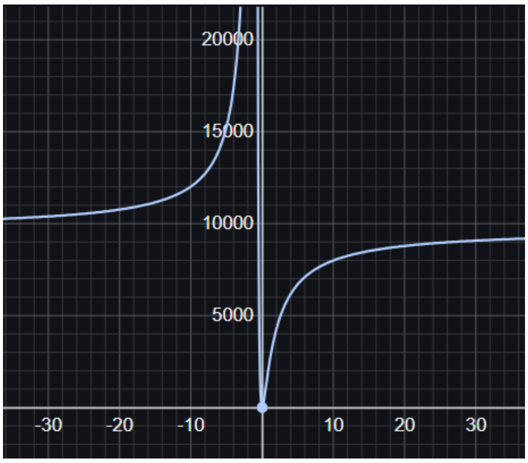
財務工程導論 作業一

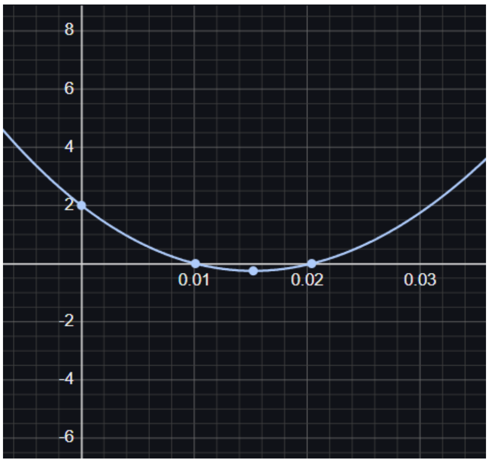
111511141 賴昱凱

一、碰到的問題&程式跑完之截圖

由本題 IRR 方程式：

$$f(r) = 9702 - \frac{19700}{(1+r)} + \frac{10000}{(1+r)^2}$$





此方程式為 r 的二次方程式，可知 r 最多有兩個解，因此若直接使用 Bisection Method 可能會有**兩種不同的答案**。且將圖畫出後，會發現此二次方程式的圖形大多都在 f(r) = 0 以上，負值十分稀有，很難找到適當的初始值，大部分情況都會出現「f(low) * f(high) > 0」。

二分法 (Bisection Method)：

- 先選取 low、high 兩個初始值。
- 若 f(low)和 f(high)沒有變號，Bisection Method 將無法找到 IRR，但也有一種可能是多個解皆在 low 及 high 之間，導致 f(low)及 f(high)同號，這就是為何 Bisection Method 通常適用於單調函數。
- 需要事先知道含有根的區間，才能找到解答。
- 計算後發現兩個答案分別於 1%以及 2%附近，因此將 r 的初始範圍定在 0 ~ 0.015 以及 0.015 ~ 0.03，進行 Bisection Method 計算。

Bisection Method 程式輸出結果截圖

```
bisection method
1. IRR = 1.0101 %
2. IRR = 2.04082 %
```

二、Newton method 驗證結果

$$r_{k+1} = r_k - \frac{f(r_k)}{f'(r_k)}$$

其中

$$f(r) = 9702 - \frac{19700}{(1+r)} + \frac{10000}{(1+r)^2}$$

$$f'(r) = \frac{19700}{(1+r)^2} - 2 \times \frac{10000}{(1+r)^3}$$

牛頓法 (Newton Method)：

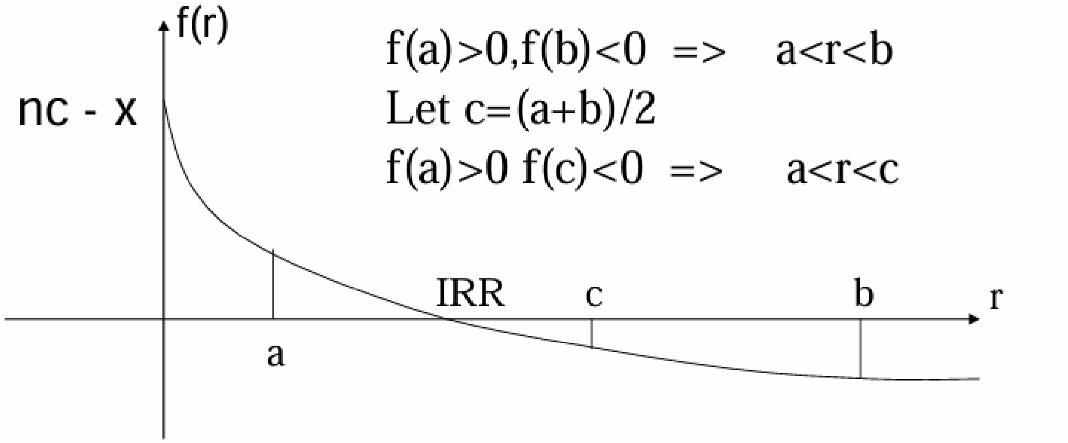
- 若初始值選擇不當，計算過程可能會發散，特別是在 f’(r) ≈ 0 時，可能導致出現無限大值，程式將輸出「f’(r) = 0」。
- 當方程式有多個解時，不同的初始值可能導致不同的答案。

Newton Method 程式輸出結果截圖

```
newton method
1. IRR = 1.0101 %
2. IRR = 2.04082 %
```

三、解釋兩者差別

(1) 二分法 (Bisection Method)



此方法是利用等式成立時圖形將經過 f(r) = 0 的特性，將 IRR 一直包在 a、b (異號)之間，並計算 a、b 中點 c 的 f(c)，若 f(c)與 f(a)同號，則將 a 點變為 c 點；反之，若 f(c)與 f(b)同號，則將 b 點變為 c 點。重複此動作就可以保證收斂到 f(r) = 0 的點，也就是 IRR。

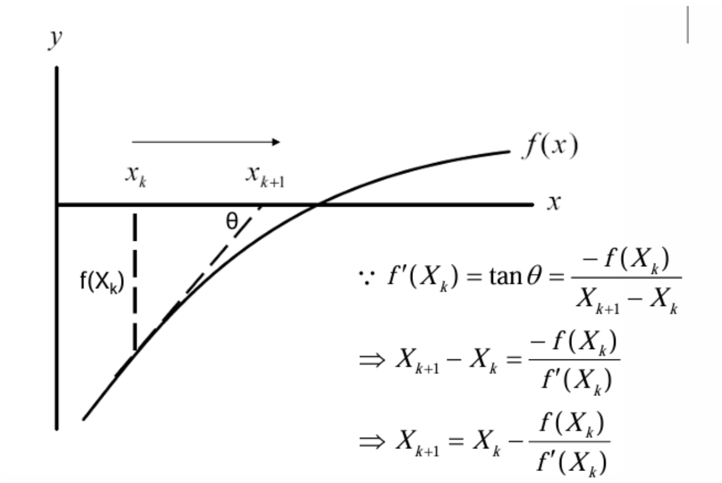
優點：

- 只要 f(low)和 f(high)異號，就一定能夠收斂。
- 不需要計算方程式的導數 f'(r)，計算量小。
- 即是初始值選的偏差較多，仍然能夠收斂，穩定性較高。

缺點：

- 收斂速度較慢，收斂階數為線性(O(logN))。

(2) 牛頓法 (Newton's Method)



If $f(X_{k+1})=0$, we can obtain X_{k+1} is yield

此方法是利用函數某點的切線斜率（也就是導數），計算該斜直線與 y=0 的交點，並更新下一點，一步步逼近 IRR。

優點：

- 收斂速度較快，當初始值選對時，收斂階數為平方收斂(O(N^2))。

缺點：

- 需要計算 f'(r)，計算量較大。
- 若初始值選擇不當，可能會發散。

總結來說，若已知根的範圍，可以確定找到 f(low)及 f(high)異號的初始值，就適合 Bisection Method。而若希望的是計算效率，那 Newton Method 效率更高，前提是要有合理的初始值選擇。