statistische (zufällige) Abweichungen.* Beide tragen zur Messunsicherheit bei.

Systematische Abweichungen kommen durch nichtperfekte Messapparaturen zustande. Beispiele sind nicht bekannte Zuleitungswiderstände in elektronischen Versuchen, verstellte Kalibrierungen, Totzeiten von Messgeräten, aber auch menschliche Fehler wie das falsche Umrechnen von Skalen. Alle systematischen Abweichungen haben gemeinsam, dass sie die gemessenen Werte nicht zufällig schwanken lassen, sondern ihn immer in einer durch die Art der Abweichung vorgegeben Weise beeinflussen (Beispielsweise wird Vernachlsigung des Zuleitungswiderstands immer dazu führen, dass eine Spannungsmessung über einem elektronischen Bauteil zu hoch ausfällt). Systematische Abweichungen können daher nicht durch Mittelung oder andere Methoden der Schwankungsunterdrückung beseitigt werden. Die einzige Möglichkeit ihren Einfluss auf das Experiment klein zu halten, ist sie von vornherein durch geschickte Versuchsanordnungen und Sorgfalt zu vermeiden. Versteckte systematische Abweichungen können auch durch mehrfache Bestimmung derselben Größe mit verschiedenen experimentellen Anordnungen aufgespürt werden. Dennoch gibt es kein allgemeines Verfahren, sie vollständig auszuräumen.

Statistische Unsicherheiten ergeben sich durch zufällige Schwankungen innerhalb des Experiments. Dazu gehören unter anderem Schwankungen von Temperatur oder Druck, Rauschen von Spannungen oder Strömen, oder das zufällige Springen der letzten Stelle einer Digitalanzeige. Auch die Unsicherheit der Experimentatoren beim Ablesen von Skalen wie z.B. die der Schiebelehre gehört dazu. Im Gegensatz zu systematischen Unsicherheiten kann man die Verteilung statistischer Unsicherheiten durch Wiederholung des Experiments ermitteln und die Unsicherheit selbst, z.B. durch Mittelung, fast beliebig klein machen. Eine weitere Mittelung wird dann sinnlos, wenn die geschätzten systematischen Unsicherheiten schon deutlich größer sind als die statistischen. In der Praxis wird man also höchstens so lange mitteln, bis beide Arten von Unsicherheiten etwa gleich große Beiträge zur Gesamtunsicherheit liefern.

3.3 Einige Grundbegriffe der Statistik

Die folgende Zusammenstellung enthält nur für das Praktikum nötige und relevante Begriffe. Ihre Einführung erfolgt absichtlich ohne große mathematische Strenge. Falls dies nicht genügend erscheint, kann die im Literaturteil angegebene Spezialliteratur zum Thema zu Rate gezogen werden. Insbesonderes sind die Bücher T.G.Hughes and T.P.A. Hase, **Measurements and their uncertainties** und Eichler, Kronfeldt und Sahm, **Das Neue Physikalische Grundpraktikum** zu empfehlen.

Abbildung 1: Beispiel einer Verteilung der gemessen Werte x_i um x_r

3.3.1 Verteilung von Messwerten

Zufällige Abweichungen von Messwerten haben ihre Ursache darin, dass während der Messung, auch bei konstant gehaltenen Bedingungen, unbeeinflussbare Schwankungen des Zustandes von Messobjekt, Messapparatur und Beobachter auftreten. Nur ein ideales Experiment würde für jede vorgenommene Messung denselben Messwert ergeben. In der Realität erhält man für mehrere Messungen ein und derselben Größe X unterschiedliche Werte x_i, i =1,2,...,n. In dieser sogenannten *Verteilung* von Messwerten kann man typischerweise feststellen, dass die Ergebnisse sich in der Umgebung eines Wertes x_r häufen. Große Abweichungen von dieser Häufungsstelle kommen viel seltener vor als kleine (siehe Abb. 1).

Von der Größe X seien nun n Messungen gemacht worden. Um die Statistik der Messwerte zu analysieren, betrachten wir Intervalle der Messgröße X $[x_k, x_k + \Delta x]$, die den gesamten Bereich der möglichen Messwerte abdecken. Die Anzahl der Ergebnisse, die im k-ten Intervall sind, nennen wir n_k. Die Summe über die Anzahl in allen Intervallen muss also wieder die Anzahl der Messungen liefern: $\sum_k \Delta n_k = n$. Je mehr nun gemessen wird, desto öfter fällt ein Ergebnis in ein solches Intervall. Für den Limes n gegen Unendlich nähert sich n_k/n der Wahrscheinlichkeit $w_k = w(x_k)$, einen Messwert im k-ten Intervall zu erhalten. Die Funktion $dw(x)/dx$ gibt die statistische Verteilung der Messwerte an, d.h. wie dicht sie wahrscheinlich an jeder Stelle x des Messbereichs liegen werden. Ein typischer Fall ist die Gauß- oder Normalverteilung, die durch die Funktion

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x - x_r)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

gegeben ist. Sie ist in Abb. 2 bildlich dargestellt.

Es wird in den Grundpraktika zur Vereinfachung meistens angenommen, dass die Messwerte normalverteilt sind, obwohl dies nicht unbedingt genau der Wahrheit entspricht. Wenn die Messung mit keiner systematischen Abweichung behaftet ist, dann stimmt der durch die maximale Messwertdichte definierte Wert x_r mit dem wirklichen Wert der Größe X überein. Andernfalls ist er gegenüber diesem um die systematische Abweichung verschoben.

Der Parameter σ, der nach Abb. 2 ein Maß für die „Breite“ der Gaußverteilung ist, heißt Standardabweichung, sein Quadrat σ^2 ist die Varianz. Diese Größe bietet sich als Maß für

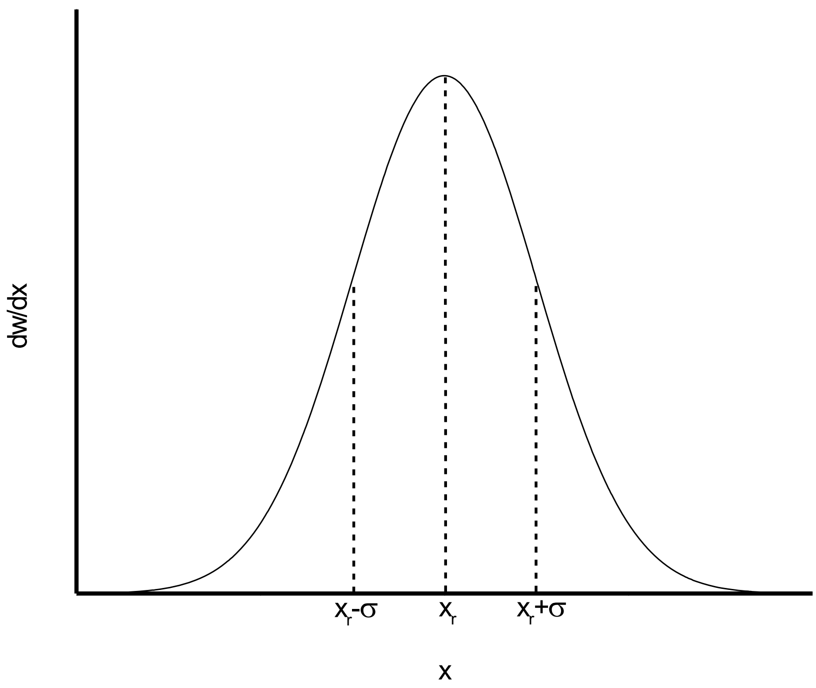

Abbildung 2: Graphische Darstellung der Gaußverteilung mit (voller) Breite 2σ.

die mittlere Abweichung Δx vom wahren Wert x_r an. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert zwischen $x_r - \sigma$ und $x_r + \sigma$ liegt, beträgt 68,3 %. Es wäre natürlich wünschenswert, ein Intervall endlicher Breite anzugeben, in dem sich jeder mögliche Messwert mit Sicherheit befindet. Diesen gibt es jedoch strenggenommen nicht, da die durch Gl. (6) definierte Funktion erst im Unendlichen verschwindet. Allerdings wächst die Wahrscheinlichkeit bei Erweiterung des Intervalls bis zu den Grenzen $x_r - 3\sigma$ und $x_r + 3\sigma$ auf 99,7 % an. Wenn also die Angabe einer „größten Abweichung“ vorliegt (z.B. bei käuflichen Messinstrumenten, siehe Abschnitt 3.4), so sollte man diesen als dreifache Standardabweichung interpretieren. Die Kenntnis von σ ist für jede wissenschaftliche Messung von Vorteil, da man damit zu jeder vorgegebenen Wahrscheinlichkeit ein „Vertrauensintervall“ angeben kann.

Zur experimentellen Bestimmung von x_r und σ liegt es nahe, die Größe X sehr oft zu messen und die Ergebnisse in ein Diagramm wie Abb. 2 einzutragen. Aus diesem kann man erkennen, ob die Messwerte normalverteilt sind oder einer anderen Verteilung genügen. Eine solche Ermittlung der Verteilung ist mit sehr großem Aufwand verbunden und wird daher nur selten unternommen. Wenn man aber, wie meistens im Rahmen des Praktikums, annehmen darf, dass die Verteilung die Gaußsche Form besitzt, kommt man mit einer relativ kleinen Zahl (Größenordnung 10) von Messungen aus. Es gibt einen mathematischen Satz, der besagt, dass bei Vorliegen einer Gauß-Verteilung der wirkliche Wert x_r durch das *arithmetische Mittel der Messwerte*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{7}$$

und die Standardabweichung σ_X durch die sogenannte *empirische Standardabweichung*

$$\sigma_X = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2} \tag{8}$$

bestmöglich angenähert werden. Die Güte der Annäherung nimmt mit wachsendem n zu und kann für niedrige n ziemlich schlecht ausfallen. Während es für x_r keine andere Möglichkeit als die Bestimmung eines Bestwertes aus den eigenen Messergebnissen gibt, ist die Standardabweichung σ oft für das gewählte Messverfahren bekannt, z.B. durch die erwöhnte σ oder 3σ Angabe des Herstellers für das verwendete Messinstrument.

Macht man n Messungen mit bekannter Standardabweichung σ_X der Einzelmessung, so ist die Standardabweichung des Mittelwerts gegeben durch

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Die statistische Präzision der Schätzung des wahren Wertes bzw. die relative Genauigkeit wird also mit der Anzahl der Messungen besser, allerdings nur mit der Wurzel aus der Anzahl der Einzelmessungen. Um die Präzision um den Faktor zehn – also eine Stelle – zu verbessern, muss man also hundert mal so viele Messungen machen! Bei der Bestimmung der nötigen Anzahl an Wiederholungen sollten auch die systematischen Abweichungen berücksichtigt werden. Es nützt nichts immer präzisere, aber dennoch systematisch abweichende Messergebnisse zu produzieren.

Wie im einführenden Abschnitt erwähnt, besteht im Praktikum oft die Möglichkeit die gefundenen Ergebnisse mit Literaturwerten zu vergleichen. Literaturwerte sind ebenfalls nur Messwerte, die aber in der Regel mit langwierigeren, sorgfältigeren und aufwendigeren Methoden gewonnen wurden, als dies das Praktikum zulässt und daher eine vergleichsweise kleine Unsicherheit haben können. Nicht selten wird der eigene Wert nicht in der 1σ-Umgebung des Literaturwertes liegen, da nach der Theorie rund ein Drittel aller Messwerte außerhalb dieser Umgebung liegen sollten. Erst die Anwendung des 3σ-Kriteriums gestattet es, mit „an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit“ auf das Vorliegen einer systematischen Abweichung zu schließen.

3.4 Abschätzung der Unsicherheiten typischer Messgeräte

In der alltäglichen Praxis ist eine Bestimmung der Unsicherheit durch zahlreiche Wiederholungen derselben Messung die seltene Ausnahme. Normalerweise misst man eine Größe nach sorgfältiger Vorbereitung und Erlernen der nötigen Experimentiertechniken nur einmal, wobei die Standardabweichung bekannt ist oder geschätzt wird. Wie dies im Einzelnen vor sich geht, soll am Beispiel einiger typischer im Praktikum vorkommender Messgeräte erläutert werden.

3.4.1 Ableseunsicherheit von Maßstäben und Skalen

Maßstäbe und Skalen sind z.B. auf Zollstöcken, Metermaßen, Bandmaßen, aber auch Thermometern, Barometern und Zeigerinstrumenten. Die Unsicherheiten von Maßstäben und Skalen ergeben sich unmittelbar aus der minimalen an der Skala ablesbaren Unterteilung, z.B. am Nonius einer Schiebelehre. Systematische Ableseabweichungen wie z.B. Ablesen unter einem Blickwinkel der nicht senkrecht zur Maßstabsebene liegt (Parallaxe) sind nach Möglichkeit, z.B. durch Benutzung einer Spiegelskala, zu vermeiden. Weiterhin ist zu beachten, dass dies lediglich die Unsicherheit aufgrund der Ablesung ist. Die Unsicherheit hängt auch von den Eigenschaften des Messgeräts selbst ab (z.B. bei analogem Voltmeter), daher immer auf Unsicherheits-Angaben an den Geräten selbst (z.B. auf dem Boden des Geräts) achten. Bei Unklarheiten oder fehlender Angabe den Betreuer nach der Gerätespezifikation fragen. Wichtig ist, dass sowohl eine Unterschätzung als auch eine Überschätzung der Messunsicherheit problematisch sind. Eine Überschätzung von Geräte- oder Ableseunsicherheit überdeckt im weiteren oft systematische Unsicherheiten.

3.4.2 Längen- und Winkelmessung

Längen- bzw. Winkelmessungen sind Spezialfälle der Skalenablesung. Zu beachten ist dabei, dass sich die Länge (der Winkel) aus der Differenz zweier Ablesungen mit je einer Standardabweichung von σ ergibt (z.B. Anlegen am Nullpunkt und Ablesen). Durch Anwendung des im folgenden Abschnitt 3.5 behandelten Gesetzes über Fortpflanzung von Messunsicherheiten erhält man für Differenzmessungen eine Gesamtstandardabweichung σ_g von

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} = \sqrt{2}\sigma. \tag{10}$$

3.4.3 Zeitmessung

Abweichungen in der Ganggenauigkeit und bei der Ablesung von Stoppuhren kann man in der Regel gegen die bei der Bedienung auftretenden Streuung im Start- und Stoppvorgang vernachlässigen. Nach den Erfahrungen aus Sportwettkämpfen liegt die Standardabweichung eines geübten Bedieners bei etwa 3 Hundertstelsekunden. Im Praktikum soll zur Abschätzung der Unsicherheit eine Kontrollmessung durchgeführt werden. Dies kann entweder durch zwei- oder mehrfaches Wiederholen des Versuchsvorgangs erfolgen oder dadurch, dass beide Mitglieder einer Praktikantengruppe gleichzeitig stoppen. Die sich ergebende Abweichung soll dann als Standardabweichung genommen werden.

3.4.4 Wägung

Beim Arbeiten mit geschlossenen automatischen Waagen muss man sich darauf verlassen, dass die systematischem Abweichungen durch regelmäßige Wartung beseitigt wurden. Die Standardabweichung für die zufälligen Schwankungen der Anzeige ist in der Regel angegeben. Es ist darauf zu achten, dass der Nullpunkt während der Wägung nicht wandert.

3.4.5 Digitale Geräte

Die Messunsicherheit von Geräten mit digitalen Anzeigen ist häufig als Kombination einer relativen Unsicherheit (in Prozent des Messwerts oder Prozent des Messbereichs) mit einer Unsicherheit der Digitalsierung (in ganzen Stellen oder „Counts“, also einer Anzahl von Schritten der betroffenen Stelle) angegeben.

3.4.6 Ganzzahlige Größen

Ganzzahlige Größen werden meist durch Abzählen bestimmt, z.B. die Zahl von Beugungsordnungen eines Beugungsbildes. Solche Größen haben keine statistischen Unsicherheiten.

3.5 Einige Grundbegriffe der Berechnung von Unsicherheiten

Bisher wurde besprochen, wie die Standardabweichungen der gemessenen Größen X, Y, Z,... gewonnen werden. Um nun aber der nach Gleichung (2) berechneten Größe G eine Unsicherheit ΔG zuzuordnen, muss man wissen, wie die Unsicherheiten der unmittelbar gemessenen Größen sich auf G fortpflanzen. Dieser Zusammenhang wird durch das Fortpflanzungsgesetz von Gauß beschrieben.

Nun seien ΔX, ΔY, ΔZ, ... die Standardabweichungen der unmittelbar gemessenen Größen. Am einfachsten wäre es, durch einsetzen von $X \pm \Delta X$, $Y \pm \Delta Y$, $Z \pm \Delta Z$,... in Gl. (2) eine obere und eine untere Grenze $G \pm \Delta G$ von G zu berechnen. Das sich so ergebende ΔG ist allerdings größer als die Standardabweichung von G, da zu seiner Berechnung angenommen wurde, dass alle Abweichungen in die gleiche Richtung wirken. Das ist aber nicht der Fall, wenn die X, Y, Z,... alle unabhängig voneinander gemessen wurden, weil dann auch die Vorzeichen in den zur Berechnung von $G \pm \Delta G$ verwendeten Werten $X \pm \Delta X$, $Y \pm \Delta Y$, $Z \pm \Delta Z$,... statistisch verteilt sein müssen, was einen teilweisen gegenseitigen Ausgleich der Abweichungen bewirkt. Dies ist in dem Fortpflanzungsgesetz von Gauß berücksichtigt, das dementsprechend die richtige Standardabweichung von G liefert:

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\Delta X\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta Z\right)^2 + ...} \tag{11}$$

Die Näherung ist um so besser, je kleiner die Beträge der Abweichungen ΔX, ΔY, ΔZ,... sind. Einfache aber wichtige Spezialfälle sind die Funktionen $X+Y$, $X-Y$, XY und X/Y. Für sie ergibt die Anwendung von Gl. (11):

$$\Delta(X \pm Y) = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} \tag{12}$$

$$\frac{\Delta(XY)}{XY} = \frac{\Delta(X/Y)}{X/Y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2}. \tag{13}$$

Der Ausdruck $\frac{\Delta X}{X}$ ist die relative Abweichung oder Unsicherheit der Größe X.

Bei Summen und Differenzen addieren sich also die Quadrate der *absoluten* Unsicherheiten, bei Produkten und Quotienten die der *relativen* Unsicherheiten.

Gleichung (13) lässt sich noch für den Fall verallgemeinern, dass G ein Potenzprodukt der unabhängig voneinander gemessenen X, Y, Z,... ist:

$$G = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \; ..., \tag{14}$$

mit α, β, γ, ... beliebig reell

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(\alpha\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 + ...} \tag{15}$$

Eine schematische Anwendung von Gl. (11) kann zu sehr umfangreichen Ausdrücken führen, weil bei jeder partiellen Differentiation der nicht betroffene Teil mitgeschleppt werden muss. Bei Gln. (13) und (15) wurde dieser Teil durch Division der absoluten Abweichung durch die Größe G selbst beseitigt. Diese Methode lässt sich oft auch dann noch mit Erfolg anwenden, wenn G nur teilweise ein Potenzprodukt der Messgrößen ist wie im angegebenen Beispiel Gl. (3). Man geht dann bei der Berechnung der Unsicherheit von G schrittweise vor, d.h. man berechnet zunächst die Unsicherheiten von Teilen von f, die selbst Funktionen der X, Y, Z,... sind, nach Gl. (11) und betrachtet sie dann als neue Variable. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis sich ΔG aus einer genügend einfachen Funktion der neuen Variablen und der verbleibenden alten ergibt. Das Verfahren ist nichts anderes als eine Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung. Man muss allerdings darauf achten, dass die zuletzt vorhandenen Variablen alle voneinander unabhängig sind.

Bei der Berechnung der Unsicherheit $\Delta\eta$ der Viskosität η für das angegebene Beispiel Gl. (3) kann man z.B. mit dem Bruch $\ln[(h_0 - h_\infty)/(h_t - h_\infty)]$ beginnen. Zähler und Nenner kommen nicht als neue Variable in Frage, da beide h_∞ enthalten und daher nicht voneinander unabhängig sind. Man kann aber den Logarithmus als Ganzes als neue Variable u betrachten

$$u = \ln \frac{(h_0 - h_\infty)/\mathrm{mm}}{(h_t - h_\infty)/\mathrm{mm}} = \ln \frac{(h_0 - h_\infty)}{\mathrm{mm}} - \ln \frac{(h_t - h_\infty)}{\mathrm{mm}}. \tag{16}$$

Mit $\partial \ln x / \partial x = 1/x$ ergibt sich

$$\Delta u = \left[\left(\frac{\Delta h_0}{(h_0 - h_\infty)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta h_t}{(h_t - h_\infty)} \right)^2 + \left(\frac{-1}{(h_0 - h_\infty)} - \frac{-1}{(h_t - h_\infty)} \right)^2 (\Delta h_\infty)^2 . \right]^{1/2} \tag{17}$$

Mit Einführung von u geht Gl.(3) in ein Potenzprodukt mit unabhängigen Variablen über, daher gilt

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \left[\left(4\frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{u} \right)^2 \right]^{1/2} . \tag{18}$$

Zur Berechnung von $\Delta\eta$ nach Gl.(18) entnimmt man die Unsicherheiten der Einzelgrößen dem Laborbuch. Der Radius r der Kapillare sei mit dem Okularmikrometer eines Mikroskops gemessen worden, dessen mittlere statistische Unsicherheit 0,5 µm betrage. Die Länge l der Kapillare lässt sich wegen der Ein- und Auslaufdüse schlecht messen, bei vorsichtiger Schätzung ergebe sich eine Standardabweichung von 0,7 mm. Der Querschnitt A des Vorratsrohres werde aus dessen Durchmesser d nach $A = \pi d^2/4$ berechnet, also $\Delta A/A = 2\Delta d/d$. Der mit der Schublehre erhaltene Wert $d = 21{,}20\,\mathrm{mm}$ sei mit der Standardunsicherheit von 0,03 mm behaftet, sodass $\Delta A/A = 3 \times 10^{-3}$ ist. Die Dichte ρ der Flüssigkeit ist im „Handbook of Chemistry and Physics“ für 20 °C mit 0,7914 g/cm^3 ohne Unsicherheit angegeben. Wenn man annimmt, dass die letzte Dezimalstelle noch richtig ist, so kann die Unsicherheit nicht größer als 0,0005 g/cm^3 sein. Im Experiment muss aber damit gerechnet werden, dass die Temperatur um ±1 K um den Sollwert von 20 °C schwankt, woraus sich aufgrund des thermischen Ausdehnungskoeffizienten der strömenden Flüssigkeit eine Schwankung von ±0,0008 g/cm^3 (Standardabweichung) in deren Dichte ergibt. Die Erdfeldbeschleunigung hat in Innsbruck laut „Kohlrausch“ den Wert 9,8074 m/s^2. Diese Angabe ist so genau, dass die Unsicherheit dafür vernachlässigt werden kann. Das Stoppen der Zeit t für das Erreichen der Höhe h_t im Vorratsrohr ist etwas unsicher, da das Absinken der Flüssigkeit mit abnehmender Höhe immer langsamer vonstatten geht. Aus einer Kontrollmessung kann man die Standardunsicherheit von t auf 10 s schätzen. Die Unsicherheit in der Höhenablesung sei maximal 1 mm, so dass h_0, h_t und h_∞ mit der Standardunsicherheit 0,3 mm behaftet sind. Daraus wird der letzte Beitrag ermittelt: $u = 0,07654$ und $\Delta u = 0,00155$. Die einzelnen Unsicherheiten setzen sich also zu folgendem Ausdruck zusammen (Beiträge gerundet):

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \left[(0,5\ \%)^2 + (0,1\ \%)^2 + (0,8\ \%)^2 + (0,3\ \%)^2 + (0,3\ \%)^2 + (2,0\ \%)^2\right]^{1/2}. \tag{19}$$

Den relativ kleine Beitrag 0,1 % von der Dichte kann man vernachlässigen und erhält das Ergebnis 3,9 %. In der endgültigen Angabe des Messergebnisses wird dessen Stellenzahl so beschränkt, dass die letzte Stelle mit der letzten Stelle der Angabe der Unsicherheit übereinstimmt:

$$\eta = (5{,}95 \pm 0{,}22) \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa\,s}. \tag{20}$$

3.6 Anpassung von Funktionen an Messwerte

Im Abschnitt 3.3.1 wurde gezeigt, dass man den wahren Wert x_r einer festen Größe X durch mehrmalige Messung derselben und Mittelwertbildung über die streuenden Messwerte x_i annähern kann (Gl.(7)). Ebenso ist es möglich, den zwischen einer variablen Größe X und einer von ihr abhängigen Größe Y bestehenden funktionalen Zusammenhang $Y = f(X)$ aus n gemessenen Wertepaaren (x_i, y_i) optimal zu bestimmen.

Bei der praktischen Lösung dieser Aufgabe muss zunächst die Art der Funktion f bekannt sein, z.B. eine Exponentialfunktion. Sie ergibt sich aus der Theorie des betreffenden Experiments. Um die Richtigkeit dieser Theorie zu verifizieren, ist es naheliegend, als erstes die Messwerte y_i gegen die x_i aufzutragen und zu schauen, durch welche Kurve sie sich verbinden lassen. Der damit gewonnene qualitative Eindruck lässt sich oft durch eine geeignete, z.B. logarithmische, Darstellung der Messgrößen, welche die Kurve in eine Gerade überführt, quantitativ bestätigen. Ob die so aufgetragenen Messpunkte wirklich auf einer Geraden liegen, kann leicht durch Anlegen eines Lineals festgestellt werden.

Das Verfahren zur Auswertung einer solchen Messreihe werde wieder an einem Beispiel demonstriert. Die Messung des Widerstands R eines NTC-Thermistors in Abhängigkeit von der Temperatur T hat folgende Werte ergeben:

T/°C	1,4	8,1	11,4	17,3	25,7	31,2	39,0	44,3	54,7	61,2	69,7
R/kΩ	12,79	8,81	8,24	6,63	5,27	3,58	3,03	2,38	1,72	1,21	0,987

T/°C	81,0	88,5	99,6
R/kΩ	0,718	0,626	0,491

Die Temperaturschwankungen während jeder Messung seien durch die Standardabweichung ΔT= 1,1 K charakterisiert. Für die Widerstandsmessung mit einer Wheatstone-Brücke ist die relative Unsicherheit konstant, sie habe hier den Wert $\Delta R/R$=7.3 % (beide zur Illustration starküberhöht). Der Widerstand eines NTC-Thermistors genügt nach der Theorie der Gleichung

$$R(T) = R_0 \exp\left[B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right], \tag{21}$$

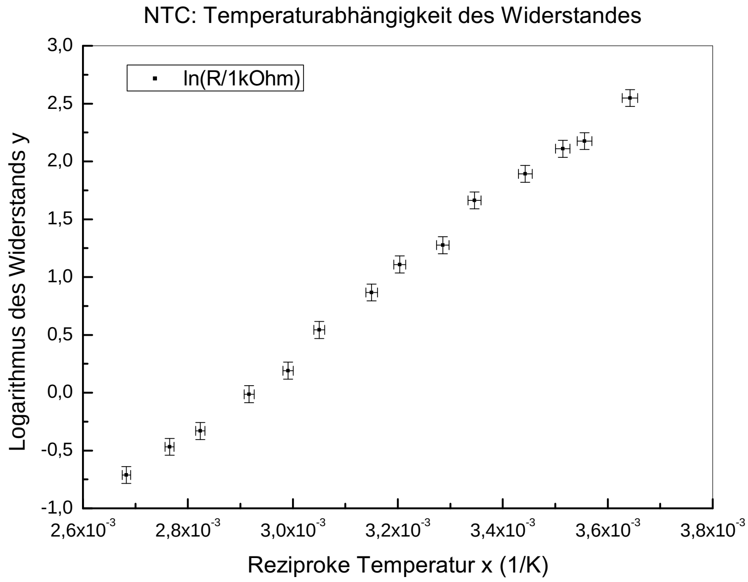

Abbildung 3: Auftragung der Messpunkte des NTC Thermistors mit Unsicherheitsbalken. Man erkennt, dass die Messpunkte in guter Näherung auf einer Geraden liegen.

wobei T eine variable absolute Temperatur und T_0 eine feste absolute Temperatur (z.B. Fixpunkt) ist. B ist eine Materialkonstante und R_0 ist der Widerstand bei der Temperatur T_0.

Durch Logarithmieren von Gl.(21) ergibt sich:

$$\ln(R/k\Omega) = \ln(R_0/k\Omega) + B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right). \tag{22}$$

Aus Gl.(22) erkennt man, dass $y = \ln(R/k\Omega)$ eine lineare Funktion der Form

$$y = a + bx, \tag{23}$$

mit $x = 1/T$, der Steigung $b = B$ und dem Ordinatenabschnitt $a = \ln(R_0/k\Omega) - B/T_0$ ist. In Abb. **??** wurden dementsprechend die $n = 14$ aus den Werten der Tabelle berechneten Messpunkte y_i und x_i gegeneinander aufgetragen. Man erkennt rein visuell, dass diese Messpunkte statistisch um eine Gerade verteilt sind.

Zur genaueren Prüfung ist es notwendig, auch die Standardabweichung der x_i und y_i als waagrechte bzw. senkrechte Striche (=„Unsicherheitskreuze“) mit einzuzeichnen. Im Beispiel ergeben sie sich aus den unmittelbaren Abweichungen folgendermaßen nach dem Fortpflanzungsgesetz:

$$\Delta x = \left|\frac{dx}{dT}\Delta T\right| = \left|\frac{d(1/T)}{dT}\Delta T\right| = \frac{\Delta T}{T^2}, \tag{24}$$

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dR}\Delta R\right| = \left|\frac{d\ln(R/k\Omega)}{dR}\Delta R\right| = \frac{\Delta R}{R}, \tag{25}$$

indem man für die einzelnen Messpunkte die Abweichungen berechnet

$$\Delta x_i = \frac{\Delta T}{T_i^2} \text{ und } \Delta y_i = \frac{\Delta R_i}{R_i},$$

mit $\Delta T = 1{,}1$ K und $\Delta R_i/R_i = 7.3$ % wie oben angeführt für alle n Messpunkte. Es lässt sich eine Gerade (Ausgleichsgerade) finden die durch mindestens zwei Drittel der „Unsicherheitskreuze“ hindurchgeht. Gemäß der Bedeutung der Standardabweichung, dass 68 % der Messwerte innerhalb der durch sie definierten Grenzen liegen, ist damit der lineare Zusammenhang von x und y statistisch gesichert. Würden sich mehr als ein Drittel der Unsicherheitskreuze außerhalb der Geraden befinden, so wäre daraus nicht unbedingt auf eine systematische Abweichung von der Linearität zu schließen. Es könnte z.B. auch dadurch begründet sein, dass die Unsicherheiten zu klein geschätzt wurden. Die Entscheidung, welcher Fall vorliegt, kann am besten durch kritische Betrachtung der graphischen Darstellung getroffen werden. Die Ausgleichsgerade kann man dann graphisch finden, allerdings gibt es inzwischen viele Arten von Software, welche diese sogenannte lineare Regression gut ausführt. Dabei ist es aber generell sehr wichtig zu wissen, welcher Algorithmus mit welchen Annahmen eingesetzt wird, ansonsten können leicht völlig falsche Lösungen entstehen. Für das bessere Verständnis wollen wir uns am obigen Beispiel die numerische Lösung ansehen.

Wir versuchen also eine Gerade der Form von Gl. 23 zu finden, welche die Messwerte x_i und y_i annähert, wobei $i = 1, \ldots, n$. Das Ergebnis dieser Prozedur sind Werte für die Steigung a und den Achsenabschnitt b, also eine Beschreibung für den Thermistor. Dabei ist wichtig, dass wir auch Abschätzungen für die Unsicherheiten der errechneten Parameter bekommen. Viele Programme (z.B. Excel) können zwar die Parameter liefern, jedoch nicht deren Unsicherheiten.

Die Ausgleichsgerade können wir auch als

$$a + bx - y = 0 \tag{26}$$

schreiben. Für die gemessenen Paare (x_i, y_i) wird diese Gleichung jedoch nicht exakt gelten, sondern man findet eine Abweichung ϵ_i gemäß

$$a + bx_i - y_i = \epsilon_i, \tag{27}$$

deren Interpretation aus Abb. 4 ersichtlich ist.

Aus allgemeinen Überlegungen, die den Rahmen dieses Skriptums übersteigen und unter Annahme einer Normalverteilung findet man, dass der Ausgleich durch Minimierung des folgenden Ausdrucks erfolgen soll:

$$[\epsilon^2] = \sum_{i=1}^{n} \epsilon^2 = [(a + bx - y)^2] \tag{28}$$

Das ist das Prinzip der kleinsten Quadrate. Die eckigen Klammern sind eine von C. F. Gauß eingeführte Kurzschreibweise für die Summe über alle Werte der Messreihe. Man differenziert also diesen Ausdruck nach den Parametern a und b und setzt die Ableitungen gleich null.

$$\frac{\partial[\epsilon^2]}{\partial a} = [2a + 2bx + 2y] = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial[\epsilon^2]}{\partial b} = [2bx^2 + 2ax + 2xy] = 0, \text{ bzw.} \tag{30}$$

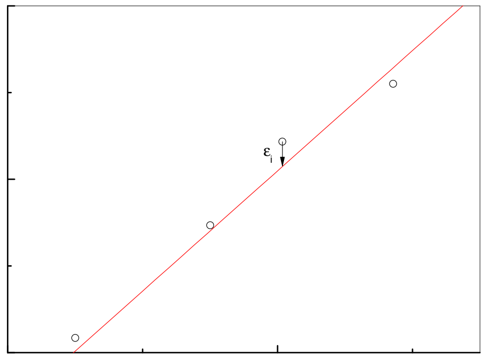

Abbildung 4: Ausschnitt aus Abb. 3 mit Abweichung ϵ_i eines Messpunktes von der Ausgleichsgeraden.

$$na + b[x] + [y] = 0 \tag{31}$$

$$b[x^2] + a[x] + [xy] = 0 \tag{32}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich leicht auflösen, indem man die obere Gleichung mit der Summe über alle Werte x_i, also $[x]$ multipliziert, die untere mit der Zahl der Messungen n multipliziert und dann durch Subtraktion die Variable a eliminiert. Damit ergeben sich die Lösungen zu:

$$b = \frac{[x][y] - n[xy]}{[x]^2 - n[x^2]} \tag{33}$$

$$a = \frac{1}{n}([y] - b[x]) \tag{34}$$

Diese Regression lässt sich leicht halb-händisch bewerkstelligen, z.B. in Orgin und Matlab, siehe Tabelle 1. Daraus entnehmen wir die Steigung $b = (3,47 \pm 0,07) \cdot 10^3$ K. Die Unsicherheit des Parameters haben wir durch Anwendung des Fortpflanzungsgesetzes auf die Gleichungen (33) und (34) erhalten. Unter der (hier sehr zweifelhaften) Annahme, dass die Unsicherheiten in x klein gegenüber den y-Unsicherheiten sind, ergibt sich dafür:

$$(\Delta a)^2 = \frac{[x^2]}{n[x^2] - [x]^2} \cdot \frac{[\epsilon^2]}{n-2} \tag{35}$$

$$(\Delta b)^2 = \frac{n}{n[x^2] - [x]^2} \cdot \frac{[\epsilon^2]}{n-2}. \tag{36}$$

NTC Beispiel händische Regression

	Messung							Vorhersage	
	x	Δx	y	Δy	(y-[y])^2	x^2	xy	Y	(Y-[y])^2
	3,64E-03	1,46E-05	2,55E+00	7,30E-02	2,66E+00	1,32E-05	9,28E-03	2,55E+00	2,67E+00
	3,56E-03	1,39E-05	2,18E+00	7,30E-02	1,58E+00	1,27E-05	7,75E-03	2,27E+00	1,84E+00
	3,51E-03	1,36E-05	2,11E+00	7,30E-02	1,42E+00	1,23E-05	7,40E-03	2,10E+00	1,40E+00
	3,44E-03	1,30E-05	1,89E+00	7,30E-02	9,49E-01	1,18E-05	6,51E-03	1,86E+00	8,82E-01
	3,35E-03	1,23E-05	1,66E+00	7,30E-02	5,54E-01	1,12E-05	5,57E-03	1,54E+00	3,93E-01
	3,29E-03	1,19E-05	1,28E+00	7,30E-02	1,28E-01	1,08E-05	4,20E-03	1,34E+00	1,75E-01
	3,20E-03	1,13E-05	1,11E+00	7,30E-02	3,64E-02	1,02E-05	3,55E-03	1,02E+00	1,14E-02
	3,15E-03	1,09E-05	8,67E-01	7,30E-02	2,55E-03	9,92E-06	2,73E-03	8,51E-01	4,48E-03
	3,05E-03	1,02E-05	5,42E-01	7,30E-02	1,41E-01	9,30E-06	1,65E-03	5,04E-01	1,71E-01
	2,99E-03	9,84E-06	1,91E-01	7,30E-02	5,29E-01	8,94E-06	5,70E-04	2,96E-01	3,87E-01
	2,92E-03	9,36E-06	-1,31E-02	7,30E-02	8,66E-01	8,53E-06	-3,82E-05	5,28E-02	7,48E-01
	2,82E-03	8,77E-06	-3,31E-01	7,30E-02	1,56E+00	7,95E-06	-9,34E-04	-2,94E-01	1,47E+00
	2,77E-03	8,41E-06	-4,68E-01	7,30E-02	1,92E+00	7,67E-06	-1,30E-03	-4,68E-01	1,92E+00
	2,68E-03	7,92E-06	-7,11E-01	7,30E-02	2,65E+00	7,18E-06	-1,91E-03	-7,80E-01	2,88E+00
Summen	4,44E-02		1,28E+01		1,50E+01	1,42E-04	4,50E-02	1,28E+01	1,49E+01
Mittelwerte	3,17E-03	1,11E-05	9,18E-01	7,30E-02				9,18E-01	
Quadrat [x]^2	1,97E-03		1,65E+02						
Produkt [x][y]		5,70E-01							
Anzahl n	1,40E+01								
Steigung	**3,47E+03**	**6,55E+01**	Δb	b=([x][y]-[xy])/([x]^2-[x^2])					
Achsenabschnitt	**-1,01E+01**	**2,09E-01**	Δa	a=([y]-b[x])/n					
Korrelationsmaß	**0,996**			R=[Y-[y]]^2/[y-[y]]^2					

Tabelle 1: Excel Blatt zur Berechnung der linearen Regression.

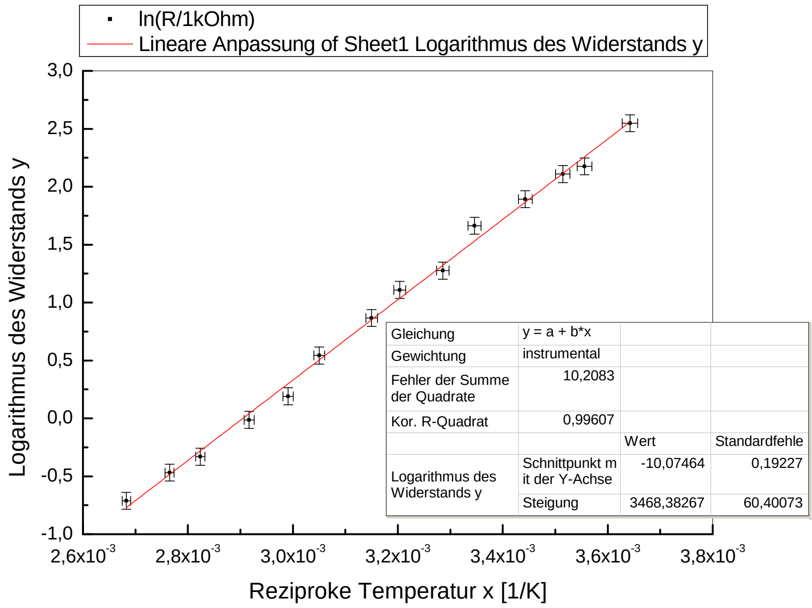

Abbildung 5: Lineare Regression in Origin unter Benutzung der Gewichtung der Messpunkte nach ihren Unsicherheiten.

Eine Indikation über die Güte der Anpassung – ob also wirklich ein annähernd linearer Zusammenhang vorherrscht – gibt das Korrelationsmaß R, welches sich aus den Residuen (den Abweichungen der Messpunkte von der Ausgleichsgerade) ergibt. R kann auch effizienter folgendermaßen berechnet werden.

$$R = \frac{[Y - \bar{y}]}{[y - \bar{y}]} \tag{37}$$

Dabei sind die Werte $Y_i = a + bx_i$, die Werte die man an den x-Messpunkten für die Ausgleichsgerade berechnet und $\bar{y}$ ist der Mittelwert aller y_i. In unserem Fall ist das Korrelations- oder Bestimmtheitsmaß $R = 0.996$, wobei ein Wert von 1 einen perfekten linearen Zusammenhang bedeutet und ein Wert von 0, vollkommene Unkorreliertheit ausdrückt. Eine lineare Regression in Origin ergibt das Bild in Abb. 5 mit ähnlichen Werten.

Das Thema der linearen Regressionsanalyse wird immer noch aktiv erforscht. Sogar hier im einfachen eindimensionalen Fall ist die Frage der optimalen Wahl der Gleichung nicht eindeutig geklärt. Soll man die y-Abweichungen ausgleichen, oder die x-Abweichungen, oder eine Linearkombination der beiden oder die Abweichungsfläche? Wenn x und y verschiedene Einheiten haben, wie soll man dann die Unsicherheiten vergleichen? Diese und ähnliche Fragen kann nur der Experimentator aus Erfahrung für jeden einzelnen Fall beantworten und selbst dann wird man oft einfach verschiedene Methoden versuchen und das beste (im Sinne der korrekten Abschätzung der Unsicherheiten) Ergebnis verwenden.

3.6.1 Nichtlineare Anpassung

Das Thema der Anpassung nichtlinearer und vor allem transzendenter Funktionen und Modelle an Messdaten ist ein Bereich der nichtlinearen Optimierungstheorie. Die dort verwendeten Algorithmen sind ebenfalls Gegenstand aktiver Forschung. Generell benutzen die meisten Algorithmen ebenfalls eine Minimierung der Summe der Quadrate der Abweichungen.

Es gibt einige stabile Algorithmen, die in vielen Umgebungen (Origin, Matlab) implementiert sind und mit etwas Erfahrung erfolgreich eingesetzt werden können. Als Beispiel schlagen wir vor, die Temperaturabhängigkeit des Thermistors direkt als Exponentialfunktion anzupassen. Abschließen können wir nur raten gegenüber den eigenen Messdaten und Rechnungen, aber auch gegenüber fremder Software immer ein gutes Maß an Skepsis zu bewahren und jedes Ergebnis, sei es auch noch so einleuchtend immer zu hinterfragen.

4 Literatur zum Grundpraktikum

4.1 Berechnung von Unsicherheiten

- I.G.Hughes and T.P.A. Hase, **Measurements and their uncertainties**, Oxford
- Eichler, Kronfeldt und Sahm, **Das Neue Physikalische Grundpraktikum**, Springer Verlag, Wien
- P. R. Bevington, **Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences**, McGraw-Hill, New York
- John R. Taylor, **An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements**, University Science Books
- G. L. Squires, **Messergebnisse und ihre Auswertung**, De Gruyter Verlag, Berlin.
- Trautwein, **Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten** Anhang A.2, De Gruyter Verlag, Berlin.
- Kapitel Unsicherheiten in allen Büchern über experimentelle Methoden

4.2 Lehrbücher über experimentelle Methoden

- Kohlrausch, **Praktische Physik** I-III, Teubner Verlag, Stuttgart.
- W. Walcher,**Praktikum der Physik**, Teubner Verlag, Stuttgart.
- W. H. Westphal, **Physikalisches Praktikum**, Springer Verlag, Wien.
- W. Ilberg, **Physikalisches Praktikum für Anfänger**, Teubner Verlag, Stuttgart.
- Kretschmar, **Physikalisches Praktikum für Anfänger**, Teubner Verlag, Stuttgart.
- Gerthsen, Pollermann, **Einführung in das physikalische Praktikum**, Springer Verlag, Wien.

4.3 Lehrbücher Allgemein

- Hänsel, Neumann, **Physik**, Spektrum Verlag, Heidelberg.
- Pohl, **Einführung in die Physik**, Springer, Berlin.
- Bergmann, Schaefer, **Experimentalphysik I-IV**, De Gruyter Verlag, Berlin.
- Gerthsen, Kneser, Vogel, **Physik**, Springer Verlag, Wien.
- **Berkeley Physik-Kurs I-VI**, Viehweg Verlag, Berlin.
- F. Kneubühl, **Repetitorium der Physik**, Teubner Verlag, Stuttgart.
- Trautwein, **Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten**, De Gruyter Verlag, Berlin.
- W. Demtröder, **Experimentalphysik I-IV**, Springer Verlag, Wien.
- H. Haken, H. C. Wolf, **Atom- und Molekülphysik**, Springer Verlag, Wien.

4.4 Lehrbücher über Elektronik

- K.-H. Rohe, **Elektronik für Physiker**, Teubner Verlag, Stuttgart.
- K.-H. Rohe, D. Kamke **Digitalelektronik**, Teubner Verlag, Stuttgart.
- Tietze, Schenk, **Halbleiterelektronik**, Springer Verlag, Wien.
- P. Horowitz, W. Hill, **The art of electronics**, Cambridge Univ. Press.