物理学で出てくる偏微分方程式

Contents

1. 2 階偏微分方程式

定理: 2 階線形偏微分方程式 $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ... = 0$ において、判別式 $\Delta = B^2 - 4AC$ により分類される：
- $\Delta > 0$: 双曲形 (hyperbolic)
- $\Delta = 0$: 放物形 (parabolic)
- $\Delta < 0$: 楕円形 (elliptic)

1.1. 特性曲線を使う PDE

1.1.1. 双曲形 (Hyperbolic Type) - 異方性媒質の波

例題: 次の偏微分方程式を解け

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

解答: 判別式$B^2 - AC = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 \cdot 2 = \frac{1}{4} > 0$よりこれは双曲形である。

特性曲線の式は

$$dy^2 + 3dxdy + 2dx^2 = 0 \tag{2}$$

であるので

$$(dy + dx)(dy + 2dx) = 0 \tag{3}$$

$dy + dx = 0$より$d(y + x) = 0, \therefore x + y = c_1$

$dy + 2dx = 0$より$d(y + 2x) = 0, \therefore y + 2x = c_2$

したがって$\xi = x + y, \quad \eta = 2x + y$とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\frac{\partial}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 2\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial \xi}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{4}
$$

これを元の式に代入して

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{5}
$$

これを解くと

$$
u = f(\xi) + g(\eta) = f(x+y) + g(2x+y) \tag{6}
$$

注意: 双曲形 PDE は波動方程式の一般化であり、特性曲線上で情報が伝播する。この例では 2 つの特性曲線 $x + y = \mathrm{const}$ と $2x + y = \mathrm{const}$ が存在する。