・ p.14 $U(t)$ の計算

時間並進の演算子は $ke^{-iHt}\mathcal{K}$ なので、x_0 から x に遷移する確率振幅 $U(t)$ は

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \langle x|e^{-iHt}|x_0\rangle \\
&= \langle x|e^{-i\frac{p^2}{2m}}|x_0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\langle x|e^{-i\frac{p^2}{2m}}|p\rangle\langle p|x_0\rangle \quad \text{完全性関係を利用} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{p^2}{2m}}\langle x|p\rangle\langle p|x_0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{p^2}{2m}}e^{ip\cdot(x-x_0)} \quad (\langle x|p\rangle = e^{ix\cdot p}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{t}{2m}(p+\frac{m}{t}(x-x_0))^2}e^{i\frac{m}{2t}(x-x_0)^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}(\frac{2m\pi}{it})^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{m}{2t}(x-x_0)^2} \quad \text{ガウス積分} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{m}{2t}(x-x_0)^2}
\end{aligned}
$$

4 行目では運動量の固有値を取るので、指数関数はブラケットの外に出すことができる。

・ p.14 二つ目の式の計算

$$
\begin{aligned}
\int d^3pe^{-it\sqrt{p^2+m^2}}e^{ip\cdot(x-x_0)} &= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty p^2dp\int_{-1}^1 d\mu e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}e^{ip|x-x_0|\mu} \\
&= 2\pi\int_0^\infty p^2dp\frac{1}{ip|x-x_0|}e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}(e^{ip|x-x_0|} - e^{-ip|x-x_0|}) \\
&= 4\pi\int_0^\infty dpp\ \sin(p|x-x_0|)e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}
\end{aligned}
$$