2025/08/05 の宿題

導関数

例題 1:

(1) 関数$f(x)$の導関数の定義式を書け。

(2) 次のxの関数の導関数を定義から求めよ。

$$(1) x \quad (2) x^5 \quad (3) \frac{1}{x} \quad (4) \frac{1}{x^3} \quad (5) \log(x+a) \quad (6) \cos x \quad (7) b^x$$

解答 1:

(1) 関数$f(x)$の導関数の定義式

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) 各関数の導関数

(1) $f(x) = x$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

(2) $f(x) = x^5$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

二項定理を用いて $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

(4) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 - (x+h)^3}{hx^3(x+h)^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 - \left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right)}{hx^3(x+h)^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{hx^3(x+h)^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2 - 3xh - h^2}{x^3(x+h)^3} \\
&= \frac{-3x^2}{x^3 \cdot x^3} = -3\frac{x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}
\end{aligned}
$$

(5) $f(x) = \log(x+a)$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h+a) - \log(x+a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(\frac{x+h+a}{x+a}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{x+a}\right) \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{\frac{h}{x+a}} \\
&= \frac{1}{x+a} \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{\frac{h}{x+a}} \\
&= \frac{1}{x+a} \cdot 1 = \frac{1}{x+a}
\end{aligned}
$$

(6) $f(x) = \cos x$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= -\lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= -\sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\
&= -\sin x \cdot 1 = -\sin x
\end{aligned}
$$

(7) $f(x) = b^x$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} \\
&= b^x \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} \\
&= b^x \log b
\end{aligned}
$$

ここで $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b$ を用いた。

実際に、$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b$ であることを示すと： $b^h = e^{h \log b}$ なので、

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h \log b} \cdot \log b \\
&= \log b \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h \log b}
\end{aligned}
$$

$t = h \log b$ とおくと、$h \to 0$ のとき $t \to 0$ であり、

$$
\lim_{h \to 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h \log b} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1
$$

したがって、$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b \cdot 1 = \log b$

例題 2:

次の関数をxで微分しなさい。

$$(1) x^3 \quad (2) xe^x \quad (3) x\log x \quad (4)\sin x \quad (5)\cos x$$
$$(6)\tan x \quad (7)\log(3x^2+4) \quad (8)\log(\sin x)$$

解答 2:

(1) $(x^3)' = 3x^2$

(2) $(xe^x)'$ （積の微分法）

$$(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^{x(1+x)}$$

(3) $(x\log x)'$ （積の微分法）

$$(x\log x)' = (x)'\log x + x(\log x)' = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(6) $(\tan x)'$

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\sin\frac{x}{\cos}x\right)' \\ &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

(7) $(\log(3x^2+4))'$ （合成関数の微分法）

$$(\log(3x^2+4))' = \frac{1}{3x^2+4}\cdot(3x^2+4)' = \frac{1}{3x^2+4}\cdot 6x = \frac{6x}{3x^2+4}$$

(8) $(\log(\sin x))'$ （合成関数の微分法）

$$(\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

例題 3:

次の関数をxについて積分せよ。

$(1)\dfrac{1}{3x+2}$ $(2)\log x$ $(3)xe^x$ $(4)\tan x$ $(5)\dfrac{6x}{3x^2+4}$ $(6)\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $(7)\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解答 3:

(1) $\int \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x$

$u=3x+2$ とおくと、$\mathrm{d}u=3\,\mathrm{d}x$ より $\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\log|u|+C=\frac{1}{3}\log|3x+2|+C$$

(2) $\int \log x\,\mathrm{d}x$ （部分積分を使用）

$\int \log x\cdot 1\,\mathrm{d}x$ において、$\log x$ を微分し、1 を積分する

$$\begin{aligned}\int \log x\,\mathrm{d}x&=\log x\cdot x-\int(\log x)'\cdot x\,\mathrm{d}x\\&=x\log x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x\\&=x\log x-\int 1\,\mathrm{d}x\\&=x\log x-x+C\end{aligned}$$

(3) $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ （部分積分を使用）

$\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$ において、x を微分し、e^x を積分する

$$\begin{aligned}\int xe^x\,\mathrm{d}x&=x\cdot e^x-\int(x)'\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\&=xe^x-\int 1\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\&=xe^x-e^x+C\\&=e^{x(x-1)}+C\end{aligned}$$

(4) $\int \tan x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

$(\cos x)'=-\sin x$ を用いて、

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\log|\cos x| + C$$
$$= \log|\sec x| + C$$

(5) $\int \frac{6x}{3x^2+4}\,\mathrm{d}x$ （分子が分母の微分）

$(3x^2+4)' = 6x$ であることを利用して、

$$\int \frac{6x}{3x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(3x^2+4)'}{3x^2+4}\,\mathrm{d}x = \log|3x^2+4| + C$$

(6) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$(\sin x)' = \cos x$ であることを利用して、

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \log|\sin x| + C$$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ （標準形の逆三角関数）

これは逆三角関数の標準形である。$x = a\sin\theta$ の置換を用いると： $\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int \mathrm{d}\theta = \theta + C$$
$$= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$