

練習問題

導関数

例題 1:

(1) 関数 $f(x)$ の導関数の定義式を書け。

(2) 次の x の関数の導関数を定義から求めよ。

$$(1)x \quad (2)x^5 \quad (3)\frac{1}{x} \quad (4)\frac{1}{x^3} \quad (5)\log(x+a) \quad (6)\cos x \quad (7)b^x$$

解答 1:

(1) 関数 $f(x)$ の導関数の定義式

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) 各関数の導関数

(1) $f(x) = x$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

(2) $f(x) = x^5$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

二項定理を用いて $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

(4) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ のとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - (x+h)^3}{hx^3(x+h)^3} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)}{hx^3(x+h)^3} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{hx^3(x+h)^3} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3x^2 - 3xh - h^2}{x^3(x+h)^3} \\
 &= \frac{-3x^2}{x^3 \cdot x^3} = -3 \frac{x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}
 \end{aligned}$$

(5) $f(x) = \log(x+a)$ のとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h+a) - \log(x+a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h+a}{x+a}\right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+a}\right) \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{\frac{h}{x+a}} \\
 &= \frac{1}{x+a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{\frac{h}{x+a}} \\
 &= \frac{1}{x+a} \cdot 1 = \frac{1}{x+a}
 \end{aligned}$$

(6) $f(x) = \cos x$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\cos\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\
&= - \sin x \cdot 1 = - \sin x
\end{aligned}$$

但し、3 行目では三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

を用いた。

(7) $f(x) = b^x$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} \\
&= b^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} \\
&= b^x \log b
\end{aligned}$$

ここで $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b$ を用いた。

実際に、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b$ であることを示すと： $b^h = e^{h \log b}$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h \log b} \cdot \log b \\
&= \log b \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h \log b}
\end{aligned}$$

$t = h \log b$ とおくと、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log b} - 1}{h \log b} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

したがって、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b \cdot 1 = \log b$

例題 2:

次の関数を x で微分しなさい。

$$(1)x^3 \quad (2)xe^x \quad (3)x \log x \quad (4)\sin x \quad (5)\cos x \\ (6)\tan x \quad (7)\log(3x^2 + 4) \quad (8)\log(\sin x) \quad (9)\sin(ax)$$

解答 2:

$$(1) (x^3)' = 3x^2$$

$$(2) (xe^x)' \quad (\text{積の微分法})$$

$$(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$$

$$(3) (x \log x)' \quad (\text{積の微分法})$$

$$(x \log x)' = (x)' \log x + x(\log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$(4) (\sin x)' = \cos x$$

$$(5) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(6) (\tan x)'$$

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$(7) (\log(3x^2 + 4))' \quad (\text{合成関数の微分法})$$

$$(\log(3x^2 + 4))' = \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot (3x^2 + 4)' = \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

$$(8) (\log(\sin x))' \quad (\text{合成関数の微分法})$$

$$(\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(9) \sin(ax)'$$

$$\begin{aligned}(\sin(ax))' &= \cos(ax) \cdot (ax)' \\&= \cos(ax) \cdot a \\&= a \cos(ax)\end{aligned}$$

例題 3:

(1) a, b , を定数として $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ のとき、

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi)$$

とかけること示せ。

(2) x が満たす 2 階微分方程式を一つ求めよ。

解答 3:

(1) 三角関数の合成公式を用いて証明する。

$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ において、 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおき、 ϕ を

$$\cos \phi = \frac{a}{A}, \quad \sin \phi = \frac{b}{A}$$

を満たす角とする。

このとき、

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t + b \cos \omega t \\ &= A \left(\frac{a}{A} \sin \omega t + \frac{b}{A} \cos \omega t \right) \\ &= A(\cos \phi \sin \omega t + \sin \phi \cos \omega t) \\ &= A \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

したがって、 $x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi)$ が成り立つ。

(2) $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ を t で微分すると：

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t$$

さらに微分すると：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin \omega t - b\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2(a \sin \omega t + b \cos \omega t) = -\omega^2 x$$

したがって、 x が満たす 2 階微分方程式は：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

例題 4:

次の関数の増減表を作成し、グラフの概形をかけ。

(1) $y = x^3$

(2) $y = x^4 - 8x^2$

解答 4:

(1) $y = x^3$ の増減表とグラフ

$$y' = 3x^2$$

$y' = 0$ となるのは $x = 0$ のとき

$$y'' = 6x$$

増減表：

x	...	0	...
y'	+	0	+
y	↗	0	↗

$x = 0$ で $y'' = 0$ なので変曲点。 $y(0) = 0$

グラフの概形：原点を通る単調増加の 3 次関数で、原点で変曲している。

(2) $y = x^4 - 8x^2$ の増減表とグラフ

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$$

$y' = 0$ となるのは $x = -2, 0, 2$ のとき

$$y'' = 12x^2 - 16$$

各点での値：

- ・ $y(-2) = 16 - 32 = -16$
- ・ $y(0) = 0$
- ・ $y(2) = 16 - 32 = -16$

増減表：

x	...	-2	...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗

グラフの概形： $x = \pm 2$ で極小値 -16 、 $x = 0$ で極大値 0 をとる 4 次関数。



例題 5:

次の関数を x について積分せよ。

$$(1) \frac{1}{3x+2} \quad (2) \log x \quad (3) xe^x \quad (4) \tan x \quad (5) \frac{6x}{3x^2+4} \quad (6) \frac{\cos x}{\sin x} \quad (7) \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

解答 5:

$$(1) \int \frac{1}{3x+2} dx$$

$$u = 3x + 2 \text{ とおくと、} du = 3dx \text{ より } dx = \frac{1}{3} du$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \log|u| + C = \frac{1}{3} \log|3x+2| + C$$

つまり、 $\int d\frac{x}{ax+b}$ の積分は、すぐに $\log|ax+b| + C$ とできることがわかりますね。

$$(2) \int \log x dx \quad (\text{部分積分を使用})$$

$\int \log x \cdot 1 dx$ において、 $\log x$ を微分し、 1 を積分する

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \log x \cdot x - \int (\log x)' \cdot x dx \\ &= x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

$$(3) \int xe^x dx \quad (\text{部分積分を使用})$$

$\int x \cdot e^x dx$ において、 x を微分し、 e^x を積分する

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx \\ &= xe^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^{x(x-1)} + C \end{aligned}$$

$$(4) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$(\cos x)' = -\sin x$ を用いて、

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\log|\cos x| + C \\ &= \log|\sec x| + C\end{aligned}$$

(5) $\int \frac{6x}{3x^2+4} dx$ (分子が分母の微分)

$(3x^2 + 4)' = 6x$ であることを利用して、

$$\int \frac{6x}{3x^2+4} dx = \int \frac{(3x^2+4)'}{3x^2+4} dx = \log|3x^2+4| + C$$

(6) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$(\sin x)' = \cos x$ であることを利用して、

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log|\sin x| + C$$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ (標準形の逆三角関数)

これは逆三角関数の標準形である。 $x = a \sin \theta$ の置換を用いると： $dx = a \cos \theta d\theta$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \int \frac{1}{a \cos \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= \int d\theta = \theta + C \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C\end{aligned}$$

ここで $\arcsin x$ とは $\sin x$ の逆関数、つまり x, y が $y = \sin x$ を満たすとき、 $x = \arcsin y$ と書ける関数である。

例題 6:

次の微分方程式を解け。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = xy$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{y}$$

解答 6:

積分定数は C とする。

(1)

$$\begin{aligned} dy &= 2x dx \\ \int dy &= \int 2x dx \\ y &= 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C \\ y &= x^2 + C \end{aligned}$$

(2) これは左辺に y 、右辺に x をまとめて

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= x dx \\ \log|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C' \\ y &= C \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

(3) これもやることは(2)と全く変わらず、

$$\begin{aligned} y dy &= (1+x) dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= x + \frac{1}{2}x^2 + C \\ y &= \sqrt{x + \frac{1}{2}x^2 + C} \end{aligned}$$

例題 7:

(1) 自由落下する質量 m の質点の運動方程式を立て、それを解け。

(2) 速度に比例する空気抵抗がある場合、運動方程式は次のようになる。これを解き、終端速度を求めよ。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt}$$

(3) 放射性物質の数 N は崩壊率を γ とすると次のように書ける。 $N(t)$ を求めよ。

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N$$

(4) 人口などは次のロジスティック方程式で近似的に表せる。これを解け。

$$\frac{dN}{dt} = rN \times \frac{M - N}{M}$$

解答 7:

(1) 自由落下の運動方程式とその解

重力加速度を g として、下向きを正の方向とする。質点に働く力は重力 mg のみなので

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg$$

m で割って

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g$$

1 回積分して：

$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1$$

初期条件として $t = 0$ で $v = 0$ とすると、 $C_1 = 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = gt$$

もう 1 回積分して：

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

初期条件として $t = 0$ で $x = 0$ とすると、 $C_2 = 0$

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

(2) 空気抵抗がある場合の運動方程式とその解

運動方程式：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt}$$

$v = \frac{dx}{dt}$ とおくと：

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

変数分離して：

$$\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}$$

左辺を積分する。 $u = mg - kv$ とおくと $du = -kdv$ より $dv = -\frac{du}{k}$

$$\int \frac{dv}{mg - kv} = \int -\frac{du}{ku} = -\frac{1}{k} \log|u| = -\frac{1}{k} \log|mg - kv|$$

したがって：

$$-\frac{1}{k} \log|mg - kv| = \frac{t}{m} + C$$

初期条件 $t = 0$ で $v = 0$ を用いると：

$$-\frac{1}{k} \log(mg) = C$$

よって：

$$-\frac{1}{k} \log|mg - kv| = \frac{t}{m} - \frac{1}{k} \log(mg)$$

$$\log|mg - kv| - \log(mg) = -\frac{kt}{m}$$

$$\log\left|\frac{mg - kv}{mg}\right| = -\frac{kt}{m}$$

$$\frac{mg - kv}{mg} = e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

終端速度は $t \rightarrow \infty$ での速度：

$$v_{\text{terminal}} = \frac{mg}{k}$$

(3) 放射性崩壊の微分方程式とその解

微分方程式：

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N$$

変数分離して：

$$\frac{dN}{N} = -\gamma dt$$

両辺を積分：

$$\int \frac{dN}{N} = \int -\gamma dt$$

$$\log|N| = -\gamma t + C$$

したがって：

$$N = Ae^{-\gamma t}$$

初期条件 $t = 0$ で $N = N_0$ とすると：

$$N_0 = Ae^0 = A$$

よって：

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t}$$

これは指数関数的減衰を表している。

(4) ロジスティック方程式とその解

微分方程式：

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{M - N}{M}$$

変数分離して：

$$\frac{MdN}{N(M-N)} = rdt$$

左辺を部分分数分解する：

$$\frac{M}{N(M-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M-N}$$

$M = A(M-N) + BN = AM + (B-A)N$ より、 $A = 1, B = 1$

したがって：

$$\frac{M}{N(M-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{M-N}$$

積分すると：

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M-N} \right) dN = \int rdt$$

$$\log|N| - \log|M-N| = rt + C$$

$$\log \left| \frac{N}{M-N} \right| = rt + C$$

$$\frac{N}{M-N} = Ae^{rt}$$

初期条件 $t = 0$ で $N = N_0$ を用いると：

$$A = \frac{N_0}{M-N_0}$$

したがって：

$$\frac{N}{M-N} = \left(\frac{N_0}{M-N_0} \right) e^{rt}$$

これを N について解くと：

$$N(t) = \frac{N_0 M}{Me^{-rt} + N_0} = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}$$

$t \rightarrow \infty$ で $N \rightarrow M$ となる。