随机过程第二次作业

贺昱霖

学号：1120240083

2025 年 3 月 27 日

2.5

假设 $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ 是速率分别为 λ_1 和 λ_2 的独立的 Poisson 过程. 证明 $\{N_1(t)+N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程。进而，证明这个联合过程的首个事件来自 $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 的概率是 $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$, 它独立于此事件发生的时刻.

证明：

(1) $N_1(0)+N_2(0)=0+0=0$

(2) $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是独立增量，且 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 独立，故 N(t) 是独立增量

(3)

$$
\begin{aligned}
&P(N_1(t+h)+N_2(t+h)-(N_1(t)+N_2(t))=n) \\
&=\sum_{i=0}^{n} P(N_1(t+h)-N_1(t)=i, N_2(t+h)-N_2(t)=n-i) \\
(\text{由独立性})&=\sum_{i=0}^{n} P(N_1(t+h)-N_1(t)=i)\cdot P(N_2(t+h)-N_2(t))=n-i) \\
&=\sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda_1 h}\frac{(\lambda_1 h)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_2 h}\frac{(\lambda_2 h)^{n-i}}{(n-i)!}=\sum_{i=0}^{n} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)h}\cdot\frac{h^n}{n!}\frac{n!\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}}{i!(n-i)!} \\
&=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)h}\cdot\frac{h^n\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

故 $\{N_1(t)+N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程。

对 $\forall t$, 由全概率公式，首个事件概率为

$$
\begin{aligned}
P(N_1(t)=1|N_1(t)+N_2(t)=1)&=\frac{P(N_1(t), N_1(t)+N_2(t)=1)}{P(N_1(t)+N_2(t)=1)}=\frac{\lambda_1 t e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1+\lambda_2)te^{-\lambda_1 t}} \\
&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}
$$

独立于此事件发生的时刻。

2.8

生成一个 Poisson 随机变量。令 $U_1, U_2, \cdots$ 是独立的 (0,1) 均匀随机变量.

(a) 如果 $X_i = (-\ln U_i)/\lambda$，证明 X_i 是具有失效率 λ 的指数随机变量.

(b) 用 (a) 部分证明，当 N 定义为等于满足

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i$$

的 n 的值时，N 是均值 λ 的 Poisson 随机变量，其中 $\prod_{i=1}^{o} U_i \equiv 1$

证明：

(a) 由于

$$\begin{aligned} P(X_i \leq t) &= P(-\frac{\ln U_i}{\lambda} \leq t) \\ &= P(U_i \geq e^{-\lambda t}) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

故 X_i 是具有失效率 λ 的指数随机变量。

(b) 两边取对数，

$$\sum_{i=1}^{n} \ln U_i \geq -\lambda > \sum_{i=1}^{n+1} \ln U_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{\ln U_i}{\lambda} \leq 1 < \sum_{i=1}^{n+1} -\frac{\ln U_i}{\lambda}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1 < \sum_{i=1}^{n+1} X_i$$

$$N \leq N(1) < N+1$$

最后一项来自与 Poisson 过程的到达间隔是指数随机变量。由 N 是整数，故有 $N = N(1)$ 为均值 λ 的 Poisson 随机变量。

2.17

令 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是具有相同的密度函数 f 的独立连续随机变量. 以 $X_{(i)}$ 记 $X_1, X_2, ..., X_n$ 中第 i 个最小者.

(a) 注意，为了使 $X_{(i)}$ 等于 x，恰好在 $X_1, X_2, ..., X_n$ 中有 i-1 个必须小于 x，1 个必须等于 x，而其余的 n-i 个必须大于 x. 由此可证明 $X_{(i)}$ 的密度函数为

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(F(x))^{i-1}(\bar{F}(x))^{n-i}f(x).$$

(b) $X_{(i)}$ 将小于 x，当且仅当 $X_1, X_2, ..., X_n$ 中有多少个小干 x?

(c) 利用 (b) 得到 $P\{X_{(i)} \leq x\}$ 的一个表达式.

(d) 利用 (a) 和 (c) 对 $0 \le y \le 1$ 建立等式

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} dx.$$

(e) 以 S_i 记 Poisson 过程 $\{N(t), t \ge 0\}$ 的第 i 个事件的时刻. 求

$$E[S_i|N(t)=n] = \begin{cases} -- & i \le n \\ -- & i > n \end{cases}$$

解:

(a) 当 Δx 足够小,

$$\begin{aligned} P(x \le X_{(1)} < x+\Delta x) &= C_n^{i-1} C_{n-i+1}^{i-1} C_{n-i}^{n-i} (P(X_1 < x))^{i-1} \\ &\cdot (P(x \le x < x+\Delta x)) \cdot (P(x_1 \ge x+\Delta x))^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n+1)!} \cdot (F(x))^{i-1} \cdot (\overline{F}(x+\Delta x))^{n-i} P(x \le x < x+\Delta x) \end{aligned}$$

故 $f_{X(i)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X_i < x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} (F(x))^{i-1} (\overline{F}(x))^{n-i} f(x)$

(b)$X_{(i)}$ 将小于 x 并且仅当至少有 i 个小于 x

(c) 由 (b)

$$P\{X_{(i)} \le x\} = \sum_{k=i}^{n} C_n^k (F(x))^k \cdot (\overline{F}(x))^{n-k}$$

(d) 取 F 为 (0,1) 均匀分布的 CDF，故由 $P(\{X_{(i)} \le y\} = \int_0^y f_{X_{(i)}}(x)dx$,

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} \, \mathrm{d}x.$$

(e) 对于 $i \le n$，由定理给定 $N(t) = n$,n 个事件到达时间 $(S_1, ..., S_n)$ 与 n 个独立的 (0,t) 均匀随机变量的次序统计量有相同分布，则

$$\begin{aligned} E[S_i|N(t)=n] &= E[X_{(i)}] \\ &= \int_0^t x \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} (\frac{x}{t})^{i-1} (1-\frac{x}{t})^{n-i} \cdot \frac{1}{t} dx \\ &= t \int_0^1 x \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} dx \\ &= t \frac{i}{n+1} \sum_{k=i+1}^{n+1} \binom{n+1}{k} y^k (1-y)^{n+1-k}|_{y=1} \\ &= t \frac{i}{n+1} \end{aligned}$$

对于 $i > n$，由指数分布发无记忆性,

$$\mathrm{E}[S_i|N(t)=n] = \mathrm{t} + \mathrm{E}[S_i - \mathrm{t}|N(t)=n] = t + E[X_{n+1} + \cdots + X_i] = t + \frac{i-n}{\lambda}$$

2.20

假设速率为 λ 的 Poisson 过程的事件分成类型 $1,2,\cdots,k$ 之一。若事件发生在 s, 则独立于一切其他情形，它以概率 $P_i(s)\left(i=1,\cdots,k,\sum_1^k P_i(s)=1\right)$ 分在类型 i，以 $N_i(t)$ 记在 $[0,t]$ 内发生的类型 i 的事件数。证明 $N_i(t)\,(i=1,\cdots,k)$ 是独立的，且 $N_i(t)$ 具有均值为 $\lambda\int_0^t P_i(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Poisson 分布

证明： 给定 $\mathrm{N}(t)=n$ 时，其中 $\mathrm{n}=\sum_{i=1}^k n_i$，到达时间服从 (0,t) 均匀分布，则分在各个类型的概率为

$$p_i=\frac{1}{t}\int_0^t p_i(x)dx$$

则由全概率公式

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N_i(t)=n_i,i=1,2,\cdots,k)&=P(N_i(t)=n_i,i=1,2,\cdots,k|N(t)=n)P(N(t)=n)\\&=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\\&=\frac{e^{-\lambda p_1 t}(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{e^{-\lambda p_k t}(\lambda p_k t)^{n_k}}{n_k!}=\prod_{i=1}^k\frac{e^{-\lambda p_i t}(\lambda p_i t)^{n_i}}{n_i!}\end{aligned}$$

分布函数是可分离的，故 $N_i(t)$ 是独立的，且服从均值为 $\lambda p_i t=\lambda\int_0^t p_i(s)ds$ 的 Poisson 分布。

2.29

对于非时齐 Poisson 过程，完成 $N(t+s)-N(t)$ 是均值为 $m(t+s)-m(t)$ 的 Poisson 随机变量的证明。

证明：

我们继续沿用书上的记号，由公理 $(ii),(iii),(iv)$，对固定的 t

$$\begin{aligned}P_n(s+h)&=P_n(s)P_0(h)+P_{n-1}(s)P_1(h)+o(h)\\&=(1-\lambda(t+s)h)P_n(s)+\lambda(t+s)hP_{n-1}(s)+o(h).\end{aligned}$$

故

$$\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h}=-\lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s)+\frac{o(h)}{h}.$$

令 $h\to 0$，得到

$$P_n'(s)=-\lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s),$$

或等价于

$$\mathrm{e}^{\int_0^s\lambda(t+u)du}\left[P_n'(s)+\lambda(t+s)P_n(s)\right]=\lambda(t+s)\mathrm{e}^{\int_0^s\lambda(t+u)du}P_{n-1}(s).$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{\int_0^s\lambda(t+u)du}P_n(s))=\lambda(t+s)\mathrm{e}^{\int_0^s\lambda(t+u)du}P_{n-1}(s).$$

当 $n=1$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{\int_0^s\lambda(t+u)du}P_1(s))=\lambda(t+s),$$

故由 $P_1(0)=0$, 有

$$P_1\left(s\right)=\int_0^s \lambda(t+u)du\mathrm{e}^{-\int_0^s \lambda(t+u)du}$$

下面采用数学归纳法证明 $P_n(s)=\mathrm{e}^{-\int_0^s \lambda(t+u)du}(\int_0^s \lambda(t+u)du)^n/n!$

首先假定对 $n-1$ 时成立，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{\int_0^s \lambda(t+u)du}P_n(s))=\frac{\lambda(t+s)(\int_0^s \lambda(t+u)du)^{n-1}}{(n-1)!},$$

解得

$$\mathrm{e}^{\int_0^s \lambda(t+u)du}P_n(s)=\frac{(\int_0^s \lambda(t+u)du)^n}{n!}+c,$$

由于 $P_n(0)=0$, 我们有

$$P_n(s)=\mathrm{e}^{-\int_0^s \lambda(t+u)du}(\int_0^s \lambda(t+u)du)^n/n!,$$

综上，我们得到了 $N(t+s)-N(t)$ 是均值为 $\int_0^s \lambda(t+u)du=m(t+s)-m(t)$ 的 Poisson 随机变量。

2.36

以 C 记在一个 M/G/1 的忙期完成服务的顾客数。求

(a) $E[C]$.

(b) $Var(C)$.

解：

(a) 书中已经推导出

$$B(t,n)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}\mathrm{d}G_n(t).$$

故令 $t\to\infty$,

$$P(C=n)=B(\infty,n)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}\mathrm{d}G_n(t)$$

则有

$$E[C]=\sum_{n=1}^\infty nP(C=n)=\sum_{n=1}^\infty n\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}\mathrm{d}G_n(t)$$

(b) 同理

$$Var(C)=\sum_{n=1}^\infty (n-E[C])^2P(C=n)=\sum_{n=1}^\infty (n-E[C])^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}\mathrm{d}G_n(t)$$