Formelsamling Tillämpad sannolihethetslära och statistik 1MA915

Namn och beteckning	Sannolikhets- resp. täthetsfunktion		Väntevärde	Varians
Binomialfördelning Bin(n,p)	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$	$k=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
Hypergeometrisk Hyp(N,n,p)	$\dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$k = 0,1,\ldots,n$ $k \leq Np$, $n-k \leq Nq$	np	$\frac{N-n}{N-1}np(1-p)$
Poisson-fördelning Poi(μ)	$e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$	$k=0,1,2,\ldots$	μ	μ
Geometrisk fördelning	$p(1-p)^k$	$k=0,1,2,\ldots$	$(1-p)/p$	$(1-p)/p^2$
ffg-fördelning ffg(p)	$p(1-p)^{k-1}$	$k=1,2,3,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Normalfördelning N(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	$-\infty < x < \infty$	μ	σ^2
Gammafördelning Gam(α,β)	$\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$ *	$x \geq 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Exponentialfördelning Exp(β)	$\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$	$x \geq 0$	β	β^2
Likformig fördelning Likf(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Weibullfördelning	$\lambda c(\lambda x)^{c-1}e^{-(\lambda x)^c}$	$x > 0$	$(1/\lambda)\Gamma(\frac{c+1}{c})$	**

*$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$, $\Gamma(k) = (k-1)!$ om k positivt heltal. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

**$(1/\lambda)^2(\Gamma(\frac{\alpha+2}{\alpha}) - \Gamma^2(\frac{\alpha+1}{\alpha}))$

Approximationer:

$$\begin{aligned}
\text{Hypergeometrisk} &\approx \text{Binomial om } n/N \leq 0.1\\
\text{Binomial} &\approx \text{Poisson om } p \leq 0.1 \text{ och } n \geq 10\\
\text{Binomial} &\approx \text{Normal om } np(1-p) \geq 10\\
\text{Poisson} &\approx \text{Normal om } \lambda \geq 15
\end{aligned}$$

Väntevärde

$$E[X] = \begin{cases} \sum_i x_i p_X(x_i), & \text{i diskreta fallet} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & \text{i kontinuerliga fallet.} \end{cases}$$

Varians

Med $\mu = E[X]$ är $\mathrm{Var}[X] = E[(X-\mu)^2]$.

Steiners formel

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu^2.$$

Den omedvetne statistikerns lag

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i) p(x_i), & \text{i diskreta fallet} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, & \text{i kontinuerliga fallet.} \end{cases}$$

Linjaritet hos väntevärde; om a och b är konstanter så är

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c.$$

Faltningsformel täthetsfunktion för $Z = X + Y$ då X och Y är oberoende sv

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y) dy$$

Kovarians

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Korrelationskoefficient för två stokastiska variabler

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}.$$

Varians av summan av två stokastiska variabler

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Om X och Y är oberoende stokastiska variabler så är

$$\mathrm{Var}[aX+bY+c]=a^2\mathrm{Var}[X]+b^2\mathrm{Var}[Y].$$

Om $X_1,\ldots,X_n$ oberoende: Speciellt om $E[X_i]=\mu$, $\mathrm{Var}[X_i]=\sigma^2$:

$$E[X_1+\ldots+X_n]=n\mu, \qquad \mathrm{Var}[X_1+\ldots+X_n]=n\sigma^2,$$

$$E[\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}]=\mu, \qquad \mathrm{Var}[\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}]=\sigma^2/n$$

Momentgenererande funktion: $\mathcal{M}_X(t)=E[e^{tX}]$.

Markovs olikhet: Låt X vara sv och antag att $X\geq 0$. Då gäller för alla reella tal $a>0$ att

$$P(X>a)\leq \frac{E[X]}{a}.$$

Chebychevs olikhet:

$$P(|X-E[X]|>\epsilon)\leq \frac{\mathrm{Var[X]}^2}{\epsilon^2}.$$

Kvantiler: x_α är α-kvantil om $P(X>x_\alpha)=\alpha$

Normalfördelningen: Om X är $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ så är $Z=(X-\mu)/\sigma$ $\mathrm{N}(0,1)$ och $P(X\leq x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Centrala gränsvärdessatsen: Antag att $n\geq 20$ och $X_1,\ldots,X_n$ är oberoende med samma fördelning, $E[X_i]=\mu$, $\mathrm{Var}[X_i]=\sigma^2$. Då är $X=\sum_i X_i \approx \mathrm{N}(n\mu,n\sigma^2)$ och $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2/n)$.

Grundläggande statistik:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n x_i^2-n\cdot\bar{x}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n x_i^2-\frac{1}{n}\cdot(\sum_{i=1}^n x_i)^2\right]$$

Medelfel $\hat{d}=\hat{d}(\hat{\theta})$ är skattningen av standardavikelsen $d=D[\theta]$ för skattningen, tex är $\hat{d}(\hat{\bar{X}})=s/\sqrt{n}$. Sammanvägd variansskattning mellan k stycken olika stickprov:

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+\cdots+(n_k-1)s_k^2}{(n_1-1)+\cdots+(n_k-1)}$$

Konfidensintervall för stickprovsvarians från normalfördelning $N(\mu,\sigma^2)$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\leq\sigma^2\leq\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$$

Konfidensintervall väntevärden (t-fördelning används då variansen är okänd)

I. $x_1,\ldots,x_n$ $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$-obs:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ \mathrm{N}(0,1)\text{-obs}, \qquad \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\quad t(n-1)\text{-obs}$$

$$I_\mu = [\bar{x} \pm z_{\alpha/2} d], \qquad d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$I_\mu = [\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \hat{d}], \qquad \hat{d} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

II. $x_1, \ldots, x_{n_1}$ $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$-obs och $y_1, \ldots, y_{n_2}$ $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$-obs:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \ \mathrm{N}(0,1)\text{-obs}$$

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2} d], \qquad d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

och om $\sigma_1 = \sigma_2$ men okända så har vi

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad t(n_1 + n_2 - 2)\text{-obs, där } s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}$$

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \cdot \hat{d}], \quad \hat{d} = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

III. x $\mathrm{Bin}(n, p)$-obs, $n\hat{p}\hat{q} \geq 10$ (nedan är $q = 1 - p$ och $\hat{q} = 1 - \hat{p}$):

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \text{ approx N(0,1)-obs,} \quad I_p = [\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\hat{d}], \qquad \hat{d} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

IV. x $\mathrm{Bin}(n, p)$-obs, $n\hat{p}\hat{q} < 10$. Konfidensintervall för p enligt Agresti&Croull:

$$I_p = \left[\tilde{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{\tilde{n}}\tilde{p}(1 - \tilde{p})}\right], \quad \tilde{n} = n + z_{\alpha/2}^2, \quad \tilde{p} = \frac{x + (z_{\alpha/2}^2)/2}{\tilde{n}}.$$

V. x $\mathrm{Bin}(n_1, p_1)$-obs, y $\mathrm{Bin}(n_2, p_2)$-obs, $n_1\hat{p}_1\hat{q}_1 \geq 10$, $n_2\hat{p}_2\hat{q}_2 \geq 10$:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}} \text{ approx N(0,1),} \quad I_{p_1 - p_2} = [\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\hat{d}], \qquad \hat{d} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

VI. x $\mathrm{Poi}(\lambda t)$-obs, $x \geq 15$:

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/t}} \text{ approx N(0,1)-obs, } \hat{\lambda} = x/t, \quad I_\lambda = [\hat{\lambda} \pm z_{\alpha/2}\hat{d}], \qquad \hat{d} = \sqrt{\hat{\lambda}/t}.$$

VII. $x_1, \ldots, x_n$ $\mathrm{Poi}(\mu)$-obs, $\bar{x} \geq 15$:

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\hat{\mu}/n}} \text{ approx N(0,1)-obs, } \hat{\mu} = \bar{x}, \quad I_\mu = [\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2}\hat{d}], \qquad \hat{d} = \sqrt{\hat{\mu}/n},$$

VIII. $x_1, \ldots, x_n$ från samma fördelning X med $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$, $n \geq 20$:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ approx N(0,1)-obs}, \quad I_\mu = [\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \hat{d}] \approx [\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\hat{d}], \qquad \hat{d} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

IX. $x_1, \ldots, x_{n_1}$ från samma fördelning X med $E[X] = \mu_1$, $Var[X] = \sigma_1^2$, $y_1, \ldots, y_{n_2}$ från samma fördelning Y med $E[Y] = \mu_2$, $Var[Y] = \sigma_2^2$, $n_1 \geq 20$ och $n_2 \geq 20$:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} \text{ approxim N(0,1)-obs}$$

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\hat{d}] \approx [\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\hat{d}], \qquad \hat{d} = \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$$

Regression: $y_i = m + kx_i + \epsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, skattning $\hat{k} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$, $\hat{m} = \bar{y} - \hat{k}\bar{x}$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n} = (\sum_i x_i^2) - n\bar{x}^2 = (n-1)s_x^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_i x_i y_i - \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n} = (\sum_i x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{n} = (\sum_i y_i^2) - n\bar{y}^2 = (n-1)s_y^2$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}, \quad s^2 = \frac{1}{n-2}(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}})$$

Om ϵ_i oberoende och $\epsilon_i \sim$N$(0, \sigma^2)$ så får vi följande konfidensintervall för parametrarna k och m:

$$I_k = \left[\hat{k} \pm t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s/\sqrt{S_{xx}}\right], \quad I_m = \left[\hat{m} \pm t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{S_{xx}}}\right].$$

Givet x_0 samt skattningar $\hat{m}$ och $\hat{k}$ får vi **predikerat värde** på y_0:

$$y_0^{(pred)} = \hat{m} + \hat{k}x_0.$$

Med hänsyn till osäkerheten i skattningarna ges ett **konfidensintervall för väntevärdet** $E[Y_0]$:

$$I_{E[Y_0]} = \left[\hat{m} + \hat{k}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\right].$$

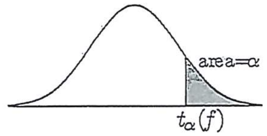
Precis som för andra y-värden så kommer y_0 troligen att avvika lite från linjen på grund av slumpavvikelser.

Man kan därför slutligen beräkna ett **prediktionsintervall**, som är ett konfidensintervall för värdet på y_0 där både skattningarnas osäkerhet och osäkerheten orsakad av slumpavvikelsen för y_0 har inkluderats:

$$I_{y_0} = \left[\hat{m} + \hat{k}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right].$$

Partialintegration: $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$.

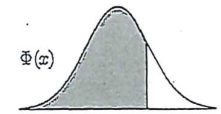
Tabell 3. t-fördelningen
$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$, där $X \in t(f)$.



f \ α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Tabeller

Tabell 1. Standard normalfördelning

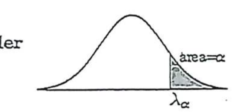


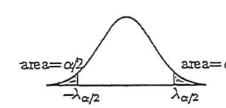
$\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \in N(0,1)$.
För negativa x, utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									
4.0	.99997									

Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler
$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649





Percentage Points of the Chi-Square Distribution

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of x^2								
	0.99	**0.95**	**0.90**	**0.75**	**0.50**	**0.25**	**0.10**	**0.05**	**0.01**
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38