疑問の解説

ゲージ理論

標準理論に出てくるゲージ理論では、SU(3), SU(2), U(1)がある。これらの物理的な解釈を空間回転を表す SO(N)と併せて見ていく。

空間回転: 特殊直交群 SO(3)

SO(N)はゲージ変換ではないが、身近な回転群である。自由度は$\frac{N(N-1)}{2}$ と表せる。SO(3)は 3 次元空間における回転を表す。SO(3)の生成子は次の 3 つである。

$$J_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

微小回転の演算子は

$$R_i = \exp(iJ_i\theta)$$

と表せるが、これは $\theta \ll 1$の時

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることに対応する。

特殊ユニタリ群 SU(N)

本題の sU(N)についてである。自由度はN^2-1で表される。

SU(2)では自由度は$2^2-2=3$であるが、これはスピンの上下を混ぜるのに二つ、位相を変えるのに一つの計 3 つと解釈できる。SU(2)の生成子はパウリ行列

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\tau_i = \frac{\sigma_i}{2}$$

と表される。このうちσ_1, σ_2はスピンを混ぜる働き、対角行列であるσ_3は位相を変える働きをする。

SU(3)では自由度は 8 であるが、これらは例えば QCD では RGB のカラーを混ぜる働きをする 6 つと、それぞれのカラー間の位相を変える 2 つに分けられる。 生成子はゲルマン行列である。

$$\lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

基底を

$$R = (1, 0, 0), \quad G = (0, 1, 0), \quad B = (0, 0, 1)$$

と取ると、λ_1, λ_2は R と G を混ぜるように働く。対角行列であるλ_3, λ_8はカラーを混ぜることはなく、カラー間の位相だけを変える。

SU(2)でも SU(3)でも、自由度の数だけゲージボソンが存在しており、ゲージボソンのやり取りによりスピンやカラーの受け渡しを行なっている。

ユニタリ群 U(1)

これは単に位相を変えているだけなので省略

密度行列

純粋状態の密度演算子ρは

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

と書かれるが、混合状態の密度演算子は状態$|\Psi_i\rangle$が確率P_iで現れる場合

$$\rho = \sum_i P_i |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

と書かれる。 適当な基底 $|i\rangle$でρを挟んだ量は密度行列となる。

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$$

ここで具体例としてスピン 1/2 の系を考えてみよう。 スピンが下向きを$|0\rangle$, 上向を$|1\rangle$とする。また行列表示として$|0\rangle = \binom{1}{0}, \quad |1\rangle = \binom{0}{1}$とする。

・ $|\Psi\rangle = |0\rangle$の時

$$\rho = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

・ $|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$の時

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

というふうに、量子的な状態の重ね合わせがある時、非対角要素が 0 でない値を持つ。密度行列の対角要素はそれぞれのスピンの状態を観測する確率を表し、非対角要素は量子的な重ね合わせが存在することを表す。

次に混合状態を考えてみよう。

・ 確率 1/2 で状態$|0\rangle$と状態$|1\rangle$がそれぞれ存在する場合

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これは古典的な状況を表しているから、量子的な重ね合わせが存在せず、従って非対角要素も存在しない。

- 重ね合わせの状態$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$がそれぞれ確率 1/2 で存在する場合

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

こちらは状態としては状態の重ね合わせを考えているが、結果は先と同じく非対角要素は 0 となっている。 これは$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$は$|0\rangle$と$|1\rangle$とが同じ位相で重なっているが、 $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$は逆の位相で重なっているため、これらが打ち消しあい、結果として古典的な混合状態と同様になったと考えることができる。

まとめ

- 対角成分: それぞれの状態が存在する確率
- 非対角成分: それぞれの基底状態の位相の相関。状態の重ね合わせが存在することを表す。