# Peskin2 章

04. July 2025

- p.14 U(t) の計算

時間並進の演算子は$e^{-iHt}$なので、$x_0$から$x$に遷移する確率振幅$U(t)$は

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \langle x|e^{-iHt}|x_0\rangle \\
&= \langle x|e^{-i\frac{p^2}{2m}}|x_0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\langle x|e^{-i\frac{p^2}{2m}}|p\rangle\langle p|x_0\rangle & \textbf{完全性関係を利用} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{p^2}{2m}}\langle x|p\rangle\langle p|x_0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{p^2}{2m}}e^{ip\cdot(x-x_0)} & (\langle x|p\rangle = e^{ix\cdot p}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{t}{2m}\left(p+\frac{m}{t}(x-x_0)\right)^2}e^{i\frac{m}{2t}(x-x_0)^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{2m\pi}{it}\right)^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{m}{2t}(x-x_0)^2} & \textbf{ガウス積分} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{m}{2t}(x-x_0)^2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

4 行目では運動量の固有値を取るので、指数関数はブラケットの外に出すことができる。

- p.14 二つ目の式の計算

$$
\begin{aligned}
&\int d^3pe^{-it\sqrt{p^2+m^2}}e^{ip\cdot(x-x_0)} \\
&= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}p^2dp\int_{-1}^{1}d\mu e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}e^{ip|x-x_0|\ \mu} \\
&= 2\pi\int_0^{\infty}p^2dp\frac{1}{ip\ |x-x_0|}e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}\left(e^{ip|x-x_0|}-e^{-ip|x-x_0|}\right) \\
&= 4\pi\int_0^{\infty}dpp\sin(p|x-x_0|)e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

- (2.2), (2.3)式の導出

$$
\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi), \quad \partial_\mu(\delta\varphi) = \delta(\partial_\mu\varphi)
\tag{3}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= \int d^4x \delta\mathcal{L} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\delta\varphi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right) \right\} \text{上の計算を代入}
\end{aligned} \tag{4}
$$

作用積分が収束するには場$\varphi$が遠方では急速に0に近づく必要があるから、無限遠の値を参照する表面積分の項は0となる。また、変分$\delta\varphi$は任意であるから、変分法の原理より$\delta\varphi$の係数は常に0である。したがって

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = 0 \tag{5}
$$

- Noerther's Theorem の計算

作用積分 S が

$$
S = \int d^4x\mathcal{L} \tag{6}
$$

で与えられているので、何らかの変分に対しラグランジアン密度が

$$
\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) \tag{7}
$$

（$\alpha$は微小定数）と変化する限りは作用積分は変わらず、したがって運動方程式も不変である。

$$
\begin{aligned}
\because S' &= \int d^4x\mathcal{L} \\
&= \int d^4x\mathcal{L} + \alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) \\
&= S + \alpha\int d^4x\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x)
\end{aligned} \tag{8}
$$

となるが表面積分は先に見たように0となるからである。
ここで変分

$$
\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \alpha\Delta\varphi(x) \tag{9}
$$

において、$\mathcal{L}$の変化を見てみよう。先の計算と同様にして

$$
\begin{aligned}
\alpha\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}(\alpha\Delta\varphi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\varphi) \\
&= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right]\Delta\varphi
\end{aligned} \tag{10}
$$

と書けるが、第二項はオイラー方程式から 0 となる。したがって

$$
j^\mu(x) \coloneqq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi - \mathcal{J}^\mu \tag{11}
$$

と定めると

$$
\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) = 0 \tag{12}
$$

となる。

- (2.15), (2.16)式の導出

$$
\varphi \to e^{i\alpha}\varphi = (1 + i\alpha + \mathrm{O}(\alpha^2))\varphi \tag{13}
$$

なので$\alpha$が微少量である時、2 次の項を無視して(2.15)式を得る。
また

$$
\mathcal{L} = |\partial_\mu\varphi|^2 - m^2\ |\varphi|^2 \tag{14}
$$

のとき、この変分でラグランジアンは変化しないから、

$$
\mathcal{J} = 0 \tag{15}
$$

であり、

$$
j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi + \text{c.c.} \tag{16}
$$

を計算することで(2.15)式を得る。(ここで c.c.は Complex conjugate, 複素共役の略で、直前の項の複素共役である。今回$\varphi$は複素場なので$\varphi^*$による微分の項が出てくることに注意)

- (2.24)式の導出

$$
\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger), p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \tag{17}
$$

と

$$
[\varphi, p] = i \tag{18}
$$

より

$$
\begin{aligned}
i &= [\varphi, p] \\
&= -\frac{i}{2}\left[(a+a^\dagger),(a-a^\dagger)\right] \\
&= -\frac{i}{2}\left\{\left[a^\dagger, a\right] - \left[a, a^\dagger\right]\right\} \\
&= i\left[a, a^\dagger\right]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる。したがって $[a, a^\dagger = 1$

- (2.25), (2.26)式の意味

クラインゴルドン場を単振動場と同様にフーリエ空間で表したいが、エネルギーが波数に依存することから分かるように、生成消滅演算子$a, a^\dagger$も波数に依存する。そこで、$\varphi, \pi$が実場であることを考慮すると、

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\left(a_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \\
\pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left(a_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

と表せるのである。ただし、意味ありげに出てきた$\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}$と$(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}$はこれらが相対論的に不変である（ローレンツ変換で変化しない）ために必要。

- (2.30)の計算

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{p}})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\
\pi(x) &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left(a_{\boldsymbol{p}'} - a^\dagger_{-\boldsymbol{p}'}\right)e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

と$\pi(x)$の積分変数を$p'$と変えてから代入し、交換関係

$$
\left[a_p, a^\dagger_{p'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(p-p'), \left[a_p, a_{p'}\right] = \left[a^\dagger_p, a^\dagger_{p'}\right] = 0 \tag{22}
$$

を使って整理すると

$$
\begin{aligned}
[\varphi(x), \pi(x')] &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{p'}}{\omega_p}} \big( [a^\dagger_{-p}, a_{p'}] + [a_p, -a^\dagger_{-p}] \big) e^{i(p\cdot x + p'\cdot x')} \\
&= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{p'}}{\omega_p}} \{ (-1)(2\pi)^3 \delta^3(p+p') - (2\pi)^3 \delta^3(p+p') \} e^{i(p\cdot x + p'\cdot x')} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{-p}}{\omega_p}} e^{ip(x-x')} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ip(x-x')} \\
&= i\delta^3(x-x')
\end{aligned}
\tag{23}
$$

ここで、$\omega_p = \omega_{-p}$であることに注意

- (2.31)の計算

これも(2.30)の計算と同様に$\varphi, \pi$の片方の積分変数を$p'$に変えてから代入すればよく、

$$
\nabla\varphi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{ip}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}} (a_{\boldsymbol{p}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{p}}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{24}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \right] \\
&= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} e^{i(p+p')\cdot x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{2} (a_p - a^\dagger_{-p}) \left( a_{p'} - a^\dagger_{-p'} \right) + \frac{1}{2} \frac{-p\cdot p' + m^2}{4\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} (a_p + a^\dagger_{-p}) \left( a_{p'} + a^\dagger_{-p'} \right) \right\} \\
&=
\end{aligned}
\tag{25}
$$