Ficha 1: Análisis nodal

- El análisis nodal es una herramienta fundamental para resolver circuitos eléctricos de forma sistemática. Permite calcular los voltajes en los nodos de forma directa, facilitando el análisis de redes complejas.

Objetivos de aprendizaje

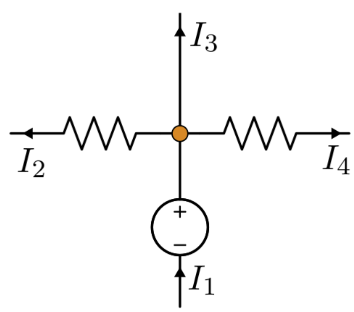
- Aplicar el análisis nodal para calcular voltajes y corrientes en circuitos eléctricos.
- Formular las ecuaciones de los nodos usando ley de corrientes de Kirchhoff LCK y Ley de Ohm.
- Resolver las ecuaciones por métodos manuales, matriciales y usando MATLAB.

Introducción

- Si un circuito lineal tiene solo un lazo, generalmente es una tarea sencilla resolver los voltajes. Sin embargo, si el circuito tiene varias ramas, los voltajes en cada punto no son evidentes. Es posible usar el análisis de mallas para identificar las corrientes de malla y luego calcular los voltajes en los nodos.
- El análisis nodal permite resolver directamente los voltajes en los nodos sin necesidad de calcular primero las corrientes. En el paso esencial de esta técnica, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) para identificar una ecuación para cada nodo..

Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)

La suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él.



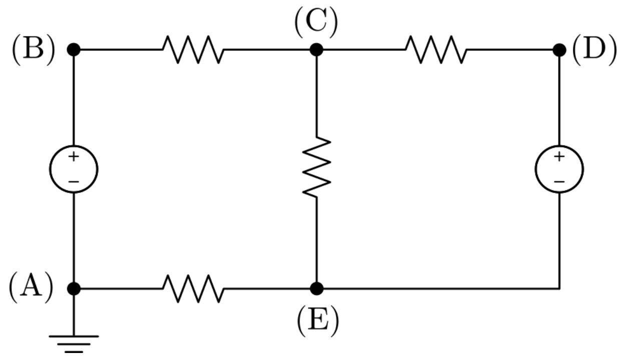
En este nodo, la Ley de Corrientes de Kirchhoff implica que: $I_1 = I_2 + I_3 + I_4$

Al aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en el análisis nodal, las corrientes se expresan típicamente en función de los voltajes nodales. Los voltajes nodales se definen como la diferencia de potencial entre un nodo y un nodo de referencia (tierra) definido.

Hay tres pasos principales en el análisis nodal:

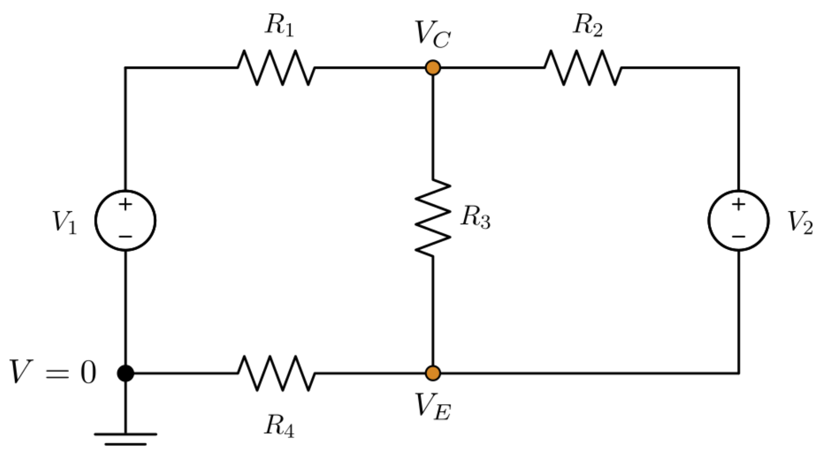
1. Definir las variables de voltaje nodal y un nodo de referencia.
2. Escribir una ecuación para cada nodo aplicando la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK).
3. Plantear una ecuación matricial para los voltajes nodales y resolverla.

En el primer paso, se definen los voltajes nodales. Un voltaje nodal puede definirse en cualquier punto donde se unen dos elementos del circuito. Sin embargo, solo se deben definir variables de voltaje nodal en aquellos lugares donde el voltaje no se pueda calcular directamente a partir de un nodo vecino. Típicamente, esto significa que solo es necesario definir voltajes nodales en los puntos donde están conectados tres o más elementos del circuito.



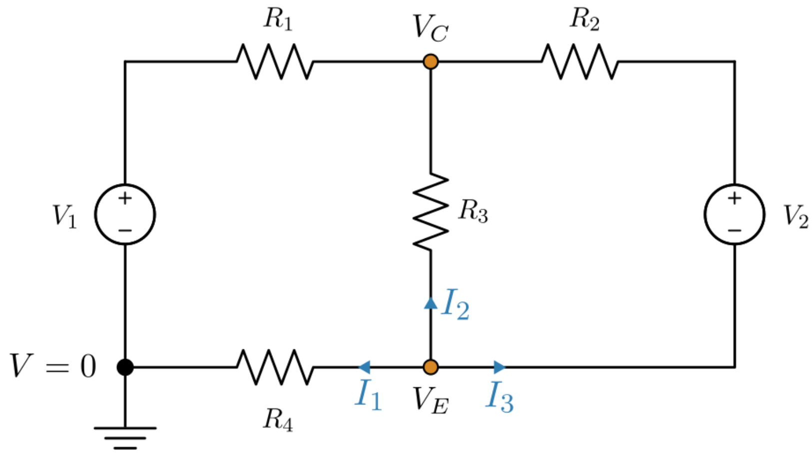
Circuito de ejemplo

Considera el circuito del ejemplo mostrado. Aunque se pueden definir variables de voltaje nodal en cualquier punto etiquetado, no siempre es necesario hacerlo. Primero, se ha definido el nodo de tierra en el punto (A), por lo tanto, el voltaje en (A) es cero voltios. El voltaje en el punto (B) puede calcularse directamente sumando la fuente de voltaje entre (A) y (B). De forma similar, el valor en (D) puede calcularse con base en la fuente de voltaje entre (E) y (D). Esto implica que una buena opción es definir los voltajes nodales en (C) y (E): V_C y V_E.



Voltaje en los nodos

Una vez seleccionados los voltajes nodales, se puede escribir una ecuación para cada nodo. En el nodo (E), se pueden definir tres corrientes. Para simplificar, define las tres corrientes como saliendo del nodo (E) (la dirección definida es arbitraria).



Definición del sentido de las corrientes

Con estas definiciones, la Ley de Corrientes de Kirchhoff implica que:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Recuerda que la Ley de Ohm relaciona la corriente a través de una resistencia con el voltaje en sus extremos como: $I = V/R$. Aplicar la Ley de Ohm e incorporar la fuente de voltaje implica que:

$$\frac{V_E - 0}{R_4} + \frac{V_E - V_C}{R_3} + \frac{V_E + V_2 - V_C}{R_2} = 0$$

Observación: No es necesario definir etiquetas para las corrientes como I_1, I_2, etc. Típicamente, se seleccionan las direcciones y se aplica la Ley de Ohm mientras se escribe la ecuación.

La ecuación obtenida tiene dos incógnitas: V_C y V_E. Para poder resolverla, se necesita una ecuación adicional. Aplicando nuevamente la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en el nodo (C) se obtiene una segunda ecuación. Para resolver el sistema resultante, se pueden optar por varios caminos, pero es ventajoso definir un **sistema matricial**. Las matrices ofrecen un marco natural: permiten representar de manera concisa las múltiples ecuaciones lineales que modelan una red de circuitos.

Caso 1: Fuentes conectadas al nodo de referencia

Se asume que las fuentes de voltaje no están conectadas entre nodos no referenciados. Si hay una fuente de voltaje entre dos nodos no referenciados, cuyos voltajes son desconocidos y no se conoce la corriente a través de la fuente, se denomina *supernodo* y se resolverá más adelante.

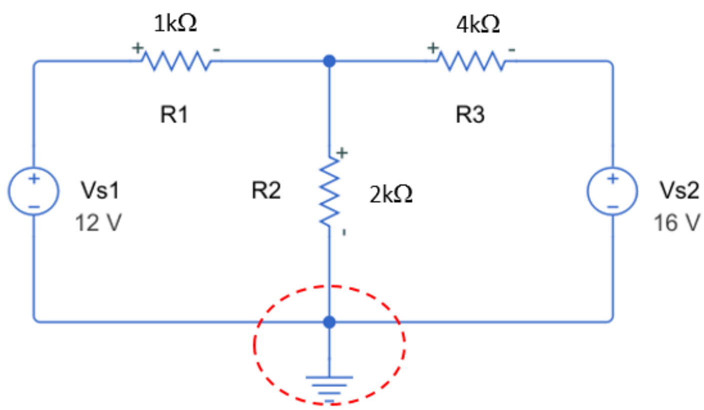
Pasos para Determinar los Voltajes Nodales

1. Seleccionar un nodo como nodo de referencia (tierra), denominado nodo 0.
2. Asignar V1, V2, … Vn-1 a los n-1 nodos restantes, identificando los voltajes conocidos si los hay. Los voltajes se referencian respecto al nodo de tierra.
3. Elegir una dirección para la corriente que atraviesa cada resistor en los nodos con voltaje desconocido y expresar las corrientes de rama en función de los voltajes nodales.

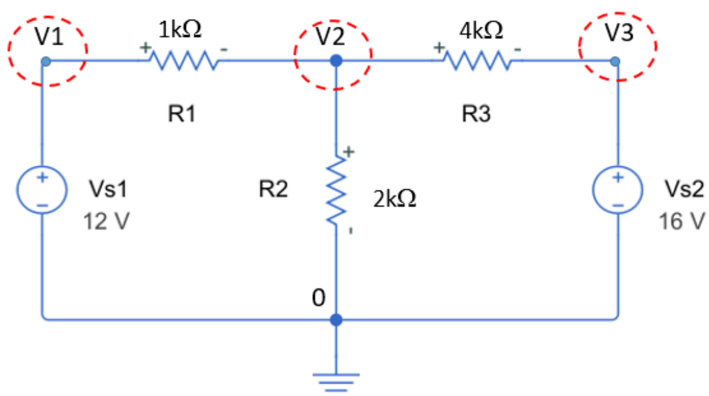
4. Aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) a cada uno de los n-1 nodos no referenciados.
5. Usar la Ley de Ohm para expresar las corrientes de rama en términos de los voltajes nodales.
6. Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resultante para obtener los voltajes nodales desconocidos.

Sigamos los pasos considerando el siguiente circuito:

1. El circuito mostrado tiene cuatro nodos. Seleccionaremos el nodo de referencia (tierra) como el nodo inferior, que en este caso ya está dado.



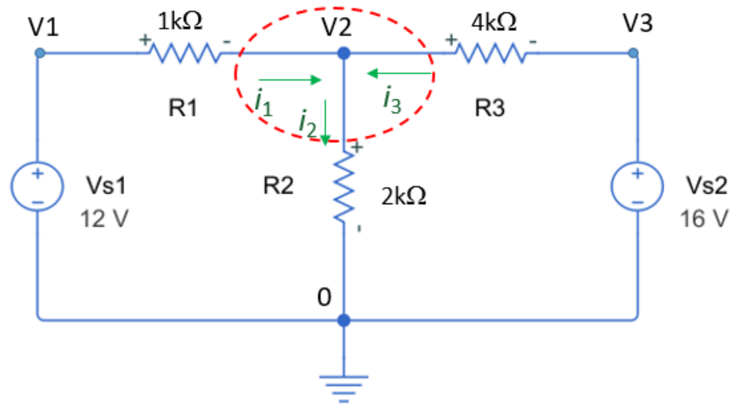
2. Etiquetemos los tres nodos restantes como V1, V2 y V3, como se muestra a continuación:



Observa la figura anterior para determinar si alguna de las cantidades es conocida.

$V_1 = 12V, V_2 = 16V$

3. Seleccionemos la dirección de la corriente que pasa a través de cada resistor en el nodo con voltaje desconocido (nodo V2), como se muestra a continuación, y escribamos las corrientes de rama.



4. Apliquemos la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en el nodo V2.

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

5. Escribamos cada una de las corrientes de rama en función de los voltajes nodales. Esto se hace utilizando la Ley de Ohm (debes tener cuidado con las polaridades).

$$i_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}, \quad \text{o} \quad i_1 = \frac{12 - V_2}{1k\Omega}$$

$$i_2 = \frac{V_2 - 0}{R_2} = \frac{V_2}{2k\Omega},$$

$$i_3 = \frac{V_3 - V_2}{R_3} \qquad \text{o} \quad i_3 = \frac{16 - V_2}{4k\Omega}$$

6. Aplicamos la ecuación de las corrientes de rama a la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en el nodo 2.

$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3 - V_2}{R_3} = 0 \quad \text{o} \qquad \frac{12 - V_2}{1k\Omega} - \frac{V_2}{2k\Omega} + \frac{16 - V_2}{4k\Omega} = 0$$

Esta es una ecuación con una incógnita. Uno de los métodos para resolverla es utilizar la función *solve* de MATLAB para encontrar V2, como se muestra a continuación.

```
u = symunit;

% Given Values
Vs1 = 12*u.V;
Vs2 = 16*u.V;
R1 = 1000*u.Ohm;
R2 = 2000*u.Ohm;
R3 = 4000*u.Ohm;

% Known node voltages V1 and V2
V1 = Vs1;
V3 = Vs2;

% Unknown node voltage V2
syms V2;
```

```
% Node equation and solution
V2 = solve ((V1-V2)/R1-V2/R2+(V3-V2)/R3==0)
```

Luego, utilizando las ecuaciones del paso 5, se determinan las corrientes de rama. Dado que se trata de resistencias, se espera que los valores de corriente estén en miliamperios (mA).

```
% Find Currents
i1 = (V1-V2)/R1;
i1 = rewrite(i1,u.mA)   % define as mA
i2 = V2/R2;
i2 = rewrite(i2,u.mA)   % define as mA
i3 = (V3-V2)/R3;
i3 = rewrite(i3,u.mA)   % define as mA
```

Mostrar cada valor con 4 cifras significativas.

```
V2 = vpa(V2,5)
i1 = vpa(i1,5)
i2 = vpa(i2,5)
i3 = vpa(i3,5)
```

Otro método consiste en resolver manualmente la última ecuación del paso 6 mediante álgebra simple. Al multiplicar esta ecuación por 4000 se obtiene:

$$4(12 - V_2) - 2V_2 + (16 - V_2) = 0$$

la cual puede simplificarse.

$$V_2 = \frac{64}{7} = 9.143V$$

Para realizar una simulación alternativa, podemos definir los valores de las resistencias como variables para observar los efectos en los voltajes nodales y en las corrientes de rama a través de las resistencias.

```
u=symunit;

% Given Values
Vs1 = 12*u.V;
Vs2 = 16*u.V;
R1 = 1*u.kOhm;
R1 =5*u.kOhm %Range 1kOhms - 10kOhms
R2 =9*u.kOhm %Range 1kOhms - 20kOhms
R3 =4*u.kOhm %Range 1kOhms - 10kOhms

% Known node voltage V1 and V2
V1 = Vs1
V3 = Vs2

% Unknown V2
syms V2;
```

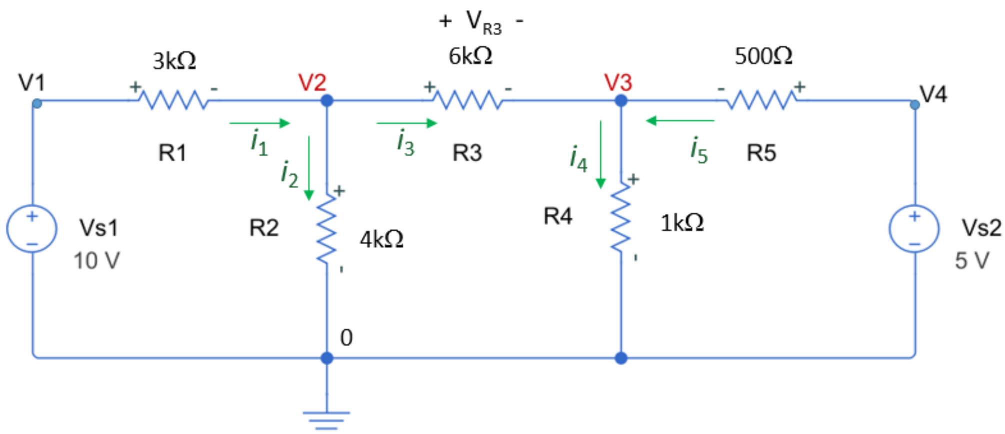
```
% Node equation and solution
V2 = solve ((V1-V2)/R1-V2/R2+(V3-V2)/R3==0)

% Find Currents
i1 = (V1-V2)/R1;
i1 = rewrite(i1,u.mA)
i2 = V2/R2;
i2 = rewrite(i2,u.mA)
i3 = (V3-V2)/R3;
i3 = rewrite(i3,u.mA)
```

Mostrar cada valor en forma de número decimal.

```
V2 = vpa(V2,5)
i1 = vpa(i1,5)
i2 = vpa(i2,5)
i3 = vpa(i3,5)
```

Ejemplo: Análisis nodal con fuentes de voltaje conectadas al nodo de referencia

Escribiendo el análisis nodal para encontrar los voltajes de los nodos V_2, V_3, el voltaje a través de la resistencia R_3, y la corriente que atraviesa R_5



Solución

Los pasos 1, 2 y 3 se muestran en la figura anterior. Podemos observar la figura para determinar si alguno de los voltajes nodales es conocido.

$V_1 = V_{s1} = 10V$ and $V_4 = V_{s2} = 5V$

4. Aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en los nodos desconocidos 2 y 3.

$i_1 - i_2 - i_3 = 0$ and $i_3 - i_4 + i_5 = 0$

5. Escribamos cada una de las corrientes de rama en función de los voltajes nodales. Esto se hace utilizando la Ley de Ohm (hay que tener cuidado con las polaridades).

$$i_1 = \frac{V_{s1} - V_2}{R_1} = \frac{12 - V_2}{3k\Omega}, \qquad i_2 = \frac{V_2 - 0}{R_2} = \frac{V_2}{4k\Omega}, \qquad i_3 = \frac{V_2 - V_3}{R_3} = \frac{V_2 - V_3}{6k\Omega},$$

$$i_4 = \frac{V_3}{R_4} = \frac{V_3}{1k\Omega}, \qquad i_5 = \frac{V_{s2} - V_3}{R_5} = \frac{5 - V_3}{500\Omega}$$

6. Aplicar la ecuación de las corrientes de rama a las ecuaciones de la LCK en los nodos desconocidos 2 y 3.

Nodo 2 $\quad \frac{V_{s1} - V_2}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} - \frac{V_2 - V_3}{R_3} = 0 \quad$ o $\quad \frac{10 - V_2}{3k\Omega} - \frac{V_2}{4k\Omega} - \frac{V_2 - V_3}{6k\Omega} = 0$

Nodo 3 $\quad \frac{V_2 - V_3}{R_3} - \frac{V_3}{R_4} + \frac{V_{s2} - V_3}{R_5} = 0 \quad$ o $\quad \frac{V_2 - V_3}{6k\Omega} - \frac{V_3}{1k\Omega} + \frac{5 - V_3}{500\Omega} = 0$

Hay dos incógnitas y dos ecuaciones. Utiliza la función *solve* de MATLAB para encontrar los voltajes desconocidos V2 y V3, como se muestra a continuación.

```
u = symunit;

% Given Values
Vs1 = 10*u.V;
Vs2 = 5*u.V;
R1 = 3*u.kOhm;
R2 = 4*u.kOhm;
R3 = 6*u.kOhm;
R4 = 1*u.kOhm;
R5 = 500*u.Ohm;

%Known node voltage V1 and V2
V1 = Vs1;
V4 = Vs2;

%Unknown node voltage V2 and V3
syms V2 V3;
%Node equation and solution
[V2,V3] = solve ((V1-V2)/R1-V2/R2-(V2-V3)/R3==0, (V2-V3)/R3-V3/R4+(V4-V3)/R5==0);
V2 = rewrite(V2,u.V)
V3 = rewrite(V3,u.V)

% Find voltage cross resistor R3 and current i5 through resistor R5
i3 = (V2-V3)/R3;
VR3 = i3*R3
i5 = (V4-V3)/R5;
i5 = rewrite(i5,u.mA)
```

Mostrar cada valor con 4 cifras significativas.

```
V2 = vpa(V2,5)
V3 = vpa(V3,5)
VR3 = vpa(VR3,5)
```

```
i5 = vpa(i5,5)
```

Además, las dos últimas ecuaciones del paso 6 pueden resolverse manualmente con un álgebra simple. Las ecuaciones pueden reorganizarse en función de las variables desconocidas y expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}) & \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & -(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V_{s1}}{R_1} \\ -\frac{V_{s2}}{R_5} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} -(\frac{1}{3k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{6k}) & \frac{1}{6k} \\ \frac{1}{6k} & -(\frac{1}{6k}+\frac{1}{1k}+\frac{1}{500}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{3k} \\ -\frac{5}{500} \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial puede resolverse utilizando MATLAB, como se muestra a continuación.

```
%Matrix AxV=b
A = [-(1/R1+1/R2+1/R3) 1/R3; 1/R3 -(1/R3+1/R4+1/R5)]
b = [-Vs1/R1; -Vs2/R5]
V = A\b;

V2 = V(1);
V2 = rewrite(V2,u.V)
V3 = V(2)
V3 = simplify(V3)

% Find the voltage VR3 cross the resistor R3 , and current i5 through resistor R3
i3=(V2-V3)/R3;
VR3=i3*R3
i5=(V4-V3)/R5;
i5 = rewrite(i5,u.mA)
```

Mostrar cada valor con 4 cifras significativas.

```
V2 = vpa(V2,5)
V3 = vpa(V3,5)
VR3 = vpa(VR3,5)
i5 = vpa(i5,5)
```

Finalmente, tenemos los siguientes valores.

$V_2 = 5.2071V$, $V_3 = 3.4320V$, $V_{R_3} = 1.7751V$, and $i_{R_5} = 3.1361mA$