STAT0008: Stochastic Processes

Lecture 3 - Extensions of Poisson Process

Lecturer: Weichen Zhao　　Spring 2025

Key concepts:

- 非时齐$Poisson$过程;
- 复合$Poisson$过程;
- 条件$Poisson$过程.

回顾Poisson过程的定义，需要满足

(1) $N(0) = 0$;

(2) 具有平稳增量和独立增量;

(3) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

(4) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

则称为具有速率λ($\lambda > 0$)的Poisson过程。我们这节放松其中的一些条件，推广Poisson过程。

3.1 非时齐 Poisson 过程

本小节放松平稳增量这一条件，也就是说过程的速率会依赖于时间，下面给出非时齐 Poisson 过程的定义

Definition 3.1 (非时齐 Poisson 过程) *若计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$满足:*

(1) $N(0) = 0$;

(2) 具有独立增量;

(3) $P\{N(h) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$, $\lambda(t), t \geq 0$为连续函数

(4) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

则称为具有强度函数 $\lambda(t)$ 的非时齐 *(Nonhomogeneous) Poisson*过程。

与标准Poisson 过程一样，我们接下来考察$N(t)$的分布。

Proposition 3.2 设$\{N(t), t \geq 0\}$为一个非时齐*Poisson*过程，记

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

在区间$[t+s]$中的事件数$N(t+s) - N(t)$服从均值为$m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(y)dy$的*Poisson*分布，即

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \exp\{-[m(t+s) - m(s)]\}\frac{[m(t+s) - m(s)]^n}{n!}.$$

Proof: 与定理2.5的证明想法类似。对给定的t，定义：

$$P_n(s) \triangleq P\{N(t+s) - N(t) = n\}$$

则有

$$\begin{aligned}
P_0(s+h) &= P\{N(t+s+h) - N(t) = 0\} \\
&= P\{(t, t+s)\text{中有0个事件}, (t+s, t+s+h)\text{中有0个事件}\} \\
&= P\{(t, t+s)\text{中有0个事件}\}P\{(t+s, t+s+h)\text{中有0个事件}\} \\
&= P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)],
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h}.$$

令$h \to 0$，得到微分方程

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s)$$

即

$$\log P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)\,\mathrm{d}u$$

解得

$$P_0(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}.$$

对于$n \geq 1$, $P_n(s)$可仿照定理2.5计算。 ■

3.2 复合Poisson过程

本小节放松时间微元内发生事件次数的条件，不再规定

$$P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h).$$

标准Poisson过程每次事件发生时我们只记录“+1”，但是现在允许事件发生可以“+n”。

先给出复合Poisson随机变量的定义和性质。

Definition 3.3 (复合Poisson随机变量)
设$X_1, X_2, \ldots$是分布为F的$i.i.d.$随机变量序列，且与一个均值为λ的$Poisson$随机变量N独立。随机变量

$$W \triangleq \sum_{i=1}^{N} X_i$$

称为具有参数λ和分量分布F的复合$Poisson$随机变量。

注. 当F是离散分布的时候，W可以表示为独立Poisson随机变量的线性组合。

设X_i为离散随机变量，分布列为

$$P\{X_i = j\} = p_j, \quad j = 1, \ldots, k, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

记N_j为X_i中等于j，$j = 1, \ldots, k$的个数，则

$$W = \sum_{j=1}^{k} jN_j$$

其中N_j分别为具有均值λp_j的独立Poisson随机变量。(参考教材例1.5 I)

Proposition 3.4
设$X_1, X_2, \ldots$的矩母函数为$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i}]$，则复合$Poisson$随机变量$W$的矩母函数为

$$\psi(t) = e^{-\lambda t} \exp\{\lambda t \psi_X(t)\}.$$

通过矩母函数求导即得

$$\mathbb{E}[W] = \lambda \mathbb{E}[X], \quad Var[W] = \lambda \mathbb{E}[X^2], \quad X \sim F$$

证明参考教材2.5节。

Definition 3.5 (复合Poisson过程) 一个随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$称为复合$Poisson$过程，如果对任意$t \geq 0$，$X(t)$可以表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

其中$\{N(t), t \geq 0\}$是一个$Poisson$过程，X_i是一族$i.i.d.$随机变量，且与$\{N(t), t \geq 0\}$独立，即$X(t)$是复合$Poisson$随机变量。

3.3 条件Poisson过程

本小节放松独立增量这一条件，现在考虑速率参数λ不是固定的，而是一个随机变量Λ。

Definition 3.6 (条件Poisson过程)
设Λ是一个具有分布G的正值随机变量，计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为一个条件$Poisson$过程，如果：给定$\Lambda = \lambda$，$\{N(t), t \geq 0\}$是一个速率为λ的$Poisson$过程。即

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda).$$

注. 条件Poisson过程不是独立增量过程。只需证：

$$
\begin{aligned}
&P\left(N\left(s\right)=m,N\left(t+s\right)-N\left(s\right)=n\right)\\
&\neq P\left(N\left(s\right)=m\right)P\left(N\left(t+s\right)-N\left(s\right)=n\right)
\end{aligned}
$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&P\left(N\left(s\right)=m,N\left(t+s\right)-N\left(s\right)=n\right)\\
&=\int_0^\infty exp\left(-\lambda s\right)\frac{\left(\lambda s\right)^m}{m!}exp\left(\lambda t\right)\frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}dG\left(\lambda\right)\\
&\neq\int_0^\infty exp\left(-\lambda s\right)\frac{\left(\lambda s\right)^m}{m!}dG\left(\lambda\right)\int_0^\infty exp\left(-\lambda t\right)\frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}dG\left(\lambda\right)\\
&=P\left(N\left(s\right)=m\right)P\left(N\left(t+s\right)-N\left(s\right)=n\right)
\end{aligned}
$$

条件Poisson过程本质上是一种含随机参数的Poisson过程。现实中，我们可以根据记录的条件Poisson过程，进行贝叶斯推断，得到对随机参数Λ的估计。即计算给定$N(t)=n$时，Λ的条件分布。

对于充分小的$d\lambda$，

$$
\begin{aligned}
&P\{\Lambda\in(\lambda,\lambda+d\lambda)\mid N(t)=n\}\\
&\quad=\frac{P\{N(t)=n\mid\Lambda\in(\lambda,\lambda+d\lambda)\}P\{\Lambda\in(\lambda,\lambda+d\lambda)\}}{P\{N(t)=n\}}\\
&\quad=\frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda)}
\end{aligned}
$$

从而给定$N(t)=n$，Λ的条件分布为

$$P\{\Lambda\leq x\mid N(t)=n\}=\frac{\int_0^x e^{-\lambda t}(\lambda t)^n dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n dG(\lambda)}.$$

进一步，若Λ具有概率密度$g(\lambda)$，则后验概率密度为

$$g(\lambda\mid N(t)=n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)d\lambda}.$$

Example 3.7 某地区每年的下雨次数服从$Poisson$过程，为了简化问题，假定下雨的持续时间可以忽略。由于一些未知因素的影响，该地区下雨次数所服从的$Poisson$过程的强度年年不同。假定该强度是一个随机变量。希望能够通过对今年到时刻t以前下雨次数的统计，对今年的下雨强度作出推断，同时利用该结果预测何时再次下雨。

设今年到时刻s为止已经下了n场雨，则强度的后验概率密度为

$$g(\lambda \mid N(s) = n) = \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda s}(\lambda s)^n g(\lambda) d\lambda}.$$

如果从时刻s开始，到下一次下雨的间隔为$T(s)$，那么在已知s为止已经下了n场雨条件下，$T(s)$的后验分布为

$$P(T(s) \leqslant x | N(s) = n) = \frac{\int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda x)) \exp(-\lambda s)(\lambda s)^n \mathrm{d}G(\lambda)}{\int_0^\infty \exp(-\lambda s)(\lambda s)^n \mathrm{d}G(\lambda)}.$$