

宇宙マイクロ波背景放射(CMB)による宇宙論パラメータ推定の物理

1. はじめに

宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) は、現代宇宙論の最も重要な観測的支柱の一つである。これは、宇宙が誕生してから約 38 万年後、高温・高密度のプラズマ状態から中性の原子が形成され、光が初めて宇宙を直進できるようになった「宇宙の晴れ上がり」の時代に放たれた光の名残である。CMB は、天球上のあらゆる方向からほぼ一様な温度 (約 2.725 K) で観測されるが、その温度には 10^{-5} 程度の微小な異方性 (ゆらぎ) が存在する。

この温度異方性は、初期宇宙における物質密度のわずかなゆらぎを反映している。このゆらぎが、後に重力不安定性によって成長し、現在の宇宙に見られる銀河や銀河団などの大規模構造を形成したと考えられている。したがって、CMB の温度異方性を精密に測定し、その統計的性質を理論モデルと比較することで、宇宙の基本的な性質を記述する宇宙論パラメータを驚異的な精度で決定することができる。

本稿では、CMB の温度異方性のパワースペクトルを用いて、どのようにして宇宙のエネルギー組成 (バリオン、ダークマター、ダークエネルギーの割合) や、宇宙の曲率、膨張率といった根源的なパラメータが導出されるのか、その物理的な過程を大学院レベルの基礎から丁寧に解説する。特に、初期宇宙のプラズマ中での音響振動の物理と、それが CMB パワースペクトルの特徴的なピーク構造をどのように形成するかに焦点を当てる。

2. 宇宙論の基礎

CMB の物理を理解するためには、まずその背景となる標準宇宙論の枠組みを把握する必要がある。

2.1. フリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー (FLRW) 計量

一様・等方な宇宙を記述する最も一般的な時空の計量は、FLRW 計量である。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

ここで、 $a(t)$ はスケール因子 (宇宙の大きさの指標)、 K は空間の曲率を表す定数 ($K = 1, 0, -1$ はそれぞれ閉じた、平坦な、開いた宇宙に対応する) である。

2.2. フリードマン方程式

FLRW 計量をアインシュタインの重力場方程式に代入すると、宇宙の膨張ダイナミクスを記述するフリードマン方程式が得られる。

$$H^2 \equiv \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{K}{a^2} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i)$$

ここで H はハッブルパラメータ、 ρ_i と p_i は宇宙の成分 i (放射、物質、ダークエネルギーなど) のエネルギー密度と圧力である。エネルギー運動量保存則から、各成分のエネルギー密度は $\rho'_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0$ に従う。

宇宙論パラメータは、臨界密度 $\rho_c = 3 \frac{H_0^2}{8\pi G}$ (H_0 は現在のハッブルパラメータ) で規格化した密度パラメータ $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ を用いて表現されることが多い。これを用いると、第 1 フリードマン方程式は以下のように書き換えられる。

$$1 = \sum_i \Omega_{i(t)} + \Omega_{K(t)}$$

ここで $\Omega_K = -\frac{K}{a^2 H^2}$ は曲率項である。CMB の観測から、現在の宇宙は $\Omega_K \approx 0$ 、すなわち極めて平坦であることが示されている。

3. CMB 温度異方性の物理

3.1. 宇宙の晴れ上がりと最終散乱面

初期宇宙では、温度と密度が非常に高かったため、物質は陽子や電子が電離したプラズマ状態にあった。この状態では、光子（CMB となる光）は電子とのトムソン散乱を頻繁に繰り返すため、遠くまで進むことができない。宇宙が膨張し、温度が約 3000 K まで下がると、陽子と電子が結合して中性の水素原子が形成される（再結合）。これにより、光子は電子に散乱されなくなり、宇宙空間を自由に直進できるようになる。この現象を「宇宙の晴れ上がり」または「光子の脱結合（デカップリング）」と呼ぶ。

我々が観測する CMB 光子は、この晴れ上がりの時代に、我々に向かって最後に散乱された光子である。この光子が放射された時空上の球面を「最終散乱面（Last Scattering Surface）」と呼ぶ。CMB の温度異方性は、この最終散乱面における温度の場所的依存性を反映している。

3.2. 宇宙摂動論とザックス・ヴォルフ効果

最終散乱面における温度ゆらぎ $\Delta \frac{T}{T}$ は、主に 3 つの効果の重ね合わせとして生じる。

1. **固有温度ゆらぎ ($\Delta \frac{T_i}{T}$):** 光子・バリオン流体自体の温度のゆらぎ。
2. **ドップラー効果:** 流体の速度場によるドップラーシフト。
3. **ザックス・ヴォルフ (SW) 効果:** 重力ポテンシャルのゆらぎ Φ 。光子は重力ポテンシャルの井戸から這い上がる際にエネルギーを失う（赤方偏移する）。

これらを合わせると、観測される温度異方性は、ニュートンゲージでは以下のように書ける。

$$\left(\Delta \frac{T}{T}\right)(\hat{n}) = \left(\Delta \frac{T_i}{T}\right)_{\text{rec}} + \hat{n} * (v)_b' |_{\text{rec}} + \Phi|_{\text{rec}}$$

ここで \hat{n} は視線方向の単位ベクトル、 $(v)_b$ はバリオンの速度場、添字 “rec” は再結合時を表す。SW 効果は、特に大きな角度スケール（低 l ）で支配的となる。

4. 音響振動の物理

CMB パワースペクトルの特徴的なピーク構造は、宇宙の晴れ上がり以前の光子・バリオン流体中を伝播した音波によって形成される。

4.1. 光子・バリオン流体の振動子モデル

ダークマターが形成する重力ポテンシャルの井戸に、光子とバリオンからなる流体が引き込まれる。しかし、光子には強い放射圧があるため、これが重力に抵抗し、流体を押し返す。この重力と放射圧のせめぎ合いにより、流体はまるでバネのように振動を開始する。これが「音響振動」である。

この系は、ダークマターの重力ポテンシャル Ψ を外力とする、バリオンの変位 δ_b に関する強制振動子としてモデル化できる。タイトカップリング近似（光子とバリオンが一体として振る舞うと仮定する）の下で、フーリエ空間におけるゆらぎの方程式は以下のように簡略化される。

$$((1+R)\delta_\gamma)' + H(1+R)\delta_\gamma + k^2 c_s^2 \delta_\gamma = F(k, t)$$

ここで δ_γ は光子の密度ゆらぎ（温度ゆらぎの 4 倍）、 $R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$ はバリオンと光子の運動量密度の比、 c_s は音速、 F は重力ポテンシャルによる駆動項である。

音速 c_s は、バリオンの存在によって光速よりわずかに遅くなる。

$$c_s^2 = \frac{c^2}{3(1+R)}$$

4.2. 音響ピークの形成

宇宙の晴れ上がりの瞬間に、各スケール（波数 k ）の音波はその位相で「凍結」され、CMB の温度異方性として刻まれる。パワースペクトルにピークが現れるのは、晴れ上がりの時刻 t_{rec} までに、振動の振幅が最大（圧縮または膨張のピーク）に達したスケールである。

ピークの条件は、音が晴れ上がりまでに進む距離、すなわち「音響ホライズン」 r_s と、ゆらぎの物理的スケール $\lambda = 2\frac{\pi}{k}$ の関係で決まる。 m 番目のピークは、以下の条件を満たす波数 k_m に対応する。

$$k_m r_{s(t_{\text{rec}})} \approx m\pi, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{ここで } r_{s(t)} = \int_0^t c_s(t') d\frac{t'}{a(t')} \text{ である。}$$

- ・ 奇数番目のピーク ($m=1, 3, \dots$): 圧縮のピーク。流体が最も密な状態。
- ・ 偶数番目のピーク ($m=2, 4, \dots$): 膨張のピーク（希薄）。流体が最も疎な状態。

5. パワースペクトルと宇宙論パラメータ

CMB の温度異方性 $\Delta T(\hat{n})$ は、天球上の方向 \hat{n} の関数である。これを球面調和関数 $Y_{l,m}(\hat{n})$ を用いて展開することで、異なる角度スケールに対応する成分を分離することができる。

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_{l,m}(\hat{n})$$

ここで、 $a_{l,m}$ は各モード (l, m) の振幅を表す係数である。 $l=0$ （モノポール）は CMB の平均温度に対応し、 $l=1$ （ダイポール）は主に我々の銀河系の運動によるドップラー効果を反映しているため、宇宙論的な情報は $l \geq 2$ の多重極モーメントから得られる。

宇宙論の標準モデルでは、初期宇宙のゆらぎは統計的に等方的かつガウス的であると仮定される。この仮定のもとでは、 $a_{l,m}$ の統計的性質は、その分散によって完全に記述される。角度パワースペクトル C_l は、この分散のアンサンブル平均として定義される。

$$\langle a_{l,m} a_{l',m'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l$$

C_l は、多重極モーメント l 、すなわち角度スケール $\theta \approx 180 \frac{\text{deg}}{l}$ における温度ゆらぎのパワー（振幅の 2 乗）を表す。この C_l を l の関数としてプロットしたものが CMB パワースペクトルであり、その形状（ピークの位置、高さ、全体の形）を理論予測と比較することで、宇宙論パラメータを精密に決定することができる。

5.1. 第 1 ピークの位置: 宇宙の曲率 Ω_K

CMB パワースペクトルの最も顕著な特徴は、一連の音響ピークである。特に第 1 ピークの位置 l_1 は、宇宙の幾何学、すなわち空間の曲率 Ω_K を決定する上で極めて重要である。

第 1 ピークは、4 節で述べた音響振動のうち、宇宙の晴れ上がりの瞬間に初めて最大の圧縮状態に達した最大のスケールに対応する。このスケールは「音響ホライズン」 $r_{s(t_{\text{rec}})}$ によって特徴づけられる。これは、宇宙誕生から晴れ上がり時刻 t_{rec} までに音波が伝播できた最大の物理的距離である。

$$r_{s(t_{\text{rec}})} = \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{c_s(t) dt}{a(t)}$$

我々が観測するのは、この物理的な長さ r_s が、最終散乱面から我々までの距離を経て、地球上でどれくらいの角度 θ_s に見えるかである。この見かけの角度は、音響ホライズンをその角直径距離 $d_{A(t_{\text{rec}})}$ で割ることで与えられる。

$$\theta_s = \frac{r_s(t_{\text{rec}})}{d_{A(t_{\text{rec}})}}$$

角直径距離 d_A は、過去の光源までの距離をその見かけの角度サイズから定義するものであり、時空の幾何学、すなわち宇宙の膨張史と空間の曲率に強く依存する。フリードマン方程式から、赤方偏移 z_{rec} にある最終散乱面までの角直径距離は次のように計算される。

$d_{A(z)} = \frac{1}{1+z} \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} \text{sinn} \left(H_0 \sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right)$ ここで、 $\text{sinn}(x)$ は曲率 K の符号に応じて、 $K = +1$ (閉じた宇宙) の場合は $\sin(x)$ 、 $K = 0$ (平坦な宇宙) の場合は x 、 $K = -1$ (開いた宇宙) の場合は $\sinh(x)$ となる。

また、ハッブルパラメータ $H(z)$ は、宇宙の各成分の密度パラメータ Ω_i を用いて次のように表される。 $H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}$ ここで、 $\Omega_r, \Omega_m, \Omega_K, \Omega_\Lambda$ はそれぞれ放射、物質、曲率、ダークエネルギーの現在の密度パラメータである。この $H(z)$ の積分によって $d_{A(z)}$ が計算されるため、角直径距離は宇宙のエネルギー組成と曲率に強く依存する。

パワースペクトルのピークは、 l 空間では $l \approx \frac{\pi}{\theta_s}$ の整数倍の位置に現れる。したがって、第 1 ピークの位置 l_1 は、

$$l_1 \approx \frac{\pi}{\theta_s} = \pi \left(\frac{d_{A(t_{\text{rec}})}}{r_s(t_{\text{rec}})} \right)$$

となる。 r_s は初期宇宙の物理 ($\Omega_b h^2, \Omega_m h^2$) で決まるため、もし宇宙の曲率が異なれば、 d_A の値が変化し、それによって l_1 の位置が大きくずれることになる。

- ・ **平坦な宇宙 ($\Omega_K = 0$):** 光は直進し、 l_1 は観測値と一致する。
- ・ **閉じた宇宙 ($\Omega_K > 0$):** 空間が正の曲率を持つため、光はレンズ効果で集光され、見かけの角度 θ_s は大きくなる。その結果、 l_1 はより小さな値 (低 l 側) にシフトする。
- ・ **開いた宇宙 ($\Omega_K < 0$):** 空間が負の曲率を持つため、光は発散し、見かけの角度 θ_s は小さくなる。その結果、 l_1 はより大きな値 (高 l 側) にシフトする。

WMAP や Planck 衛星による観測で $l_1 \approx 220$ という値が極めて高い精度で測定された。この値は、平坦な宇宙モデルの予測と驚くほどよく一致しており、我々の宇宙が $\Omega_K \approx 0$ 、すなわち $\Omega_{\text{tot}} = \sum_i \Omega_i \approx 1$ であることの強力な証拠となっている。

5.2. ピークの高さの比: バリオン密度 $\Omega_b h^2$

音響ピークの相対的な高さ、特に奇数番目のピーク (圧縮) と偶数番目のピーク (膨張) の高さの比は、宇宙のバリオン密度 $\Omega_b h^2$ を測定するための強力なプローブとなる。

4.1 節で見たように、音響振動はダークマターの重力ポテンシャルの井戸の中で起こる光子・バリオン流体の振動である。バリオンは質量を持つため、重力によってポテンシャルの中心に引き寄せられる。一方、光子は放射圧によって外へ向かおうとする。この力のバランスが振動を引き起こす。

バリオンの質量は、振動の平衡点をずらす効果を持つ。重力ポテンシャルを Φ とすると、バリオンは実効的に Φ を $(1+R)$ 倍深くしたポテンシャルを感じるように振る舞う (ここで $R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$)。これにより、流体が圧縮される局面 (奇数ピーク) では、バリオンの重力が圧縮をさらに助けるため、振幅が増大する。逆に、膨張する局面 (偶数ピーク) では、バリオンの重力が膨張にブレーキをかけるため、振幅が減少する。

この効果を模式的に示すと、温度ゆらぎの振幅 ΔT は、駆動項を F として、 $\Delta T(k, t_{\text{rec}}) \approx [\Delta T(k, 0) \cos(kr_s) + F_k]_{\text{SW}} - [R(k)F_k]_{\text{Baryon}}$ 第1項は初期条件と音波の伝播（SW効果を含む）、第2項がバリオンによる変調を表す。 $\cos(kr_s)$ の項がピークの位置を決め、 $kr_s = m\pi$ でピークとなる。

- ・ **奇数ピーク** ($m = 1, 3, \dots$): $\cos(kr_s) = -1$ 。圧縮のピーク。バリオン項が振幅を増強する。
- ・ **偶数ピーク** ($m = 2, 4, \dots$): $\cos(kr_s) = +1$ 。膨張のピーク。バリオン項が振幅を減衰させる。

したがって、**第1ピーク（圧縮）と第2ピーク（膨張）の高さの比** は、バリオンの量 $\Omega_b h^2$ に非常に敏感な関数となる。バリオンが多いほど、 R が大きくなり、偶数ピークは奇数ピークに比べて相対的に低くなる。観測されたピークの高さの比から、宇宙のバリオン量が全エネルギー密度の約5%であることが精密に決定された。

5.3. パワースペクトル全体の形状: 物質密度 $\Omega_m h^2$

パワースペクトルのピーク構造の全体的な振幅や形状は、宇宙の膨張史、特に放射優勢から物質優勢への移行期に敏感であり、これにより物質（バリオン+ダークマター）の総量 $\Omega_m h^2$ を知ることができる。

宇宙のエネルギー密度が放射（光子とニュートリノ）から物質（バリオンとダークマター）に移り変わる時代を「物質・放射等量期」と呼び、その赤方偏移を z_{eq} とする。このとき $\rho_r(z_{\text{eq}}) = \rho_m(z_{\text{eq}})$ であり、 $1 + z_{\text{eq}} = \frac{\Omega_m}{\Omega_r} \approx 2.4 \times 10^4 \Omega_m h^2$ $\Omega_m h^2$ が大きいほど、物質優勢の時代はより早く始まる。

この移行期は、重力ポテンシャル Φ の時間進化に決定的な影響を与える。

- ・ **放射優勢期** ($z > z_{\text{eq}}$): この時期、宇宙の膨張は放射によって支配されている。重力ポテンシャルの井戸に引き込まれる物質（ダークマター）の自己重力よりも、背景の放射圧が優勢であるため、地平線（ホライズン）内に入ってきたスケールのゆらぎのポテンシャルは、宇宙膨張によって減衰していく ($\Phi \rightarrow 0$)。
- ・ **物質優勢期** ($z < z_{\text{eq}}$): 物質が膨張を支配するようになると、密度ゆらぎの自己重力による成長が宇宙膨張を上回り、ポテンシャルは時間的にほぼ一定に保たれる ($\Phi \approx \text{const}$)。

この重力ポテンシャルの時間変化は、CMB 異方性に「Radiation Driving」または「前期積分ザックス・ヴォルフ効果」として痕跡を残す。等量期の直前にホライズン内に入ったスケールのゆらぎは、ポテンシャルが減衰する影響で、音響振動の振幅がブーストされる。この効果は、 z_{eq} の時期、すなわち $\Omega_m h^2$ に依存し、パワースペクトルの第3ピーク以降の相対的な高さを持ち上げる。したがって、 C_l の全体的な形状、特に第1ピークに対する第3ピーク以降の高さから、 $\Omega_m h^2$ を決定することができる。

5.4. 高 l 領域の減衰: シルク減衰

パワースペクトルを高 l 側（小さな角度スケール）へ見ていくと、ピークの振幅が急速に減衰していく領域がある。これは、光子の拡散によって微小スケールのゆらぎが洗い流される「シルク減衰（Silk damping）」または「光子の拡散減衰」と呼ばれる効果によるものである。

宇宙の晴れ上がりは瞬時に起こるわけではなく、有限の時間がかかる。その間、光子は電子とのトムソン散乱を繰り返しながらランダムウォークする。光子の平均自由行程 λ_p はゼロではないため、光子は高温・高密度の領域から低温・低密度の領域へと拡散することができる。

音響振動の波長 λ がこの拡散距離 d_D と同程度かそれより小さくなると、光子の拡散によって温度の山は崩され、谷は埋められて、ゆらぎは指数関数的に減衰する。減衰が顕著になる波数スケール k_D は、晴れ上がり時までの光子の累積拡散距離 $d_{D(t_{\text{rec}})}$ の逆数で与えられる。

$d_D^2(t) \approx \int_0^t \frac{\lambda_p(t') c dt'}{a^2}$ ここで $\lambda_p = \frac{1}{n_e \sigma_T}$ は光子の平均自由行程である。この減衰効果は、パワースペクトル C_l に $e^{\left\{-2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right\}}$ 、あるいは l 空間で $e^{\left\{-2\left(\frac{l}{l_D}\right)^2\right\}}$ という形の指数関数的なカットオフをもたらす。

減衰スケール l_D は、晴れ上がり時の宇宙の物理状態、特にバリオン密度 $\Omega_b h^2$ と全物質密度 $\Omega_m h^2$ に依存する。したがって、この減衰テールの形状を詳細に測定することで、これらのパラメータに対する別の独立な制限を与えることができる。

5.5. 低 l 領域: 後期積分ザックス・ヴォルフェ (ISW) 効果

パワースペクトルの最も大きな角度スケール（低 l ）領域では、別の物理効果が重要になる。宇宙が最近になってダークエネルギーによって加速膨張を始めると、重力ポテンシャルが再び時間変化を始める。これが CMB 異方性に新たなゆらぎを生み出す。これを「後期積分ザックス・ヴォルフェ (Integrated Sachs-Wolfe, ISW) 効果」と呼ぶ。

CMB 光子は、最終散乱面から我々に向かって進む長い旅の途中で、大規模構造が作る重力ポテンシャルの丘や谷を横切る。

- ・物質優勢の宇宙では、ポテンシャルは時間的にほぼ一定である。光子はポテンシャルの谷に入るときにエネルギーを得て青方偏移し、谷から出るときに同じだけのエネルギーを失って赤方偏移するため、正味のエネルギー変化はない。
- ・しかし、宇宙の膨張がダークエネルギーによって加速され始めると、光子が大規模な構造（超銀河団など）を横切っている間に、その構造自体の重力ポテンシャルが宇宙膨張によって浅くなる。その結果、光子は谷に入るときに得たエネルギーよりも、出るときに失うエネルギーの方が少なくなり、正味でエネルギーを得る（青方偏移する）。逆に、ボイド（大規模空洞領域）を横切る場合は、正味でエネルギーを失う（赤方偏移する）。

この効果は、光路上のポテンシャルの時間微分の積分として与えられる。 $(\Delta \frac{T}{T})_{\text{ISW}} = 2 \int_{t_{\text{rec}}}^{t_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$ この効果は、宇宙がダークエネルギー優勢になった比較的最近の時代（低赤方偏移）に起こるため、天球上では非常に大きな角度スケールに現れる。ISW 効果は、低 l 領域のパワースペクトルをわずかに増大させる。この効果の存在は、大規模構造の分布と CMB の温度マップの相関を調べることで検証されており、ダークエネルギー Ω_Λ の存在を支持する独立な証拠の一つとなっている。

6. 結論

CMB 温度異方性のパワースペクトルは、初期宇宙の物理過程の豊富な情報を含んだ「宇宙の指紋」である。そのピーク構造や形状を、宇宙論に基づいた理論モデルと比較することで、我々は宇宙を構成する基本的なパラメータを驚くべき精度で決定することができる。Planck 衛星などの観測により、標準的な宇宙モデルである Λ CDM モデル（ダークエネルギー Λ と冷たいダークマター CDM を含むモデル）が非常に高い精度で検証され、宇宙の組成が **通常の物質（バリオン）約 5%、ダークマター約 27%、ダークエネルギー約 68%** であることが確立された。

今後の CMB 研究は、偏光（特に B モード偏光）の観測に焦点が移っている。B モード偏光は、初期宇宙のインフレーション期に生成された原始重力波の痕跡を捉える可能性があり、宇宙誕生のさらに根源的な物理に迫るものとして期待されている。