二元樹理論模型及應用

Financial Engineering and Computations

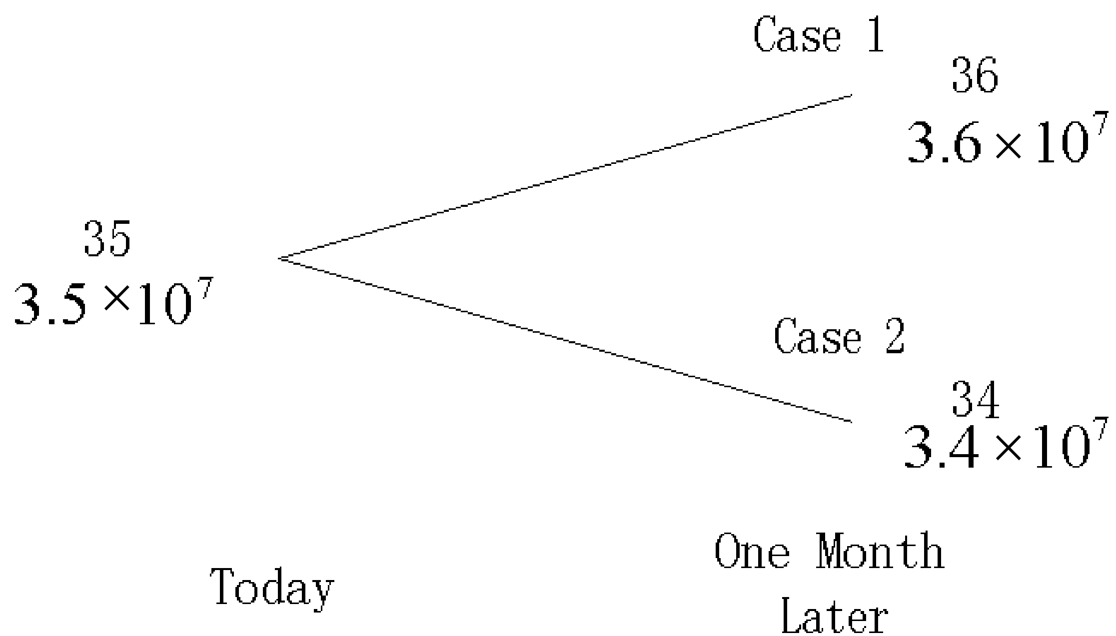
Dai, Tian-Shyr

授課大綱

- 選擇權簡介
- 單期的二元樹模型
  - 避險組合的建構及評價
  - 簡介風險中立機率及構成要件
- 多期的二元樹模型
  - 動態避險
- 新奇選擇權的評價

單期二元樹模型

- 假定XYZ公司預估於下個月時付出10^6USDs,假定今天台幣對美金的匯率是1:35,則該公司立刻購買的成本是 3.5×10^7
- XYZ如不立刻購買,則需承擔匯兌風險如下:

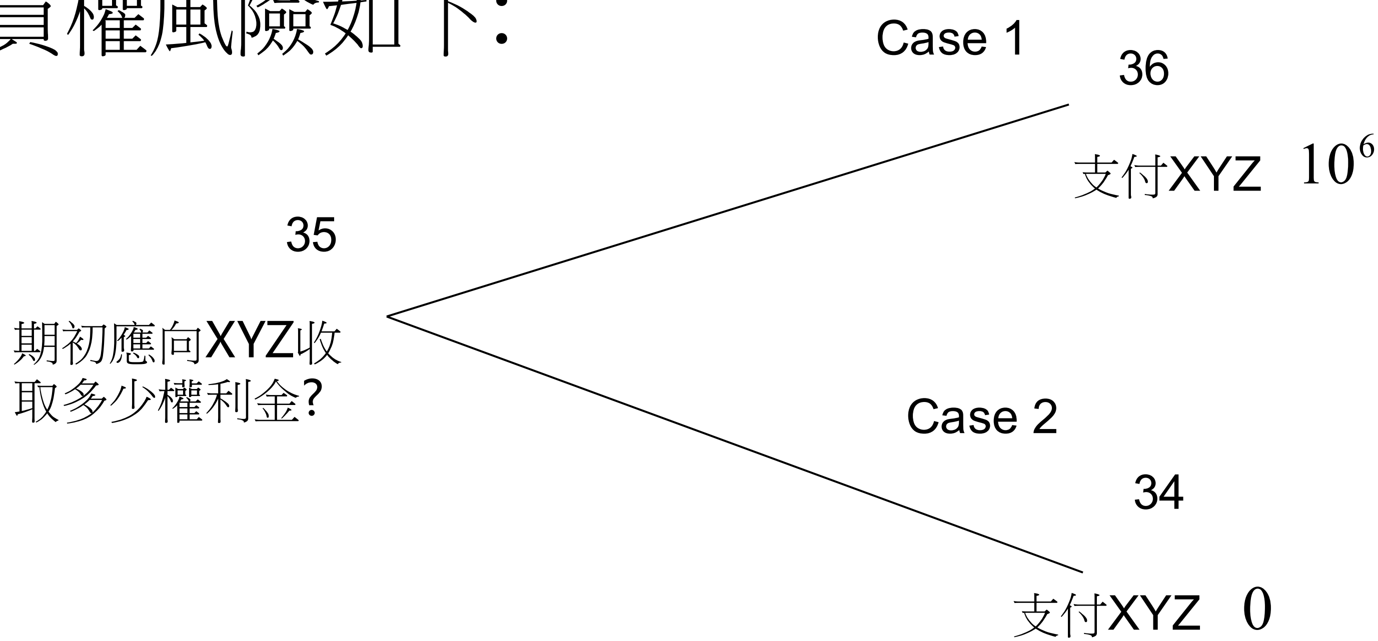


→ XYZ需多付出 10^6

左圖為一單期的二元樹模型

購買選擇權避險

- 假定XYZ向ABC購買標的物為10^6 USDs的買權履約價為35TWDs/USD,到期日為一個月後
  - Case 1: ABC支付 XYZ: $(36-35)^{+}\times 10^{6}=10^{6}$
  - Case 2: ABC不需支付: $(34-35)^{+}\times 10^{6}=0$
- XYZ的匯兌風險可用購買買權規避,ABC承擔賣買權風險如下:



ABC建立避險投資組合

- 收取權利金的價格應等於ABC建構避險投資組合的成本
- ABC欲規避風險,在期初決定持有 x USDs和y TWDs,假定無風險利率為0
  - Case 1: $36x + y = 10^6$
  - Case 2: $34x + y = 0$
  - 解方程式得 $x = 5\times 10^5$ $y = -1.7\times 10^7$
- ABC期初需持有5×10^5 USDs,並借 1.7×10^7 TWDs

選擇權價格及避險參數Delta

- ABC期初建立避險投資組合的成本:
  - $35 \times 5 \times 10^5 - 1.7 \times 10^7 = 5 \times 10^5$J價格
- Delta hedge
  - Delta定義為 $= \dfrac{選擇權價格變化}{標的物價格變化}$
  - 在這個例子中,Delta $= \dfrac{10^6 - 0}{3.6 \times 10^7 - 3.4 \times 10^7} = 0.5$
  - 在這種避險方式中,ABC會持有Delta份的標的物: USDs $0.5 \times 10^6 = 5 \times 10^5$

使用套利理論建構出的評價模型

- 套利的定義:
  - 不承擔風險之下獲得超額的利益
  - 反例:
    - 銀行定存
    - 買樂透
  - 詐賭
- 套利空間在金融市場上無法長久存在

使用套利理論建構出的評價模型

- 當選擇權價格不為 5×10^5 利空間存在
- 假定價格P大於 5×10^5
  - 賣選擇權(得P元)
  - 建構複製選擇權的投資組合
    - 買入 5×10^5 SDs
    - 借 1.7×10^7 VDs

期初得 $P-5\times10^5$

	TWDs	USDs	Option	Total
Case 1	-1.7×10^7	1.8×10^7	-10^6	0
Case 2	-1.7×10^7	1.7×10^7	0	0

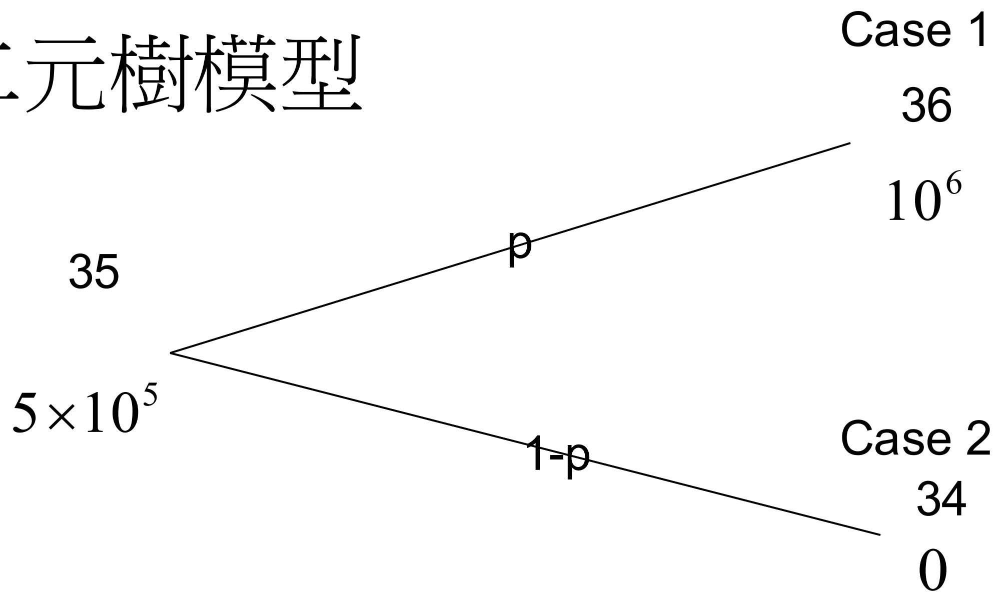
Homework

使用套利理論建構出的評價模型

- 假定價格P小於 5×10^5
  - 建構套利的投資組合

風險中立機率

- 觀察二元樹模型



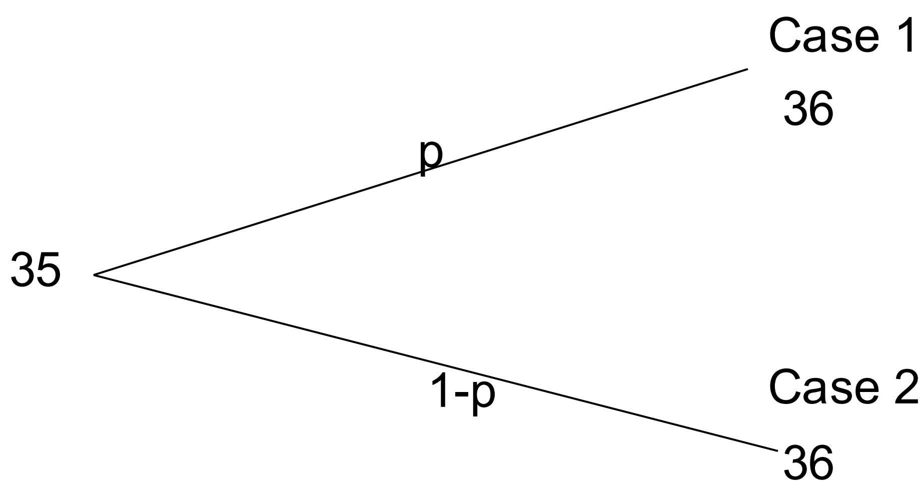
- 假定case 1發生機率=p　case 2為 1-p
  - 假定風險中立: $36\times p+34\times(1-p)=35 \Rightarrow p=0.5$
  - 選擇權的價格: $10^6\times0.5+0\times0.5=5\times10^5$
  - 選擇權的評價可化約成求期望值的問題
  - 注意:風險中立機率不等於市場上實際機率

風險中立機率存在且唯一的要件

- 風險中立機率存在的要件
  - 市場上必須無套利的機會
- 風險中立機率存在且唯一的要件
  - 無套利
  - Market is complete
    - 市場上所有的商品皆可由其他商品複製而成
- Lecture 8將會使用martingale的特性證明風險中立機率和無套利的關係

反例:套利機會存在
(風險中立機率不存在)

- 假定利率為0,將之前所提到的二元樹更改如下:

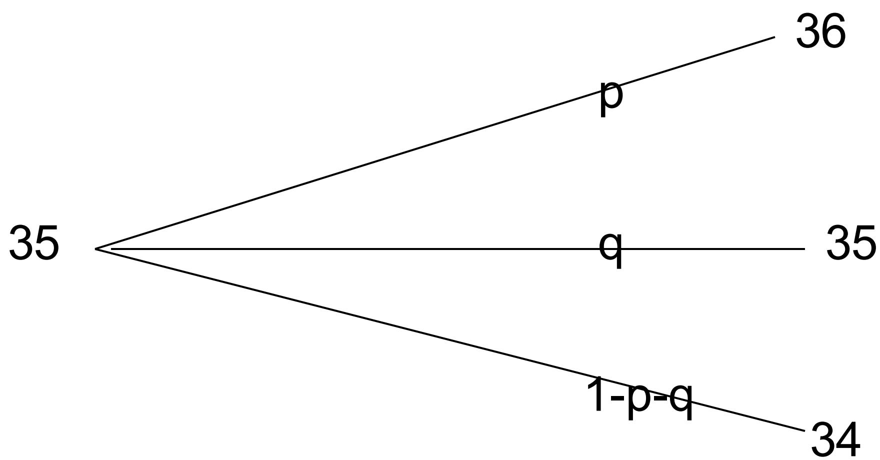


- 亦即美金確定會上漲到36TWDs
  - 套利機會存在→直接購買美金
  - 風險中立機率不存在: $36\times p+36\times(1-p)=35\Rightarrow 36=35$

矛盾

反例:Incomplete Market (風險中立機率不唯一)

- 假定美金有漲 ,持平,跌三種狀況如下:



$$36 \times p + 35 \times q + 34 \times (1 - p - q) = 35$$

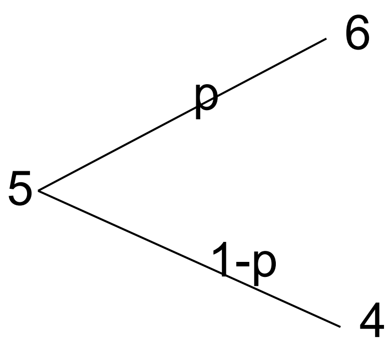
- 方程式有無限多組解 (Note: p, q,1-p-q >0)
- 無法直接使用求期望值的公式求價格

回顧

- 衍生性金融商品的價格=複製該商品的投資組合的成本
- 商品價格的評價,可化簡成在風險中立機率下,求期望值的問題
  - 以買權為例: $e^{-rT}\mathrm{E}\left(\mathrm{S(T)\text{-}X}\right)^{+}$ (假定利率r為常數)
  - 風險中立機率的存在且唯一的條件
    - 無套利機會且Market is complete.
- Delta hedge
  - Delta定義為 $=\dfrac{選擇權價格變化}{標的物價格變化}$
  - 在避險過程中,避險者會持有Delta部位標的物

課堂練習: Quanto選擇權

- Quanto選擇權牽涉到兩種不同貨幣的計價,在不同貨幣計價下,會有不同的風險中立機率
- 假定有A,B兩個國家,兩國無風險利率=0
- 假定A國有股票S,其單期的變化如下:

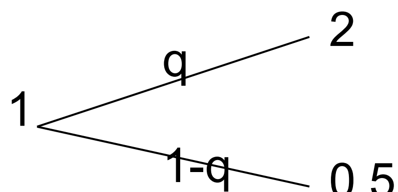


請求算風險中立機率 p

- 假定在A國有一個買權C在第一期到期履約價格為3,請求算C的價格

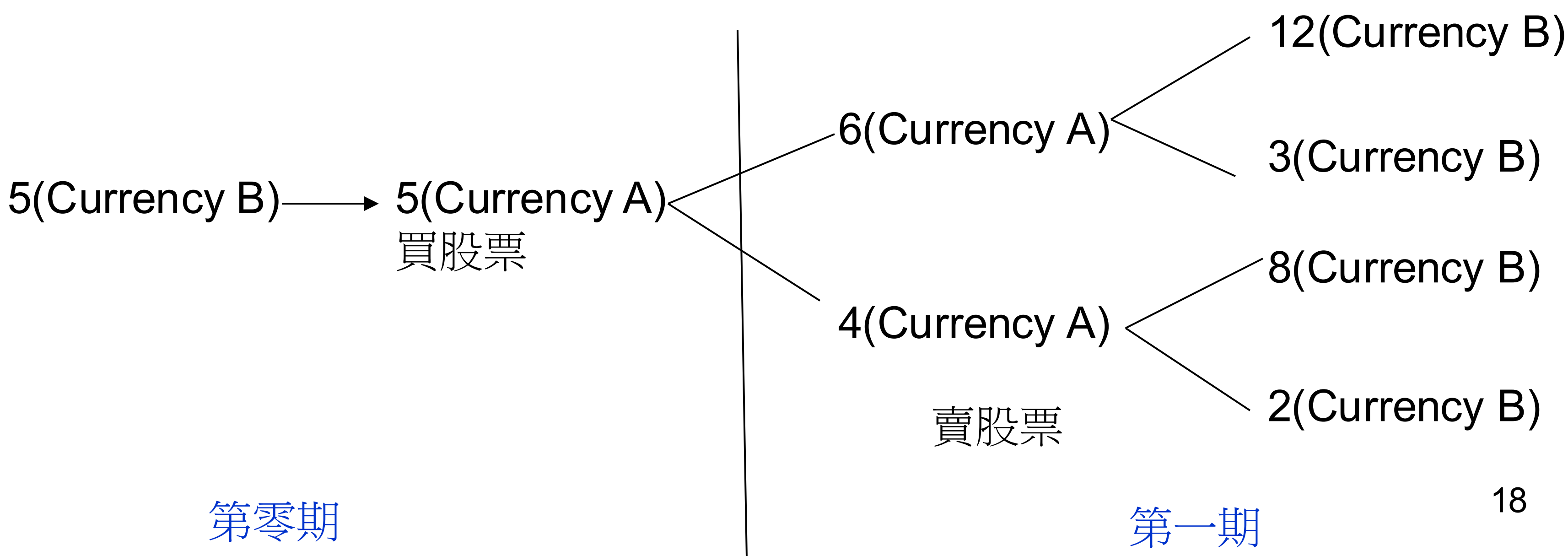
課堂練習: Quanto選擇權

- 考慮匯率波動問題,匯率變化(B國/A國)如下:



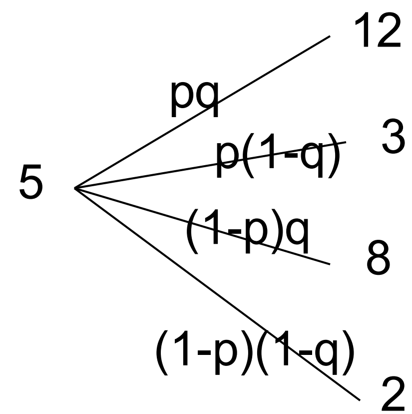
求算風險中立機率q

- 假定匯率波動和股價變化無關,考慮B國人購買A國的股票的價格波動如下:



課堂練習: Quanto選擇權

- B國人投資股票S的損益如下,請驗證其風險中立機率:

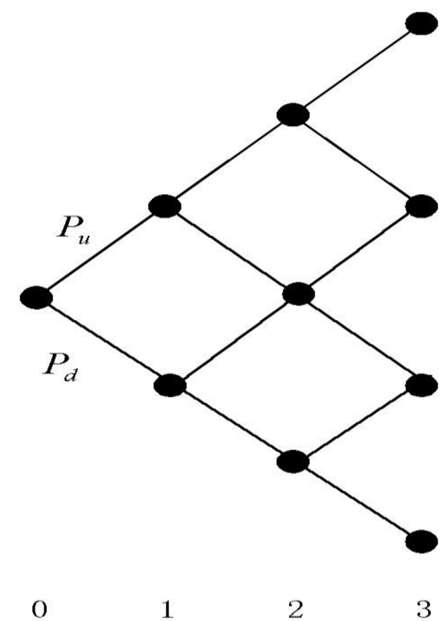


- 根據B國人的風險中立機率,計算買權C以B國貨幣計價的價格
  - 為了確保無套利機會,在第零期時:

C以A國貨幣計價價格×匯率＝C以B國貨幣計價價格

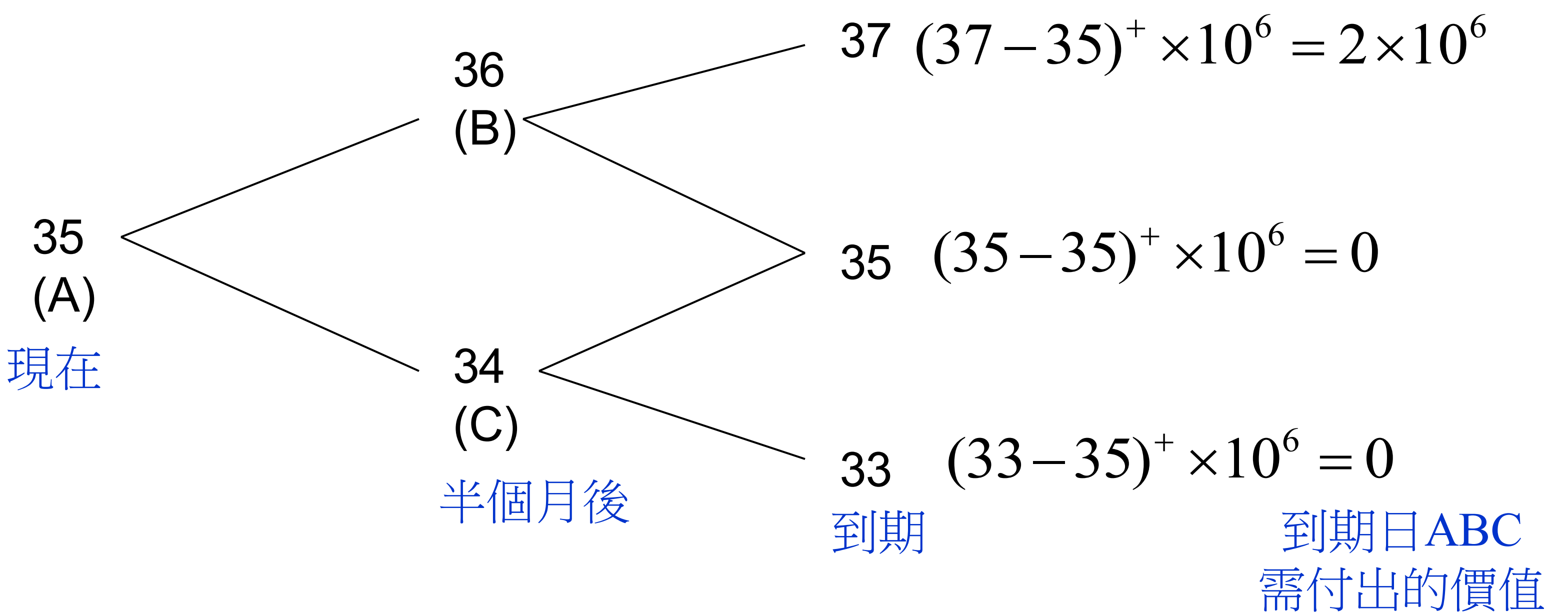
多期二元樹模型

- 考慮上述匯率波動模型,一個月後的USD匯價不應該只有36,34這兩種可能性
- 可以建立一個多期的模型,每一期所代表時間間隔縮短,則建構出的模型可更貼近實際狀況(右圖為一三期模型)



多期模型下的評價

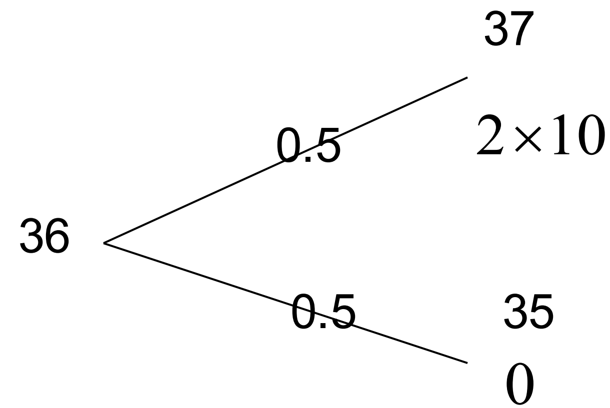
- 考慮買權在多期模型下的評價和避險模式
- 假定USD的匯率可用下述二元樹模型表示



- 必須考慮ABC在A,B,C三種狀況下如何應對

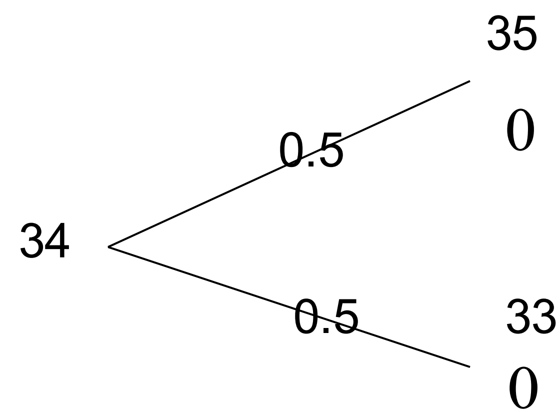
ABC公司評價避險策略分析

- 在B點上,該選擇權分析如下:



$$37x+y=2\times10^{6} \qquad x=10^{6}$$
$$\rightarrow$$
$$35x+y=0 \qquad y=-3.5\times10^{7}$$

- 在B點時,選擇權複製成本= $36\times10^{6}-3.5\times10^{7}=10^{6}$
- Delta= $\dfrac{2\times10^{6}-0}{37\times10^{6}-35\times10^{6}}=1$
- 在C點上,該選擇權分析如下:

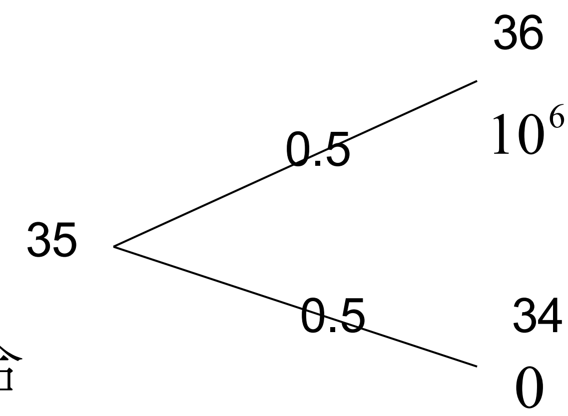


$$35x+y=0$$
$$\rightarrow \quad x=y=0$$
$$33x+y=0$$

- 在C點的選擇權複製成本和Delta=0

ABC公司評價避險策略分析(續)

- 在A點,該選擇權分析如下:
  - 當USD上漲到36
    - ABC投資組合價值需為 10^6
    - 利用 10^6 建構在B點上的投資組合
  - 同理,USD下跌至34
    - ABC投資組合價值為0



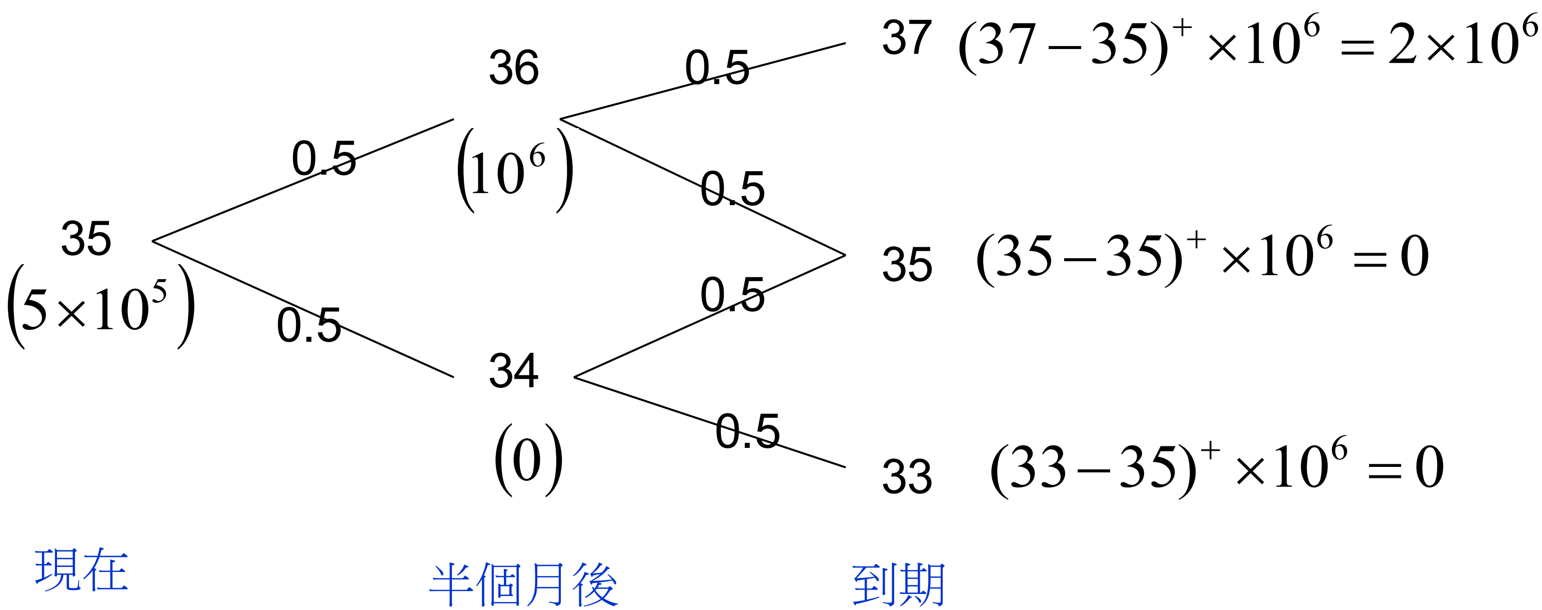
$$\begin{aligned} 36x + y &= 10^6 \\ 34x + y &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad x = 5\times10^5 \qquad y = -1.7\times10^7$$

  - 期初權利金應為 $35\times5\times10^5 - 1.7\times10^7 = 5\times10^5$
  - Delta為0.5

ABC公司的動態避險策略

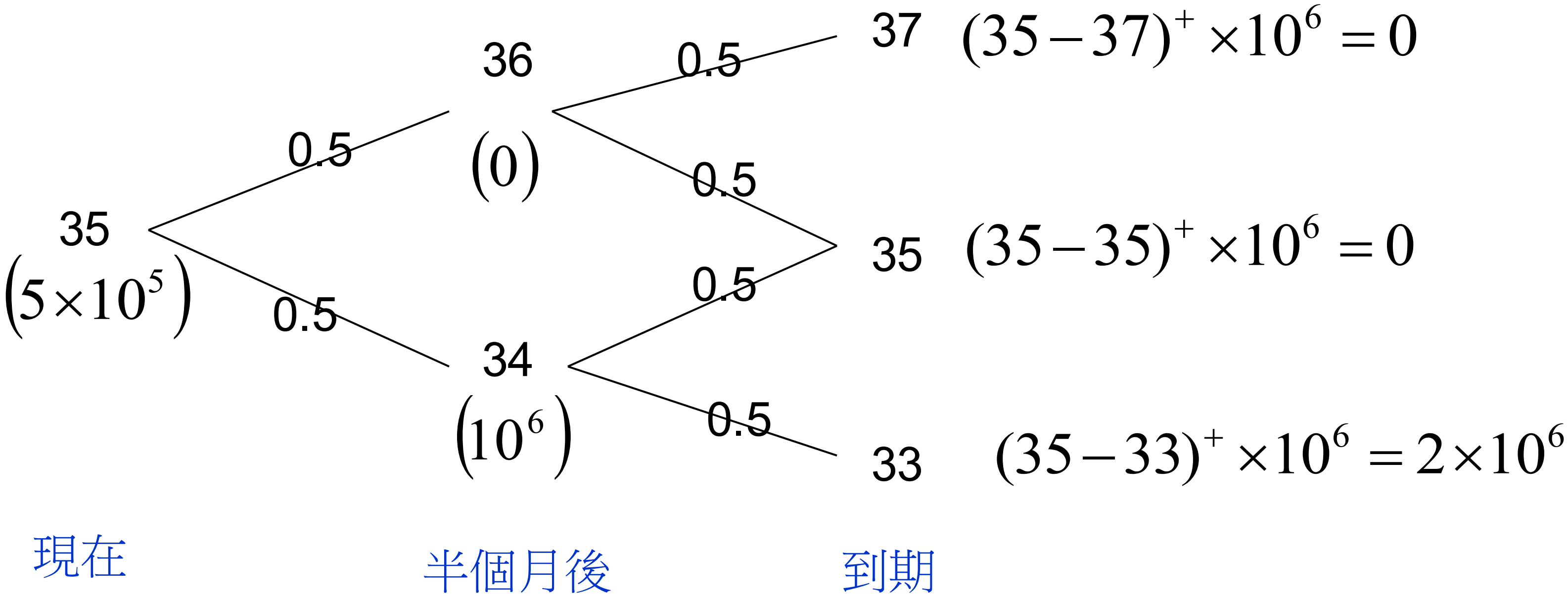
- 第零期:
  - ABC收5×10^5利金
  - Delta=0.5→ 購買 5×10^5s,借 T -1.7×10^7
- 第一期:
  - 假定美金上漲至36
    - 第零期的投資組合現值= 10^6
    - Delta=1 →購買 10^6s,借 -3.5×10^7
    - 新的投資組合價值=原來投資組合價值(**self finance**)
  - 假定美金下跌至34
    - 第零期的投資組合現值=0
    - Delta=0 →將原來投資組合平倉

使用風險中立機率處理多期格子樹模型下的選擇權評價問題



- 選擇權的價格= 5×10^{5}
- 從最後一期倒推的做法: **Backward Induction**

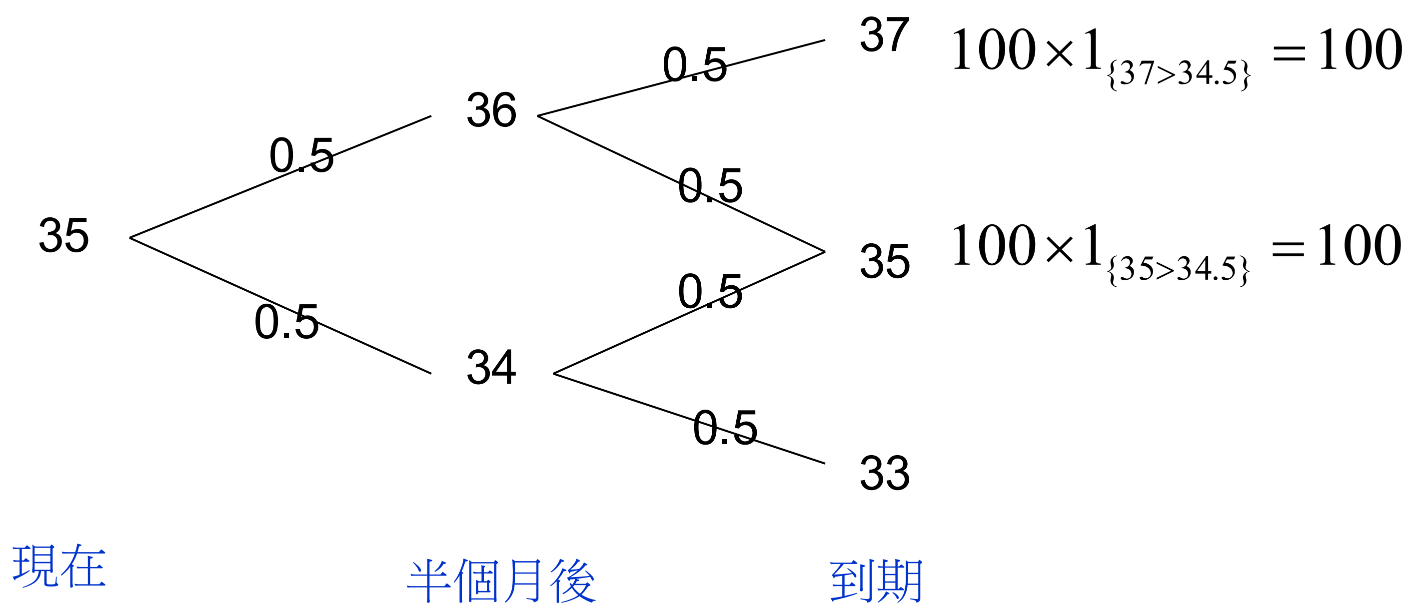
使用格子樹模型評價賣權



- 假定履約價格為35元
- 修改最後一期的報酬,再做backward induction.

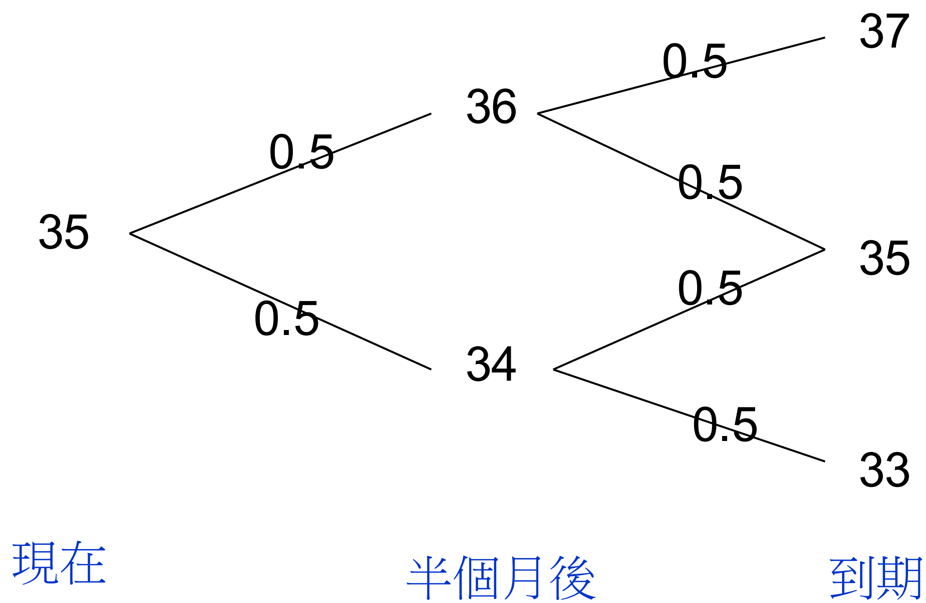
課堂練習: Digital 買權評價和避險

- 假定ABC公司想要賣出一個履約價格為34.5的Digital買權
  - Payoff=100 × 1{第二期匯率>34.5}
  - 請計算該買權的價格



課堂練習: Digital 買權評價和避險

- 請計算ABC公司在不同時間點的避險策略
  - x USDs, y TWDs
    - 37x+y=100 → x=0, y=100
    - 35x+y=100

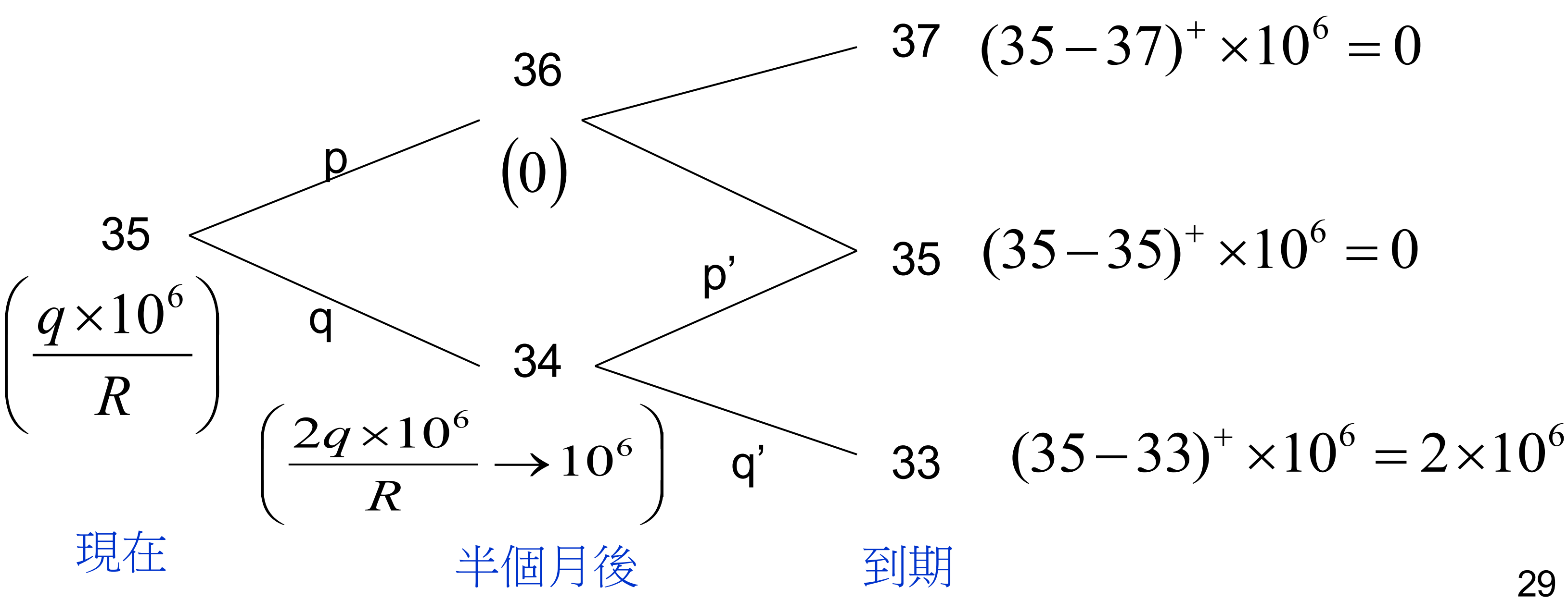


$$100\times 1_{\{37>34.5\}}=100$$

$$100\times 1_{\{35>34.5\}}=100$$

美式選擇權的評價

- 美式選擇權可在到期日前提前履約
  - 在每一個節點上都必需判斷是否提前履約
- 假定一期的折現因子用R(>1)表示,美式賣權可評價如下 ($p+q=p'+q'=1, q, q'<0.5$)



Homework

- A stock price is currently \$40. Over each of the next two three-month periods it is expected to go up by 10% or down by 10%. The risk-free interest rate is 12% per annum with continuous compounding.

(1) What is the value of a six-month European put with a strike price of \$42?

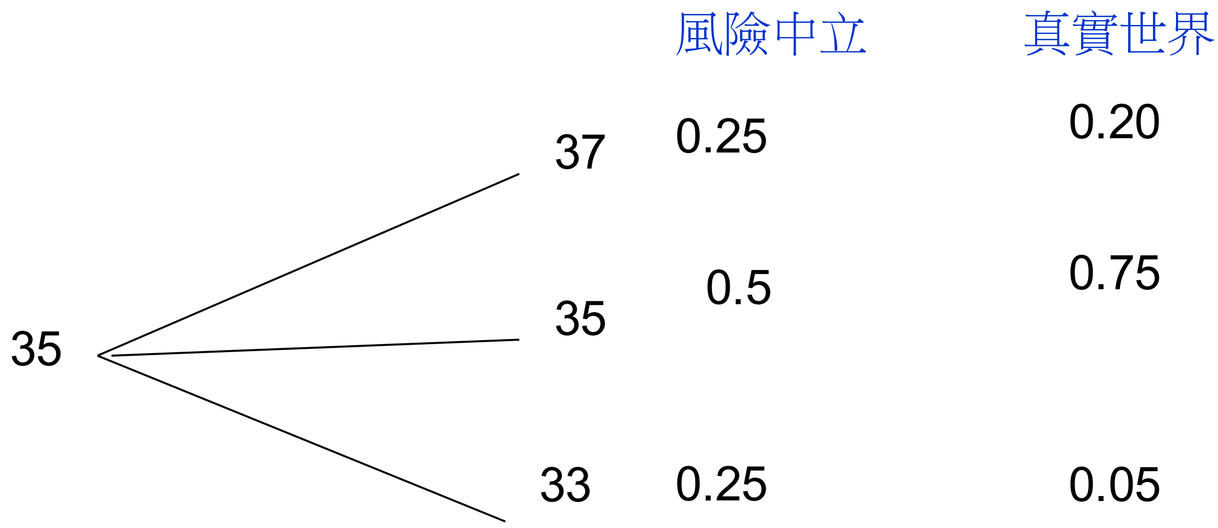
(2) What is the value of a six-month American put with a strike price of \$42?

(3) Determine the hedging strategies for each option at each step of the tree.

比較風險中立機率/真實世界機率

- 風險中立機率 (Risk Neutral Probability)
  - 虛擬機率
  - 存在且唯一要件：無套利且市場complete
  - 商品的報酬率=無風險利率
  - 適用範圍：衍生性金融商品評價
- 真實世界機率(Real World Probability)
  - 可藉由觀察市場資料而推論其機率結構
  - 商品報酬率不見得等於無風險利率(超額報酬)
  - 可適用範圍：效用的計算(Like CAPM), VaR

簡易範例



- 風險中立： $0.25 \times 37 + 0.5 \times 35 + 0.25 \times 33 = 35$
- 真實世界：95%信心水準下VaR=2(=35-33)

在格子樹模型上評價新奇選擇權

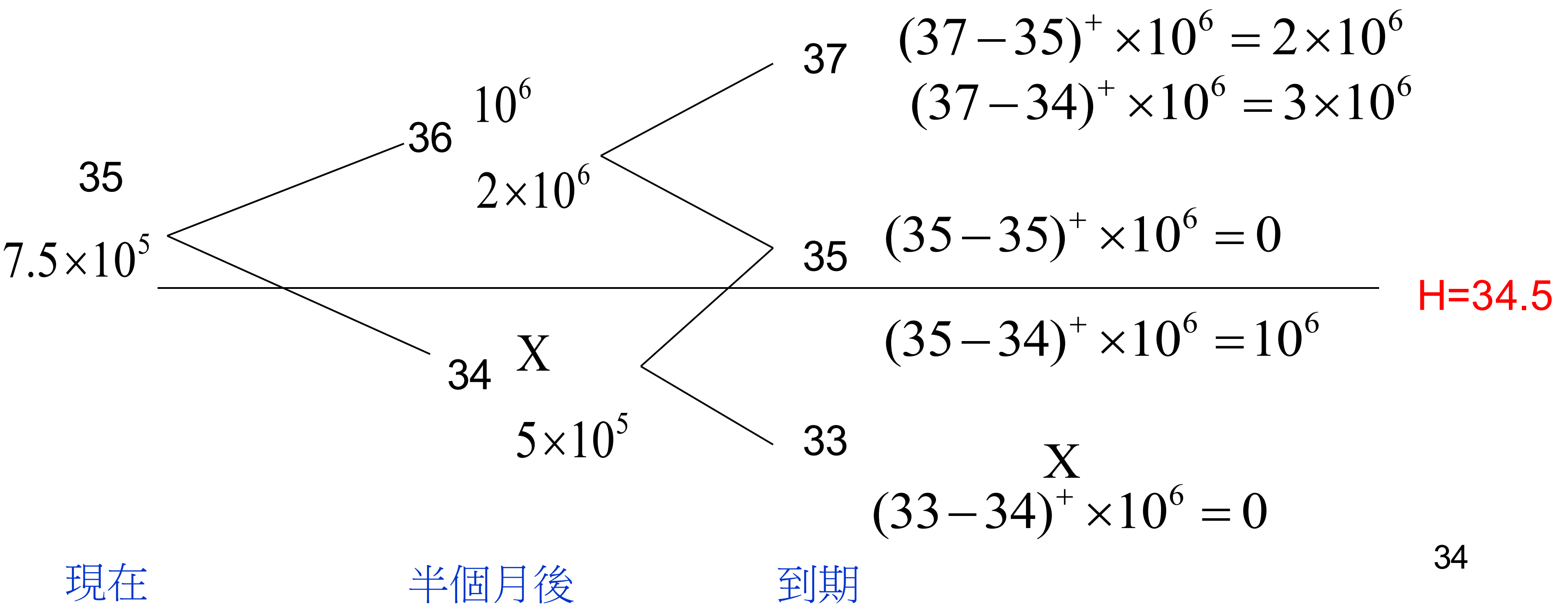
- 新奇選擇權的價格常會受標的物的價格路徑而影響
  - 重設選擇權(Reset option):履約價格會在標的物價格碰到某一界限時重設 $\text{payoff} = \begin{cases} (S(T)-X)^+ & \text{if } S(t)\geq H \quad \forall t\in(0,T) \\ (S(T)-B)^+ & \text{if } \exists t\in(0,T) \quad S(t)<H \end{cases}$
  - 回顧型選擇權(Lookback option):履約的payoff受標的物歷史最高或最低價影響 $S^*(T)=\max(S(t), t\in(0,T))$

    $$\text{payoff} = (S^*(T)-X)^+$$

- 在格子樹模型上,可在每個節點上加上適當的狀態變數,來記憶不同狀況下的選擇權價格

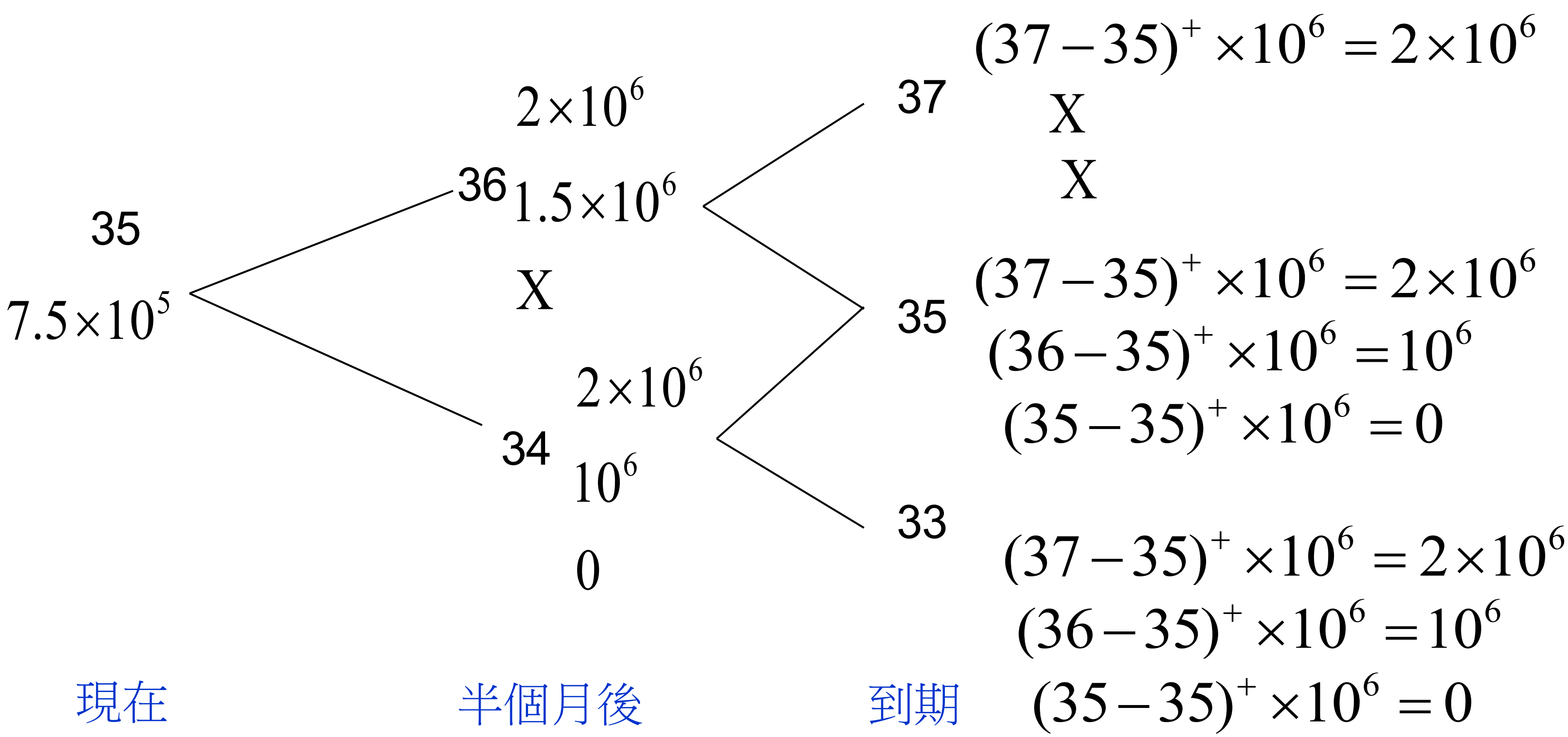
重設買權評價

- 選擇權在時間t的價格,受到標的物價格在時間t之前是否碰觸預設價格H影響→每個節點最多需放入兩個狀態變數
- 以上述選擇權為例,假定H=34.5,重設的履約價格為34,則評價過程如下:



回顧型賣權評價

- 選擇權在時間t的價格,受到標的物價格在時間t之前曾經到達的最高價格影響
- 以上述兩期的二元樹為例,可能最高價格為35,36,37 →每個節點最多需放三個狀態變數



Homework
亞式選擇權

- 亞式買權的到期日payoff= $(標的物平均價格 - X)^{+}$
- 利用上述兩期模型,計算亞式選擇權的平均價格