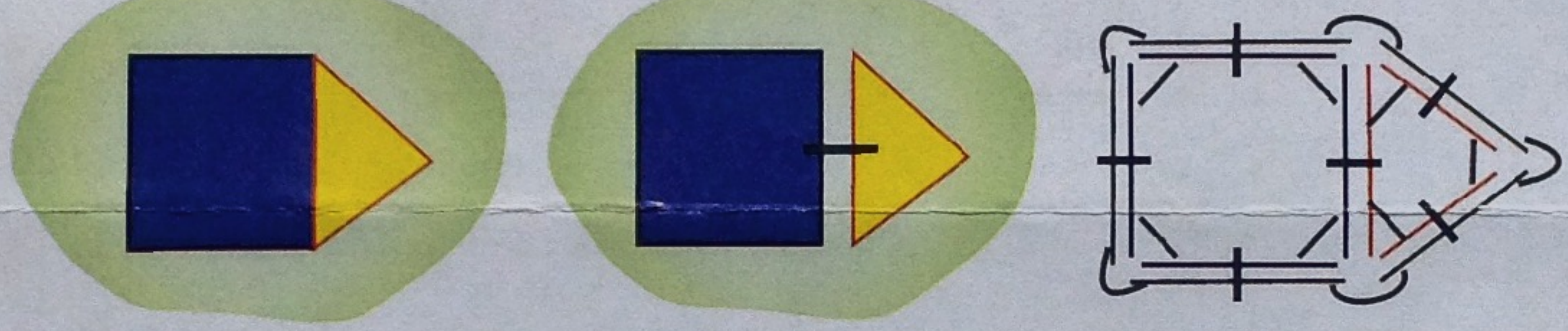
Examen d'Algorithmique IG3

Christophe Fiorio, Jérôme Fortin, Eleonora Guerrini

janvier 2015 – durée 2h00

1 Problématique : cartes combinatoires $2d$

Les cartes combinatoires permettent de représenter un objet en le subdivisant en éléments topologiques de dimension 0 à n. Ainsi on peut définir une 2-carte en décomposant un objet $2d$ selon ses faces, ses arêtes et ses sommets et en notant les relations d'incidence entre ces éléments : sommets d'une arête et d'une face, arête d'une face, et face. La Figure 1 présente une telle décomposition. L'objet de la figure 1.a est composé d'un triangle adjacent à un



a. Un objet 2d. b. Faces disjointes. c. Arêtes disjointes.

FIGURE 1 – Processus de décomposition d'un objet pour obtenir la carte correspondante

carré. On commence par décomposer l'objet selon ses faces (voir figure 1.b), l'adjacence entre les deux faces est marquée par un trait noir. On peut ensuite décomposer l'objet selon ses arêtes [1] (figure 1.c) et noter l'adjacence entre les éléments par un trait gris. Dans la théorie des cartes, ces éléments sont appelés *brins* et sont abstraits. Ils permettent de définir une carte. Il suffit en effet de définir les relations d'adjacence entre les éléments topologiques (sommets, arêtes et faces en $2d$) par des relations entre les brins. On notera β_i la relation entre les brins définissant l'adjacence entre des éléments de dimension i. Ainsi β_2 définit l'adjacence entre faces, et β_1 l'adjacence entre arêtes.

Rappelons dans un premier temps quelques notions mathématiques de base : une *permutation* d'un ensemble fini E est une séquence ordonnée de tous les éléments de E, chaque élément apparaissant exactement une fois. Par exemple si $E = \{a, b, c\}$, il existe 6 permutations de E :

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

Une *involution* σ dans un ensemble E est une permutation qui satisfait $\sigma(\sigma(x)) = x$. Un point fixe x d'une fonction σ est tel que $\sigma(x) = x$.

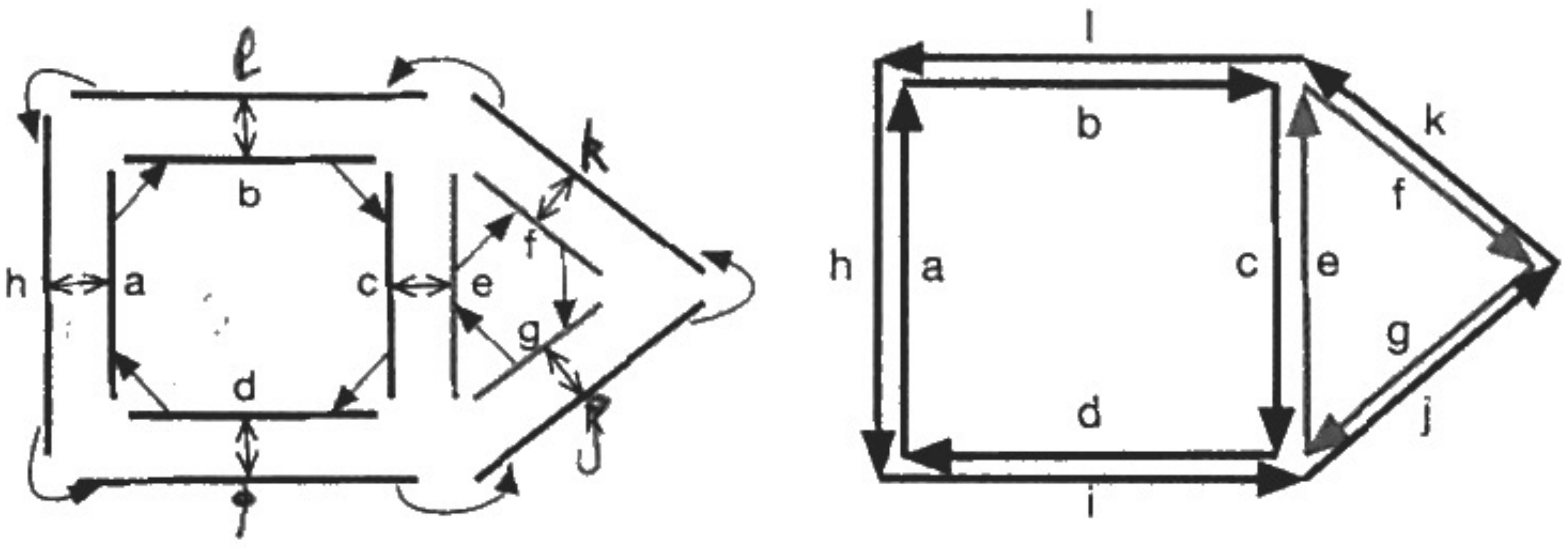
1. Notez les arêtes vertes qui délimitent la face extérieure (l'espace extérieure).

Nous pouvons maintenant donner la définition d'une 2-carte :

définition 1 *Une 2-carte combinatoire, (ou 2-carte) est un triplet* $M = (D, \beta_1, \beta_2)$ *où :*

1. *D est un ensemble fini de brins ;*
2. *β_1 est une* permutation *sur D ;*
3. *β_2 est une* involution *sur D.*

On peut voir un exemple de 2-carte à la figure 2.*a*. Sur cette figure les brins sont représentés par des traits, β_1 par des flèches grises et β_2 par des doubles flèches noires. On peut également représenter implicitement les relations β_1 et β_2 en dessinant les brins avec des flèches pointant vers l'image par β_1 du brin et en plaçant en vis-à-vis les brins reliés par β_2 (voir figure 2.*b*).



a. Représentation complète. b. Représentation implicite.

FIGURE 2 – Deux représentations de la même carte combinatoire.

En nommant chaque brin par une lettre, on peut représenter les relations β_i par le tableau suivant :

D	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
β_1	b	c	d	a	f	g	e	i	j	k	l	h
β_2	h	l	e	i	c	k	j	a	d	g	f	b

Intuitivement, une orbite $< f_1, \ldots, f_k >$ est l'ensemble de tous les brins que l'on peut atteindre par un parcours en appliquant dans n'importe quel ordre, n'importe quelle combinaison des permutations $f_1, \ldots, f_k$ [2] à partir d'un brin donné. Ces orbites permettent de définir les éléments de l'objet : sommet, arête, faces, objets, etc... Ainsi, en deux dimensions, l'orbite $<\beta_1 \circ \beta_2>$, notée $<\beta_{21}>$, permet de représenter un sommet. Par exemple, $<\beta_{21}>(c) = \{c, f, l\}$ permet de représenter le sommet dont est issu c, tandis que $\{c, e\}$ définit l'arête entre la face carrée et la face triangulaire. Un élément de l'objet est donc définit par un ensemble de brins. Par exemple, $\{e, f, g\}$ définit la face triangulaire.

Au final, dans une carte, les brins sont des éléments abstraits qui ne portent pas réellement d'information propre mais les éléments de la carte (sommets, arêtes, faces, objets) sont définis par des ensembles de brins. Par exemple la figure 3.a présente deux sommets isolés et la figure 3.b présente une arête construite à partir de ces deux sommets.

2. Ici, les fonctions f seront bien sûr les permutations β_i mais aussi leurs inverses β_1^{-1} et β_2^{-1}, ainsi que toute composition de ces permutations comme par exemple $\beta_1 \circ \beta_2$.