

東京大学院試物理学第 3 問

下記の問題で、

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r$$

であり、マクスウェル方程式から

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

なので

$$\nabla^2 E_r = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}. \quad (1)$$

一方、小問 3 の形に電場を置くと

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\mathcal{E}) e^{i(kz - \omega t)} = 0$$

から

$$E_r = \frac{C}{r}, \quad C = \text{const.}$$

$E_r(r=a) = \frac{C}{a} = E_0$ より $C = aE_0$. よって

$$E_r = \frac{E_0 a}{r}.$$

しかしこれを波動方程式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_r - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E_0 a}{r} \right) \right) + (-k^2 + \mu\epsilon\omega^2) \frac{E_0 a}{r} \right\} e^{i(kz - \omega t)} \\ &= \frac{E_0 a}{r} \left\{ \frac{1}{r^2} + (-k^2 + \mu\epsilon\omega^2) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となり、正しくない。

ここでわからなくなってしまったのですが、これは波動方程式が間違っているためなのか、 E_r の形が間違っているためなのか、どちらなのでしょう。もしくは計算間違いでしょうか。(2) の第 1 項

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E_0 a}{r} \right) \right)$$

が消えてくれないと、 z 軸方向に進む波の式としてふさわしくないと思うのですが、どうにも消えません。

お知恵をお貸しいただけるとありがたいです。どうぞよろしくお願いいたします。

第3問

同軸ケーブル中の電磁波の伝搬について考える。同軸ケーブルは図1に示すように、半径 a の円柱芯線と中心軸を同じにして外側にある内半径 b の円筒状導体から構成されている。円柱と円筒の間の空間は、誘電率 ϵ 、透磁率 μ の絶縁体で満たされているとする。外側の円筒の厚さは十分薄く、同軸ケーブルの長さは半径に比べて十分長く、かつ直線状であるとする。芯線および円筒状導体の電気抵抗は無視できるものとする。

同軸ケーブルに沿った方向を z 軸とし、電場、磁場ともに z 軸に平行な成分を持たない軸対称な伝搬モード（以下、TEMモードと呼ぶ）について考える。 ϵ と μ は定数とする。絶縁体中の電磁波は Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

に従う。ここで \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度である。以下、図1に示す円筒座標系 (r, θ, z) で考えることとする。任意の関数 f 、ベクトル \mathbf{A} に対する円筒座標系での勾配、発散、回転はそれぞれ

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

で与えられる。 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ r, θ, z 方向の単位ベクトルである。以下の設問に答えよ。

