東京大学院試物理学第 3 問

下記の問題で、

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r$$

であり、マクスウェル方程式から

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

なので

$$\nabla^2 E_r = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}. \tag{1}$$

一方、小問 3 の形に電場を置くと

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\mathcal{E})e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

から

$$E_r = \frac{C}{r}, \qquad C = const.$$

$E_r(r = a) = \frac{C}{a} = E_0$ より　$C = aE_0$. よって

$$E_r = \frac{E_0 a}{r}.$$

しかしこれを波動方程式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_r - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E_0 a}{r}\right)\right) + (-k^2 + \mu\epsilon\omega^2)\frac{E_0 a}{r} \right\} e^{i(kz-\omega t)} \\ &= \frac{E_0 a}{r}\left\{ \frac{1}{r^2} + (-k^2 + \mu\epsilon\omega^2) \right\} e^{i(kz-\omega t)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

となり、正しくない。

ここでわからなくなってしまったのですが、これは波動方程式が間違っているためなのか、E_r の形が間違っているためなのか、どちらなのでしょうか。もしくは計算間違えでしょうか。(2) の第 1 項

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E_0 a}{r}\right)\right)$$

が消えてくれないと、z 軸方向に進む波の式としてふさわしくないと思うのですが、どうにも消えません。

お知恵をお貸しいただけるとありがたいです。どうぞよろしくお願いいたします。

第3問

同軸ケーブル中の電磁波の伝搬について考える。同軸ケーブルは図1に示すように，半径 a の円柱芯線と中心軸を同じにして外側にある内半径 b の円筒状導体から構成されている。円柱と円筒の間の空間は，誘電率 ϵ，透磁率 μ の絶縁体で満たされているとする。外側の円筒の厚さは十分薄く，同軸ケーブルの長さは半径に比べて十分長く，かつ直線状であるとする。芯線および円筒状導体の電気抵抗は無視できるものとする。

同軸ケーブルに沿った方向を z 軸とし，電場，磁場ともに z 軸に平行な成分を持たない軸対称な伝搬モード（以下，TEM モードと呼ぶ）について考える。ϵ と μ は定数とする。絶縁体中の電磁波は Maxwell 方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{4}$$

に従う。ここで $\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度である。 以下，図1に示す円筒座標系 (r, θ, z) で考えることとする。任意の関数 f，ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対する円筒座標系での勾配，発散，回転はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial A_z}{\partial z}\right] \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

で与えられる。$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ はそれぞれ r, θ, z 方向の単位ベクトルである。以下の設問に答えよ。

1. この TEM モードの磁束密度の r 方向成分 B_r，電場の θ 方向成分 E_θ はともにゼロとなることを示せ。

2. $E_r(r, z, t)$ に対する波動方程式を求めよ。

3. z 方向の波数を k，角周波数を ω として，電場および磁束密度を複素表示でそれぞれ

$$E_r(r, z, t) = \mathcal{E}(r)e^{ikz - i\omega t}, \quad B_\theta(r, z, t) = \mathcal{B}(r)e^{ikz - i\omega t}$$

と記述する。$\mathcal{E}(r = a) = E_0$ としたとき，$\mathcal{E}(r)$ を求めよ。