

内積と直交性

数理工学 第1回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年10月02日

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

目次

① 線形空間と内積

② 内積空間におけるノルム

③ 内積空間におけるなす角

線形空間: 和とスカラー倍が自然に導入できる集合

定義 (線形空間の公理)

和とスカラー倍が定義されていて、次を満たす集合 V を**線形空間 (linear space)** という：

- 和の法則**
- (1) (交換則) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
 - (2) (結合則) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対して, $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
 - (3) (零元の存在) ある元 $\mathbf{0} \in V$ が存在し、任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.
 - (4) (逆元の存在) 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して、 $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ となる元 $\mathbf{v}' \in V$ が存在。

スカラー倍の法則

- (1) (分配則) $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して, $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
- (2) (スカラー分配則) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$ に対して, $(c_1 + c_2)\mathbf{v} = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v}$.
- (3) (スカラー結合則) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$ に対して, $(c_1 c_2)\mathbf{v} = c_1(c_2\mathbf{v})$.
- (4) (スカラー単位元の存在) 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

線形空間 V の元を**ベクトル (vector)** という。

線形空間の例 (n 次元実ベクトル空間)

- n 個の実数を縦に並べた配列 (列ベクトル) 全体の集合を \mathbb{R}^n と表す.

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ として, \mathbb{R}^n 上の和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ とスカラー一倍 $c\mathbf{x}$ を

和: $\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad$ スカラー一倍: $c\mathbf{x} := \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} (c \in \mathbb{R})$

と定義する.

- このとき \mathbb{R}^n は線形空間である. \mathbb{R}^n を n 次元実ベクトル空間という.

線形空間の例 ($m \times n$ 実行列空間)

- m 行 n 列の実数行列全体の集合を $\mathbb{R}^{m \times n}$ と表す.
- $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ として, $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の和 $A + B$ とスカラー一倍 cA を

和:
$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$$

スカラー一倍:
$$cA := (ca_{ij}) \quad (c \in \mathbb{R})$$

と定義する.

- このとき $\mathbb{R}^{m \times n}$ は線形空間である. $\mathbb{R}^{m \times n}$ を $m \times n$ 実行列空間という.

線形空間の例 (実数列全体の集合)

- 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体の集合を S と表す.
- S 上の和とスカラー倍を

和: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty},$

スカラー倍: $c\{x_n\}_{n=1}^{\infty} := \{cx_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (c \in \mathbb{R})$

と定義する.

- このとき S は線形空間である.

各自確認 S の零元と逆元はなにか?

線形空間の例 (実数係数多項式全体の集合)

- 次数が n 次以下の実数係数多項式全体の集合を

$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

と表す.

- $p, q \in P_n$ として, P_n 上の和とスカラー倍を

和: $(p + q)(x) := p(x) + q(x)$

スカラー倍: $(cp)(x) := c \cdot p(x) \quad (c \in \mathbb{R}).$

と定義する.

- このとき P_n は線形空間である.

各自確認 P_n の零元と逆元はなにか?

内積の定義

以降、特に断りがない限り V を線形空間とする。

定義（内積の公理）

任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して実数 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ を対応させる写像が次の性質を満たすとき、 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ を \mathbf{x}, \mathbf{y} の内積 (inner product) という：

- (1) (正定値性) 任意の $\mathbf{x} \in V$ で $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \geq 0$, かつ $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (2) (対称性) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$.
- (3) (線形性) 任意の実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ に対して

$$((\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).$$

内積が定義された線形空間を内積空間 (inner product space) という。

内積空間のことを計量線形空間 (metric space) という場合もある。

内積の例 (\mathbb{R}^n 上の内積)

- \mathbb{R}^n 上の 2 つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{1}$$

と定義する。

- これは \mathbb{R}^n 上の内積である (標準内積という)。

標準内積が内積であることの確認

対称性 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$ より，対称性を満たす.

正定値性

- 任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$.
- また

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$
$$\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

であるから， $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0$ となるのは $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に限る.

線形性

• ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} ((\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ &= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

よって式 (1) で定義される写像は正定値性・対称性・線形性を満たし, \mathbb{R}^n 上の内積である.

内積に関する注意

1 つの線形空間に対して内積は複数定義できる

- 内積はいくつかの性質を満たす写像として定義されていた.
- よって V 上では**標準内積以外の内積**も考えることができる.

標準内積以外の内積の例

- 2 つのベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n e^{-i} x_i y_i$$

と定義する.

- これは \mathbb{R}^n 上の内積である (各自確認せよ).

$\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の内積

- $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

に対して、

$$(A \cdot B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

と定義する。

- これは $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の内積である。

P_n 上の内積

- n 次実数係数多項式全体の集合 P_n に属する 2 つの多項式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

に対して、

$$(p \cdot q) := \sum_{i=0}^n p(i)q(i) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \cdots + p(n)q(n)$$

と定義する。これは P_n 上の内積である。

- また $\alpha \leq \beta$ を満たす定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$(p \cdot q) := \int_{\alpha}^{\beta} p(x)q(x)dx$$

と定義すると、これも P_n 上の内積である。

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

内積空間における「長さ」

定義 (ノルム)

ベクトル $x \in V$ に対して、内積 $(x \cdot x) (\geq 0)$ の平方根を x のノルム (norm) といい、

$$\|x\| := \sqrt{(x \cdot x)}$$

と表す。

ポイント

- \mathbb{R}^n 上の標準内積に対するノルムは次のように表される:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- 内積の平方根で定義されるノルムを **フロベニウスノルム** または **2-ノルム** という。
- ノルムはベクトルの「長さ」に対応する量で、内積を用いて定義される。



用いる内積が変われば「長さ」も変わる。

ノルムの性質

ノルムは、「矢印の長さ」の性質を満たす。

定理（ノルムの性質）

内積空間 V 上の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、以下の性質が成り立つ：

- (1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ であり、かつ $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$.
- (3) $|\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (コーシー・シュワルツの不等式).
- (4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (三角不等式).
- (5) $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle = 0$ ならば

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

が成り立つ（ピタゴラスの定理）。

$|(x \cdot y)| \leq \|x\| \|y\|$ の証明

- $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda) := \|\lambda x + y\|^2$ とおく.
- $f(\lambda)$ を展開すると,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= ((\lambda x + y) \cdot (\lambda x + y)) \\ &= \lambda^2(x \cdot x) + \lambda(x \cdot y) + \lambda(y \cdot x) + (y \cdot y) && (\because \text{線形性}) \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x \cdot y) + \|y\|^2 && (\because \text{対称性}) \end{aligned}$$

であり, これは λ に関する 2 次式である.

- 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ で $f(\lambda) \geq 0$ なので, $f(\lambda) = 0$ の判別式 (D とおく) は 0 以下.
- よって

$$D/4 = (x \cdot y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

であり, $|(x \cdot y)| \leq \|x\| \|y\|$ を得る.

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ の証明

- 先に示したコーシー・シュワルツの不等式から,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= ((x + y) \cdot (x + y)) \\&= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad (\because \text{コーシー・シュワルツの不等式}) \\&= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

- よって $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ を得る.

□

ノルムに基づく距離

内積空間では、ノルムに基づく距離が導入できる。

定理（ノルムに基づく距離）

内積空間 V 上の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

と関数 $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する。このとき d は次の性質を満たす：

- (1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ かつ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- (2) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- (3) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ に対して $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (三角不等式).

ポイント (1)–(3) は距離の公理そのもの。

- ノルムを用いて定義された関数 $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は距離の公理を満たす。
- すなわち内積空間は距離空間である。

証明 (1), (2) は明らか. (3) を示す.

- 任意の $x, y, z \in V$ に対して,

$$a = x - y, \quad b = y - z$$

とおく.

- このとき,

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \|a\| + \|b\| \\ &\geq \|a + b\| \quad (\because \text{ノルムの三角不等式}) \\ &= \|x - z\| = d(x, z) \end{aligned}$$

であり, 所望の不等式が示される.



各種空間の関係性

線形空間

位相空間

距離空間

内積空間

- ・ユークリッド空間
- ・実行列空間
- ・関数空間

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

内積空間における「角度」

ゼロベクトルでないベクトル $x, y \in V$ に対し、コーシー・シュワルツの不等式から、

$$-1 \leq \frac{(x \cdot y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

が成り立つ。これによりベクトル間の「角度」が定義できる。

定義（ベクトルのなす角）

ゼロベクトルでない $x, y \in V$ に対して、

$$\cos \theta = \frac{(x \cdot y)}{\|x\|\|y\|}$$

を満たす $\theta \in [0, \pi]$ がただ一つに定まる。この θ を x, y の**なす角 (angle)** という。

ポイント 2つのベクトルのなす角は内積で定義する。



用いる内積が変われば「なす角」も変わる。

直交

内積が 0 であるベクトル間の関係に特別な名前をつける.

定義 (直交)

内積空間 V 上のベクトル $x, y \in V$ に対して,

$$(x \cdot y) = 0$$

が成り立つとき, x と y は直交である (orthogonal) という.

- 定義から明らかに, なす角が $\pi/2$ のベクトルは直交である.

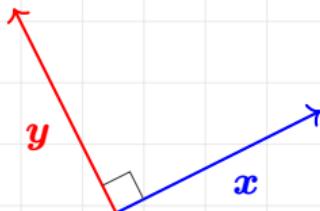


Figure: なす角が $\pi/2$ のベクトル x, y

ゼロベクトルと直交性

命題 (ゼロベクトルは任意のベクトルと直交)

内積空間 V 上のゼロベクトルを $\mathbf{0}$ と表す。任意のベクトル $\mathbf{x} \in V$ に対して、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{0}) = 0$$

が成り立つ。すなわち、ゼロベクトルは V 上の任意のベクトルと直交する。

証明

- 線形空間の定義から、任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ なる $-\mathbf{x} \in V$ が存在する。
- したがって、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{0}) = (\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})))$$

$$= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \quad (\because \text{線形性})$$

$$= 0.$$



まとめ

講義の振り返り

- 線形空間と内積の定義
- 内積によって定義されるノルムとなす角
- ベクトルの直交性

自宅での復習

- 内積の諸例が内積の定義を満たすことを確認する。
- ノルムの諸性質の証明を確認する。
- なす角と直交の定義を確認する。