STAT0008: Stochastic Processes

Lecture 6 - Limit Behavior and Ergodic Theorem

Lecturer: Weichen Zhao — Spring 2025

Key concepts:

- 正常返;
- 遍历定理;
- 不变分布的存在性与唯一性。

本节课接着常返性的内容，考虑$n \to \infty$的情形，继续研究随时间推移，Markov链转移的规律。由上一节课中 Corollary 5.12，若状态j是暂留的，那么对任意状态i，

$$P_{ij}^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty$$

所以本节课我们只考虑常返状态。

6.1 弱遍历定理

假设状态i是常返的，那么从状态i出发迟早回到状态i的概率

$$f_{ii} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$$

把$\{f_{ii}^{(n)}\}$看成正整数集合上的分布，我们可以定义返回状态i的平均转移次数。

Definition 6.1 (平均返回时间)
常返状态i的平均返回时间定义为

$$\mu_{ii} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

利用平均返回时间可以进一步对常返状态进行分类

Definition 6.2 (正常返) 假设状态i是常返的，如果$\mu_{ii} < \infty$，则称状态i正常返*(positive recurrent)*；否则，若$\mu_{ii} = \infty$，则称状态i零常返*(null recurrent)*。

Theorem 6.3 (弱遍历定理) 设$\{X_n\}$是不可约常返的$Markov$链，那么对任意状态i, j,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

n-1步中处于状态 j 的次数

Proof: 先给出一个引理

Lemma 6.4 (Hardy & Littlewood) 设$a_n \geqslant 0, \forall n$,记幂级数$A(z)$为

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad 0 \leqslant z < 1$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lim_{z\to 1^-} (1-z)A(z)$$

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) z^n$$

设$P_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n$，由引理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \lim_{z\to 1^-} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n$$

回顾定理5.11的证明中，我们已经知道：

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ij}^{(k)} z^k) \sum_{k=0}^{\infty} (P_{jj}^{(k)} z^k)$$

设$F_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$。当$i \neq j$时，由Abel定理

$$F_{ij}(1^-) = \lim_{z\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$$

所以

$$\lim_{z\to 1^-}(1-z)F_{ij}(z)P_{jj}(z)=\lim_{z\to 1^-}(1-z)P_{jj}(z)=\lim_{z\to 1^-}\frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}$$

当$i=j$时，直接有

$$\lim_{z\to 1^-}(1-z)P_{jj}(z)=\lim_{z\to 1^-}\frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}$$

即对任意i，都有

$$\lim_{z\to 1^-}(1-z)P_{ij}(z)=\lim_{z\to 1^-}\frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}=\lim_{z\to 1^-}\frac{1}{F'_{jj}(z)}.$$

由Abel定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{ij}^{(k)}=\lim_{z\to 1^-}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}nf_{jj}^{(n)}z^{n-1}}=\frac{1}{\mu_{jj}}$$

■

注. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{ij}^{(k)}$具有明确的概率含义，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{ij}^{(k)}&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(\mathbf{I}_{[X_k=j|X_0=i]})\\&=\frac{1}{n}\mathbb{E}(\#\{n>k\geqslant 0:X_k=j|X_0=i\})\end{aligned}$$

其中$\#A$表示集合A中元素的个数。所以$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{ij}^{(k)}$表示在$n-1$步转移中，处于状态$j$的次数与记录状态总数$n$的比值。

和常返性一样，正常返也具有类的性质，即下面命题：

Proposition 6.5 若i正常返，$i\to j$，那么j也正常返。

Proof: 由于$i\to j$，那么存在m，使得$P_{ij}^{(m)}>0$，由CK方程，

$$P_{kj}^{(l+m)}=\sum_{s\in E}P_{ks}^{(l)}P_{sj}^{(m)}\geqslant P_{ki}^{(l)}P_{ij}^{(m)}$$

不等式两端对l求和平均，

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}P_{kj}^{(l+m)}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}P_{ki}^{(l)}P_{ij}^{(m)}$$

两端同时令$n \to \infty$，

$$\frac{1}{\mu_{jj}} \geqslant \frac{P_{ij}^{(m)}}{\mu_{ii}} > 0$$

故$\mu_{jj} < \infty$，所以j正常返。 ■

进一步，如果Markov链的状态是有限的，和常返性一样，有下面结论：

Proposition 6.6 *有限状态Markov链必然存在正常返态*。

Proof: 反证法，若命题不成立。设状态空间$E = \{1, 2, \ldots, N\}$，则所有状态都是暂留的或者零常返的。固定状态i，对任意j，由弱遍历定理，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \to 0, \quad n \to \infty$$

那么对有限的N，

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \to 0, \quad n \to \infty$$

然而，由概率转移矩阵的性质：对任意k，$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(k)} = 1$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = 1$$

矛盾！故命题成立。 ■

注. 结合推论6.5可知，状态有限的不可约Markov链，所有状态都是正常返态。

6.2 不变分布的存在唯一性

本节我们利用弱遍历定理回答关于不变分布的问题：

1.如果不变分布存在，什么条件下具有唯一性？

2.不变分布在什么条件下存在？

首先回答第一个问题，即下面定理

Theorem 6.7 设$\{X_n\}$是不可约常返的$Markov$链，π是P的一个不变分布，即满足不变方程$\pi = \pi P$，则对任意状态j，都有$\pi_j > 0$，且

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

Proof: 先给出一个引理

Lemma 6.8 (有界收敛定理) 设$X_1, X_2, \ldots$为随机变量序列，依概率收敛于X。若存在$M > 0$，使得对任意$n \geq 1$，$P(|X_n| \leq M) = 1$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n] = \mathbb{E}[X]$$

依概率收敛，记为$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, 如果对于$\epsilon > 0$

$$\mathrm{P}(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) \to 0, n \to \infty.$$

Proof: 首先，由于X_n依概率收敛于X，且$P(|X_n| \leq M) = 1$，所以对任意$\epsilon > 0$

$$P(|X| > M + \epsilon) \leq P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$$

即$P(|X| \leq M) = 1$. 其次，对任意$\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n - X|] &= \mathbb{E}[|X_n - X| \, \mathbf{I}_{|X_n - X| > \varepsilon}] + \mathbb{E}[|X_n - X| \, \mathbf{I}_{|X_n - X| \leqslant \varepsilon}] \\
&\leq \mathbb{E}[(|X_n| + |X|)\mathbf{I}_{|X_n - X| > \varepsilon}] + \varepsilon \\
&\leqslant 2MP\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

最后，令$n \to \infty$可得，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| \leqslant \varepsilon$$

再令$\varepsilon \to 0$即证。 ■

回到原命题，对任意状态i，由于$\sum_{s\in E} \pi_s = 1$，所以存在$j \in S$，使得$\pi_j > 0$。对于任意状态i，由于$\{X_n\}$不可约，所以$j \to i$，故存在n，使得$P_{ji}^{(n)} > 0$，那么

$$\pi_i = \sum_{k\in E} \pi_k P_{ki}^{(n)} \geq \pi_j P_{ji}^{(n)} > 0$$

命题第一部分得证。

不妨考虑$\{X_n\}$初始分布为π，由于π是不变分布，所以对任意k，$P(X_k = j) = \pi_j$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X_0\sim\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}\right] &= \mathbb{E}_{X_0\sim\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}[\mathbf{I}_{X_k=j|X_0=i}]\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = j) = \pi_j\end{aligned}$$

由于$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \leq 1$，所以由有界收敛定理+弱遍历定理

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{X_0\sim\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}\right]\\ &= \mathbb{E}_{X_0\sim\pi}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}\right] = \mathbb{E}_{X_0\sim\pi}\left[\frac{1}{\mu_{jj}}\right] = \frac{1}{\mu_{jj}}\end{aligned}$$

■

注. 上面的命题表明，对于不可约常返Markov链，不变分布如果存在，则是唯一的，并且$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0$，那么对任意状态$j$，

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j} < \infty$$

这说明：如果不变分布存在，就有所有状态都是正常返的。

下面我们证明其逆命题，也就是若$\mu_{jj} < \infty$，令 $\pi_i = 1/\mu_{jj}$，则 π 就是不变分布，这回答了：不变分布在什么条件下存在？

Theorem 6.9 *不可约正常返的Markov链存在平稳分布。*

Proof: 由弱遍历定理，对不可约正常返Markov链中的任意状态i, j，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_{jj}} \triangleq p_j > 0$$

我们下面证明$p = (p_0, p_1, \ldots)$为一个不变分布，即满足不变方程$p = pP$，且是一个概率分布。

先证不变方程$p = pP$成立。由C-K方程

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l\in E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{il}^{(k)}\right) P_{lj}$$

提出一项

由于$\frac{1}{n}(P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(0)}) \to 0$, $n \to \infty$，

$$p_j = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k+1)}$$

由于$0 \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \le 1$，所以由有界收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l\in E}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{il}^{(k)}\right) P_{lj}$$

即得不变方程

$$p_j = \sum_{l\in E} p_l P_{lj}$$

再证p是一个概率分布，即$\sum_{l\in E} p_l = 1$. 由于对任意k

$$p = pP \Longrightarrow p = pP^k$$

所以

$$p_j = \sum_{l\in E} p_l \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{lj}^{(k)}\right)$$

由于$0 \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \le 1$，所以由有界收敛定理

$$\begin{aligned} p_j = \lim_{n\to\infty} p_j &= \lim_{n\to\infty}\sum_{l\in E} p_l \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{lj}^{(k)}\right) \\ &= \sum_{l\in E} p_l \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{lj}^{(k)}\right) = p_j \sum_{l\in E} p_l \end{aligned}$$

所以$\sum_{l\in E} p_l = 1$。 ■

我们已经知道了弱遍历极限和不变分布的关系，可以得到弱遍历定理的另一个形式：

Theorem 6.10 (弱遍历定理) 设$\{X_n\}$是不可约正常返的$Markov$链，π是不变分布，那么对任意状态i,j,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{ij}^{(k)}=\pi_j \quad = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

更一般地，可以得到下面的(平均)遍历定理

(平均)

Theorem 6.11 (遍历定理)

设$\{X_n\}$是不可约常返的$Markov$链，π是不变分布，f是E上的函数，满足 $\sum_{i\in E}\pi_i|f(i)|<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)=\sum_{i\in E}\pi_i f(i)$$

一个积分

↓ 期望空间平均.

时间平均

Proof: 参考《应用随机过程》，陈大岳、章复熹，北京大学出版社，2023，P118, P124-P128. ■

一维的

注1. 遍历定理说明了长时间尺度下，函数f的时间平均，等于在空间上平均。这意味着系统的长期统计行为可以由其稳态分布完全描述。此外，在计算数学中，经常会处理高维空间上积分计算的问题，即E是高维空间，那么由遍历定理，即可通过构造随机动力系统(遍历的Markov过程)，通过计算时间上的一维积分，取极限得到高维积分的结果。

注2. 遍历定理可以视为大数定律在Markov依赖结构下的推广。大数定律适用于独立同分布的随机变量，表明样本均值收敛到期望；而遍历定理适用于具有Markov性的序列，表明时间平均收敛到平稳分布下的期望。两者都揭示了“平均行为的稳定性”，但遍历定理处理的是更一般的Markov依赖的情况。

6.3 强遍历定理

常返性和弱遍历定理虽然给出了随Markov链转移状态的渐近规律，但是当$n\to\infty$时，转移概率$P_{ij}^{(n)}$的极限情况我们仍然不清楚。先看一个例子。

Example 6.12 (两状态的Markov链 III) 考虑*Markov*链，状态空间为$\{0,1\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$$

其中$\alpha,\beta\in(0,1)$。

$$P^n=\frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}+\frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ -\beta & \beta\end{pmatrix}$$

转移概率的极限：

$$\lim_{n\to\infty}P^{(n)}=\frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi\\ \pi\end{pmatrix},$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$. 但是，如果$\alpha=\beta=1$，即

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

计算容易发现规律

$$P_{00}^{(n)}=P_{11}^{(n)}=\begin{cases}1, & n=2k\\ 0, & n=2k-1\end{cases}$$

有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{00}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{11}^{(n)}=\frac{1}{2}$$

该 *Markov* 链正常返，平均返回时间为2。然而，$\lim_{n\to\infty}P_{00}^{(n)}$和$\lim_{n\to\infty}P_{11}^{(n)}$都不存在。

这个例子说明了弱遍历性无法得到$P_{ij}^{(n)}$的极限性质，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P_{ij}^{(n)}=\pi_j\not\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$$

也就是说，对于正常返的Markov链，$P_{ij}^{(n)}$的极限也可能不存在。事实上，状态的周期性对于转移概率的极限是否存在起着关键作用。

已经说明是正常返的

Theorem 6.13 (强遍历定理) 设$\{X_n\}$是不可约非周期的$Markov$链，若π是P的不变分布，那么

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in E}|P_{ij}^{(n)}-\pi_j|=0,\quad \forall i\in E.$$

那么自然有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$$

Proof: 设$\{X_n : n\geqslant 0\}$ 和$\{Y_n : n\geqslant 0\}$ 是 E 上以P为转移矩阵的相互独立的Markov链，初分布分别为 μ 和 ν. 令

耦合方法

$$\{Z_n=(X_n,Y_n):n\geqslant 0\}$$

则它为$E\times E$上以$\mu\times\nu$为初分布的马氏链，转移矩阵记为

$$\bar{P}\triangleq P\otimes P,$$

$(P\otimes P)^n=P^n\otimes P^n$

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}.$$

$\because (A\otimes B)(C\otimes D)$ $(n\times n, n\times n)$ $=AC\otimes BD$

其中$\otimes$表示Kronecker积，即

$$\bar{P}_{(i,j)(k,l)}=P_{ik}P_{jl},\ ✓\quad \forall (i,j)(k,l)\in E\times E.$$

i行j行个

自行验证$\bar{P}^{(n)}_{(i,j)(k,l)}=P_{ik}^{(n)}P_{jl}^{(n)}$.

Step1. 证明Z_n不可约非周期。

由于P不可约，所以存在N_1，N_2，使得$\forall (i,j)(k,l)\in E\times E$

$$P_{ik}^{(n_1)}>0,\ P_{jl}^{(n_2)}>0,\quad \forall n_1>N_1,\ n_2>N_2$$

当$n>\max\{N_1,N_2\}$时，

$$\bar{P}^{(n)}_{(i,j)(k,l)}=P_{ik}^{(n)}P_{jl}^{(n)}>0$$

即$\bar{P}$不可约。

由于P非周期，所以对任意$i,j\in E$

$$\cancel{\gcd\{n:P_{ii}^{(n)}>0\}=1,\quad \gcd\{n:P_{jj}^{(n)}>0\}=1}$$

会有引理 $>k$时 · $P^{(k)}>0$ 全部都是大于0的

$\gcd\{n: P \quad \}$

那么

$$\gcd\{n : \bar{P}^{(n)}_{(i,j)(i,j)} = P^{(n)}_{ii} P^{(n)}_{jj} > 0\} = 1$$

即$\bar{P}$非周期。

Step2. $\bar{P}$的不变分布为

$$\bar{\pi}_{(i,j)} = \pi_i \pi_j$$

不难自行验证。

Step3. 证明$\{X_n : n \geqslant 0\}$与$\{Y_n : n \geqslant 0\}$迟早相遇。

因为$\bar{\mathbf{P}}$不可约且存在不变分布，那么Z_n是常返的。令

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = Y_n\}.$$

它是$\{X_n : n \geqslant 0\}$与$\{Y_n : n \geqslant 0\}$的相遇时刻，即$\{Z_n : n \geqslant 0\}$首达对角线

$$\bar{D} \triangleq \{(i,i) : i \in E\}$$

的时间，他不会超过Z_n首达某个具体状态(i,i)的时间，即

$$\tau \leq \tau_{(i,i)} \triangleq \inf\{n \geq 0 : Z_n = (i,i)\}$$

由于Z_n常返，所以

$$P(\tau_{(i,i)} < \infty) = 1.$$

那么$P(\tau < \infty) = 1$.

Step4. 证明在$\{X_n : n \geqslant 0\}$与$\{Y_n : n \geqslant 0\}$相遇之后，它们有同样的分布，即

$$P(X_n = j, \tau \leqslant n) = P(Y_n = j, \tau \leqslant n)$$ ∵ P 是相同的

假设$\{X_n : n \geqslant 0\}$与$\{Y_n : n \geqslant 0\}$在时刻m相遇于状态i。

直观上，那么从时刻m开始重新计时的话，它们都是从i 出发以P为转移矩阵的马氏链，从而它们在任何时刻有相同的分布。严格的证明如下：

$$\begin{aligned} P(X_n = j, \tau \leqslant n) &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{i \in E} P(X_n = j, \tau = m, Z_m = (i,i)) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i,i)) P(X_n = j | \tau = m, Z_m = (i,i)). \end{aligned}$$

注意到

$$\{\tau = m, Z_m = (i,i)\} = \{Z_0, \cdots, Z_{m-1} \notin \bar{D}, Z_m = (i,i)\}.$$

把m视为现在的时间，由Z_n的Markov性

$$\begin{aligned}
P(X_n = j | \tau = m, Z_m = (i,i)) &= P(X_n = j | Z_m = (i,i)) \\
&= P(X_n = j | X_m = i, Y_m = i) \\
&= P(X_n = j | X_m = i) = P_{ij}^{(n-m)}. \qquad (X_n, Y_n\text{独立})
\end{aligned}$$

所以

$$P(X_n = j, \tau \leqslant n) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i,i)) P_{ij}^{(n-m)}.$$

同理，

$$\begin{aligned}
P(Y_n = j, \tau \leqslant n) &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i,i)) P(Y_n = j | Z_m = (i,i)) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i,i)) p_{ij}^{(n-m)}.
\end{aligned}$$

因此$P(X_n = j, \tau \leqslant n) = P(Y_n = j, \tau \leqslant n)$.

Step5. 注意到

$$P(X_n = j) = P(X_n = j, \tau \leq n) + P(X_n = j, \tau > n)$$

$$P(Y_n = j) = P(Y_n = j, \tau \leq n) + P(Y_n = j, \tau > n)$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in E} |P(X_n = j) - P(Y_n = j)| &= \sum_{j \in E} |P(X_n = j, \tau > n) - P(Y_n = j, \tau > n)| \\
&\leqslant \sum_{j \in E} (P(X_n = j, \tau > n) + P(Y_n = j, \tau > n)) \\
&= 2P(\tau > n) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (\text{由于}P(\tau < \infty) = 1)
\end{aligned}$$

特别地，取X_n和Y_n的初分布分别为 $\mu = \delta_i$ 和 $\nu = \pi$，那么

$$P(X_n = j) = P_{ij}^{(n)}, \quad P(Y_n = j) = \pi_j.$$

定理即证。 ■

$P(i)=1$
$P(j)=0$

注1. 不可约Markov链中，非周期正常返的状态称为遍历态(Ergodic state).

注2. 这里构造Z_n的方法称为耦合方法(Coupling Method)，是概率论中非常重要的证明方法，由于X_n和Y_n是独立的，这种特殊的耦合称为独立耦合。一般地，两个概率分布μ和ν的耦合(Coupling)定义为同一个概率空间上的一对随机变量(X, Y)，满足

$$P\{X = x\} = \mu(x), \quad P\{Y = y\} = \nu(y).$$

注3. 还可以通过更新定理证明，参考《随机过程及其应用》，陆大絟，张颢，清华大学出版社定理7.3。

定理6.13讨论了正常返、非周期情形$P_{ij}^{(n)}$的极限，对于其他情况可以总结为下面定理。

Theorem 6.14 *$\{X_n\}$是不可约常返的Markov链，那么*

(1) 若j是零常返状态，则

$\mu_{jj} \to \infty$ 故 $\frac{1}{\mu_{jj}} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0;$$

(2) 若j是正常返周期状态，周期为d_j，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd_j)} = \frac{d_j}{\mu_{jj}}$$

用更新理论证

其中$\mu_{jj} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$为平均返回时间。

书上的例子留作阅读学习作业。

不可约Markov链的分类总结如下：

$$
\text{不可约}\begin{cases}\text{常返}\begin{cases}\text{正常返}\Leftrightarrow\text{有不变分布}\begin{cases}P_{ij}^{(n)}\to\pi_j(\text{非周期})\\ \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}P_{ij}^{(k)}\to\pi_j(\text{周期})\end{cases}\\ \text{零常返: }P_{ij}^{(n)}\to 0\end{cases}\\ \text{非常返: }P_{ij}^{(n)}\to 0\end{cases}
$$