

Peskin2 章

07. August 2025

- p.14 $U(t)$ の計算

時間並進の演算子は e^{-iHt} なので、 x_0 から x に遷移する確率振幅 $U(t)$ は

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \langle x | e^{-iHt} | x_0 \rangle \\
 &= \langle x | e^{-i\frac{p^2}{2m}t} | x_0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle x | e^{-i\frac{p^2}{2m}t} | p \rangle \langle p | x_0 \rangle && \text{完全性関係を利用} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \langle x | p \rangle \langle p | x_0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{p^2}{2m}t} e^{ip \cdot (x - x_0)} && (\langle x | p \rangle = e^{ix \cdot p}) \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{t}{2m}(p + \frac{m}{t}(x - x_0))^2} e^{i\frac{m}{2t}(x - x_0)^2} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m\pi}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m}{2t}(x - x_0)^2} && \text{ガウス積分} \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m}{2t}(x - x_0)^2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

4 行目では運動量の固有値を取るの、指数関数はブラケットの外に出すことができる。

- p.14 二つ目の式の計算

$$\begin{aligned}
 &\int d^3p e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{ip \cdot (x - x_0)} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{ip|x-x_0|\mu} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{ip|x-x_0|} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} (e^{ip|x-x_0|} - e^{-ip|x-x_0|}) \\
 &= 4\pi \int_0^\infty dp p \sin(p|x-x_0|) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

- (2.2), (2.3) 式の導出

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi), \quad \partial_\mu (\delta \varphi) = \delta (\partial_\mu \varphi) \tag{3}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= \int d^4x \delta \mathcal{L} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) \right\} \text{ 上の計算を代入}
\end{aligned} \tag{4}$$

作用積分が収束するには場 φ が遠方では急速に0に近づく必要があるから、無限遠の値を参照する表面積分の項は0となる。また、変分 $\delta\varphi$ は任意であるから、変分法の原理より $\delta\varphi$ の係数は常に0である。したがって

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \tag{5}$$

- Noether's Theorem の計算

作用積分 S が

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \tag{6}$$

で与えられているので、何らかの変分に対しラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) \tag{7}$$

(α は微小定数) と変化する限りは作用積分は変わらず、したがって運動方程式も不変である。

$$\begin{aligned}
\therefore S' &= \int d^4x \mathcal{L}' \\
&= \int d^4x \mathcal{L} + \alpha \int d^4x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) \\
&= S + \alpha \int d^4x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x)
\end{aligned} \tag{8}$$

となるが表面積分は先に見たように0となるからである。

ここで変分

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \alpha \Delta \varphi(x) \tag{9}$$

において、 \mathcal{L} の変化を見てみよう。先の計算と同様にして

$$\begin{aligned}
\alpha\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}(\alpha\Delta\varphi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\varphi) \\
&= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right]\Delta\varphi
\end{aligned} \tag{10}$$

と書けるが、第二項はオイラー方程式から 0 となる。したがって

$$j^\mu(x) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi - \mathcal{J}^\mu \tag{11}$$

と定めると

$$\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) = 0 \tag{12}$$

となる。

- (2.15), (2.16)式の導出

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi = (1 + i\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2))\varphi \tag{13}$$

なので α が微少量である時、2次の項を無視して(2.15)式を得る。

また

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2 \tag{14}$$

のとき、この変分でラグランジアンは変化しないから、

$$\mathcal{J} = 0 \tag{15}$$

であり、

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi + \text{c.c.} \tag{16}$$

を計算することで(2.15)式を得る。(ここで c.c.は Complex conjugate, 複素共役の略で、直前の項の複素共役である。今回 φ は複素場なので φ^* による微分の項が出てくることに注意)

- (2.24)式の導出

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger), p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \tag{17}$$

と

$$[\varphi, p] = i \tag{18}$$

より

$$\begin{aligned}
i &= [\varphi, p] \\
&= -\frac{i}{2} [(a + a^\dagger), (a - a^\dagger)] \\
&= -\frac{i}{2} \{ [a^\dagger, a] - [a, a^\dagger] \} \\
&= i[a, a^\dagger]
\end{aligned} \tag{19}$$

となる。したがって $[a, a^\dagger] = 1$

- (2.25), (2.26)式の意味

クラインゴールドン場を単振動場と同様にフーリエ空間で表したいが、エネルギーが波数に依存することから分かるように、生成消滅演算子 a, a^\dagger も波数に依存する。そこで、 φ, π が実場であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) \\
\pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x})
\end{aligned} \tag{20}$$

と表せるのである。ただし、意味ありげに出てきた $\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}$ と $(-i)\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}$ はこれらが相対論的に不変である（ローレンツ変換で変化しない）ために必要。

- (2.30)の計算

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p + a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x} \\
\pi(x) &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{p'}}{2}} (a_{p'} - a_{-p'}^\dagger) e^{ip' \cdot x}
\end{aligned} \tag{21}$$

と $\pi(x)$ の積分変数を p' と変えてから代入し、交換関係

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p - p'), [a_p, a_{p'}] = [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0 \tag{22}$$

を使って整理すると

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), \pi(x')] &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{p'}}{\omega_p}} ([a_{-p}^\dagger, a_{p'}] + [a_p, -a_{-p}^\dagger]) e^{i(p \cdot x + p' \cdot x')} \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{p'}}{\omega_p}} \{(-1)(2\pi)^3 \delta^3(p + p') - (2\pi)^3 \delta^3(p + p')\} e^{i(p \cdot x + p' \cdot x')} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{-p}}{\omega_p}} e^{ip(x-x')} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ip(x-x')} \\
&= i \delta^3(x - x')
\end{aligned} \tag{23}$$

ここで、 $\omega_p = \omega_{-p}$ であることに注意

- (2.31)の計算

これも(2.30)の計算と同様に φ, π の片方の積分変数を p' に変えてから代入すればよく、

$$\nabla \varphi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ip}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p + a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x} \tag{24}$$

であるから

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3 x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} e^{i(p+p') \cdot x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{2} (a_p - a_{-p}^\dagger) (a_{p'} - a_{-p'}^\dagger) + \frac{1}{2} \frac{-p \cdot p' + m^2}{2\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} (a_p + a_{-p}^\dagger) (a_{p'} + a_{-p'}^\dagger) \right\} \tag{25}
\end{aligned}$$