練習問題

導関数

例題 1:

(1) 関数$f(x)$の導関数の定義式を書け。

(2) 次のxの関数の導関数を定義から求めよ。

$$(1) x \quad (2) x^5 \quad (3) \frac{1}{x} \quad (4) \frac{1}{x^3} \quad (5) \log(x+a) \quad (6) \cos x \quad (7) b^x$$

解答 1:

(1) 関数$f(x)$の導関数の定義式

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) 各関数の導関数

(1) $f(x) = x$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

(2) $f(x) = x^5$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

二項定理を用いて $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

(4) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 - (x+h)^3}{hx^3(x+h)^3} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)}{hx^3(x+h)^3} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{hx^3(x+h)^3} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-3x^2 - 3xh - h^2}{x^3(x+h)^3} \\
&= \frac{-3x^2}{x^3 \cdot x^3} = -3\frac{x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}
\end{aligned}
$$

(5) $f(x) = \log(x+a)$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h+a) - \log(x+a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(\frac{x+h+a}{x+a}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{x+a}\right) \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{\frac{h}{x+a}} \\
&= \frac{1}{x+a} \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x+a}\right)}{\frac{h}{x+a}} \\
&= \frac{1}{x+a} \cdot 1 = \frac{1}{x+a}
\end{aligned}
$$

(6) $f(x) = \cos x$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\cos\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= -\sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\
&= -\sin x \cdot 1 = -\sin x
\end{aligned}
$$

但し、3 行目では三角関数の加法定理

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

を用いた。

(7) $f(x) = b^x$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} \\
&= b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} \\
&= b^x \log b
\end{aligned}
$$

ここで $\lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h} = \log b$ を用いた。

実際に、$\lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h} = \log b$ であることを示すと： $b^h = e^{h\log b}$ なので、

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\log b} - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\log b} - 1}{h\log b} \cdot \log b \\
&= \log b \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\log b} - 1}{h\log b}
\end{aligned}
$$

$t = h\log b$ とおくと、$h \to 0$ のとき $t \to 0$ であり、

$$
\lim_{h\to 0} \frac{e^{h\log b} - 1}{h\log b} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1
$$

したがって、$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = \log b \cdot 1 = \log b$

例題 2:

次の関数をxで微分しなさい。

$$(1)x^3 \quad (2)xe^x \quad (3)x\log x \quad (4)\sin x \quad (5)\cos x$$
$$(6)\tan x \quad (7)\log(3x^2+4) \quad (8)\log(\sin x)$$

解答 2:

(1) $(x^3)' = 3x^2$

(2) $(xe^x)'$ (積の微分法)

$$(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

(3) $(x\log x)'$ (積の微分法)

$$(x\log x)' = (x)'\log x + x(\log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(6) $(\tan x)'$

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

(7) $(\log(3x^2+4))'$ (合成関数の微分法)

$$(\log(3x^2+4))' = \frac{1}{3x^2+4} \cdot (3x^2+4)' = \frac{1}{3x^2+4} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2+4}$$

(8) $(\log(\sin x))'$ (合成関数の微分法)

$$(\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

例題 3:

(1) a, b, を定数として $x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ のとき、

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega t + \phi)$$

とかけることを示せ。

(2) xが満たす 2 階微分方程式を一つ求めよ。

解答 3:

(1) 三角関数の合成公式を用いて証明する。

$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ において、 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおき、ϕ を

$$\cos\phi = \frac{a}{A}, \quad \sin\phi = \frac{b}{A}$$

を満たす角とする。

このとき、

$$\begin{aligned} x &= a\sin\omega t + b\cos\omega t \\ &= A\left(\frac{a}{A}\sin\omega t + \frac{b}{A}\cos\omega t\right) \\ &= A(\cos\phi\sin\omega t + \sin\phi\cos\omega t) \\ &= A\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

したがって、$x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega t + \phi)$ が成り立つ。

(2) $x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ を t で微分すると：

$$\frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t$$

さらに微分すると：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\sin\omega t - b\omega^2\cos\omega t = -\omega^2(a\sin\omega t + b\cos\omega t) = -\omega^2 x$$

したがって、x が満たす 2 階微分方程式は：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

例題 4:

次の関数の増減表を作成し、グラフの概形をかけ。

(1) $y = x^3$
(2) $y = x^4 - 8x^2$

解答 4:

(1) $y = x^3$ の増減表とグラフ

$y' = 3x^2$

$y' = 0$ となるのは $x = 0$ のとき

$y'' = 6x$

増減表：

x	...	0	...
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$x = 0$ で $y'' = 0$ なので変曲点。$y(0) = 0$

グラフの概形：原点を通る単調増加の 3 次関数で、原点で変曲している。

(2) $y = x^4 - 8x^2$ の増減表とグラフ

$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2)$

$y' = 0$ となるのは $x = -2, 0, 2$ のとき

$y'' = 12x^2 - 16$

各点での値：
- $y(-2) = 16 - 32 = -16$
- $y(0) = 0$
- $y(2) = 16 - 32 = -16$

増減表：

x	...	-2	...	0	...	2	...
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$

グラフの概形：$x = \pm 2$ で極小値 -16、$x = 0$ で極大値 0 をとる 4 次関数。

例題 5:

次の関数をxについて積分せよ。

$$(1)\frac{1}{3x+2} \quad (2)\log x \quad (3) xe^x \quad (4)\tan x \quad (5)\frac{6x}{3x^2+4} \quad (6)\frac{\cos x}{\sin x} \quad (7)\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

解答 5:

(1) $\int \frac{1}{3x+2}dx$

$u = 3x+2$ とおくと、$du = 3dx$ より $dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \frac{1}{3x+2}dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\log|u| + C = \frac{1}{3}\log|3x+2| + C$$

つまり、$\int d\frac{x}{ax+b}$の積分は、すぐに$\log|ax+b|+C$とできることがわかりますね。

(2) $\int \log x dx$ （部分積分を使用）

$\int \log x \cdot 1dx$ において、$\log x$ を微分し、1 を積分する

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \log x \cdot x - \int (\log x)' \cdot x dx \\ &= x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx \\ &= x\log x - \int 1 dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

(3) $\int xe^x dx$ （部分積分を使用）

$\int x\cdot e^x dx$ において、x を微分し、e^x を積分する

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= x\cdot e^x - \int (x)'\cdot e^x dx \\ &= xe^x - \int 1\cdot e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^{x(x-1)} + C\end{aligned}$$

(4) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$(\cos x)' = -\sin x$ を用いて、

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$= -\log|\cos x| + C$$

$$= \log|\sec x| + C$$

(5) $\int \frac{6x}{3x^2+4}dx$ （分子が分母の微分）

$(3x^2+4)' = 6x$ であることを利用して、

$$\int \frac{6x}{3x^2+4}dx = \int \frac{(3x^2+4)'}{3x^2+4}dx = \log|3x^2+4| + C$$

(6) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$(\sin x)' = \cos x$ であることを利用して、

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \log|\sin x| + C$$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ （標準形の逆三角関数）

これは逆三角関数の標準形である。$x = a\sin\theta$ の置換を用いると： $dx = a\cos\theta d\theta$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{a\cos\theta} \cdot a\cos\theta d\theta$$

$$= \int d\theta = \theta + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

ここで$\arcsin x$とは$\sin x$の逆関数、つまりx, yが$y = \sin x$を満たすとき、$x = \arcsin y$と書ける関数である。

例題 6:

次の微分方程式を解け。

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{dy}{dx} = 2x \\
&(2) \quad \frac{dy}{dx} = xy \\
&(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{y}
\end{aligned}
$$

解答 6:

積分定数はCとする。

(1)

$$
\begin{aligned}
dy &= 2xdx \\
\int dy &= \int 2xdx \\
y &= 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C \\
y &= x^2 + C
\end{aligned}
$$

(2) これは左辺にy、右辺にxをまとめて

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= xdx \\
\log|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C' \\
y &= C \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)
\end{aligned}
$$

(3) これもやることは(2)と全く変わらず、

$$
\begin{aligned}
ydy &= (1+x)dx \\
\frac{1}{2}y^2 &= x + \frac{1}{2}x^2 + C \\
y &= \sqrt{x + \frac{1}{2}x^2 + C}
\end{aligned}
$$

例題 7:

(1) 自由落下する質量mの質点の運動方程式を立て、それを解け。

(2) 速度に比例する空気抵抗がある場合、運動方程式は次のようになる。これを解き、終端速度を求めよ。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

(3) 放射性物質の数Nは崩壊率をγとすると次のように書ける。$N(t)$を求めよ。

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N$$

(4) 人口などは次のロジスティック方程式で近似的に表せる。これを解け。

$$\frac{dN}{dt} = rN \times \frac{M-N}{M}$$

解答 7:

(1) 自由落下の運動方程式とその解

重力加速度をgとして、下向きを正の方向とする。 質点に働く力は重力mgのみなので

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

mで割って

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

1 回積分して：

$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1$$

初期条件として$t = 0$で$v = 0$とすると、$C_1 = 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = gt$$

もう１回積分して：

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

初期条件として$t=0$で$x=0$とすると、$C_2 = 0$

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

(2) 空気抵抗がある場合の運動方程式とその解

運動方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

$v = \frac{dx}{dt}$とおくと：

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

変数分離して：

$$\frac{dv}{mg-kv} = \frac{dt}{m}$$

左辺を積分する。$u = mg - kv$とおくと$du = -kdv$より$dv = -\frac{du}{k}$

$$\int \frac{dv}{mg-kv} = \int -\frac{du}{ku} = -\frac{1}{k}\log|u| = -\frac{1}{k}\log|mg-kv|$$

したがって：

$$-\frac{1}{k}\log|mg-kv| = \frac{t}{m} + C$$

初期条件$t=0$で$v=0$を用いると：

$$-\frac{1}{k}\log(mg) = C$$

よって：

$$-\frac{1}{k}\log|mg-kv| = \frac{t}{m} - \frac{1}{k}\log(mg)$$

$$\log|mg-kv| - \log(mg) = -\frac{kt}{m}$$

$$\log|\frac{mg-kv}{mg}| = -\frac{kt}{m}$$

$$\frac{mg - kv}{mg} = e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

終端速度は$t \to \infty$での速度：

$$v_{\text{terminal}} = \frac{mg}{k}$$

(3) 放射性崩壊の微分方程式とその解

微分方程式：

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N$$

変数分離して：

$$\frac{dN}{N} = -\gamma dt$$

両辺を積分：

$$\int \frac{dN}{N} = \int -\gamma dt$$

$$\log|N| = -\gamma t + C$$

したがって：

$$N = Ae^{-\gamma t}$$

初期条件$t = 0$で$N = N_0$とすると：

$$N_0 = Ae^0 = A$$

よって：

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t}$$

これは指数関数的減衰を表している。

(4) ロジスティック方程式とその解

微分方程式：

$$\frac{dN}{dt} = rN\frac{M - N}{M}$$

変数分離して：

$$\frac{MdN}{N(M-N)} = rdt$$

左辺を部分分数分解する：

$$\frac{M}{N(M-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M-N}$$

$M = A(M-N) + BN = AM + (B-A)N$より、$A = 1, B = 1$

したがって：

$$\frac{M}{N(M-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{M-N}$$

積分すると：

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M-N} \right) dN = \int rdt$$

$$\log|N| - \log|M-N| = rt + C$$

$$\log|\frac{N}{M-N}| = rt + C$$

$$\frac{N}{M-N} = Ae^{rt}$$

初期条件$t = 0$で$N = N_0$を用いると：

$$A = \frac{N_0}{M-N_0}$$

したがって：

$$\frac{N}{M-N} = \left(\frac{N_0}{M-N_0} \right) e^{rt}$$

これをNについて解くと：

$$N(M-N_0) = N_0(M-N)e^{rt}$$

$$NM - NN_0 = N_0Me^{rt} - NN_0e^{rt}$$

$$NM + NN_0e^{rt} = NN_0 + N_0Me^{rt}$$

$$N(M + N_0e^{rt}) = N_0Me^{rt}$$

よって：

$$N(t) = \frac{N_0Me^{rt}}{M + N_0e^{rt}}$$

分子分母をe^{rt}で割ると：

$$N(t) = \frac{N_0 M}{M e^{-rt} + N_0} = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

$t \to \infty$で$N \to M$となる。