ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3
Модель Эрланга (M/M/V/0)

Цель работы – получение навыков расчета качества обслуживания по модели Эрланга.

1 . Основные сведения

В системе с коммутацией каналов большой емкости, когда число источников нагрузки N (абонентов) велико, а параметр потока от одного источника a мал, поведение одного источника (наличие или отсутствие от него вызовов) мало влияет на суммарный поток вызовов $A=Na$. В этом случае суммарный поток вызовов является практически постоянной величиной и не зависит от состояния $\{x\}$, ($x=0, 1,...V$) системы. Такой поток называется простейшим. Для него $\lambda_0=\lambda_1= ... =\lambda_{V-1}=\lambda>0$, $\mu_x=x\mu$.

Модель Эрланга для расчета вероятности потерь справедлива при предположениях:

– вызовы, поступающие на вход системы, образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности с параметром λ;

– длительность занятия подчиняется экспоненциальному распределению с параметром $\mu>0$;

– вызов, заставший хотя бы одну свободную линию, обслуживается немедленно, в противном случае теряется, не влияя на моменты поступления последующих вызовов;

– любой из V выходов пучка доступен, когда он свободен, для любого поступающего вызова;

– исходной для расчета является поступающая нагрузка;

– система находится в стационарном режиме.

Распределение вероятностей состояний находится как

$$[x]=\frac{(\lambda/\mu)^x}{x!}\left[\sum_{i=0}^{V}\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\right]^{-1}=\frac{A^x}{x!}[0],\qquad x=0,1,\dots V,$$

где $A=\lambda/\mu$ – поступающая нагрузка ***первого рода***.

Финальная вероятность того, что вызов не будет обслужен немедленно

$$[V]=E_V(A)=\frac{A^V}{V!}\left[\sum_{i=0}^{V}\frac{A^i}{i!}\right]^{-1}=\frac{A^V}{V!}[0]$$

определяет потери по времени в полнодоступном пучке и носит название ***первой формулы Эрланга***.

В модели Эрланга потери по времени, вызовам, нагрузке – совпадают, параметр потерянного потока – $\lambda E_V(A)$, потерянная нагрузка – $AE_V(A)$.

Обслуженная нагрузка (число вызовов в системе)

$$A_s=\sum_{k=0}^{V}k[k]=A[0]\sum_{k=0}^{V-1}\frac{A^k}{k!}=A[0]\left(\sum_{k=0}^{V}\frac{A^k}{k!}-\frac{A^V}{V!}\right)=A\left(1-E_V(A)\right).$$

Прямой расчет формулы Эрланга во многих практических случаях невозможен из-за переполнения разрядной сетки вычислительного устройства (при больших значениях A и V). Поэтому для ее расчета пользуются рекуррентным соотношением

$$E_V(A)=\frac{AE_{V-1}(A)}{V+AE_{V-1}(A)},$$

последовательно вычисляя $E_1(A)$, $E_2(A)$, ... $E_{V-1}(A)$, $E_V(A)$, при начальном значении $E_0(A)=1$.

2. Содержание работы

2.1. На систему M/M/V/0 поступает пуассоновская нагрузка первого рода ($x1+1$) Эрланг, система имеет ($x2+1$) обслуживающих приборов.

Опишите и объясните, что такое нагрузка первого рода.

Вычислите распределение вероятностей и постройте график. Объясните полученную зависимость.

Вычислите потери по рекуррентной формуле Эрланга.

2.2. На систему M/M/V/0 поступает 1000 Эрланг, система имеет 360 обслуживающих приборов. Вычислите распределение вероятностей. Объясните результат. Вычислите потери по рекуррентной формуле Эрланга.

2.3. Дайте расширенное описание систем M/M/50/0, M/D/30/0, D/M/10/0. Приведите примерный вид поступающего трафика указанных систем и из каких элементов (и какого количества) будет состоять такая СМО.