

ラプラス変換の性質

数理工学 第 13 回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 20 日

目次

① ラプラス変換の基本性質

② 合成積のラプラス変換

目次

① ラプラス変換の基本性質

② 合成積のラプラス変換

ラプラス変換の定義 (復習)

定義 (ラプラス変換; 前回の資料の再掲)

区間 $(0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(t)$ に対し,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

と定義される関数 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という.

- 上の定義において, $f(t)$ を原関数, $F(s)$ を像関数という.
- ラプラス変換を表す記号として $F(s)$ を

$$L(f(t)) \quad \text{または} \quad L(f)$$

と書くことがある.

- 前回は基本的な関数に着目して, そのラプラス変換を具体的に計算した.
- 今回はラプラス変換そのものの性質を見る.

ラプラス変換の基本性質: 線形則

2 つの関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し, それぞれのラプラス変換を次のように表す:

$$L(f(t)) = F(s), \quad L(g(t)) = G(s).$$

定理 (基本性質その 1: 線形則)

関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し, 任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ で次が成り立つ:

$$L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s).$$



関数の線形結合のラプラス変換は, ラプラス変換の線形結合と等しい。

証明 積分の線形性から,

$$\begin{aligned} L(af(t) + bg(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(af(t) + bg(t))dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt + b \int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt \\ &= aF(s) + bG(s). \quad \square \end{aligned}$$

ラプラス変換の基本性質: 相似則

定理 (基本性質その 2: 相似則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. $a > 0$ を定数とすると, $f(at)$ のラプラス変換は

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

証明 置換積分を用いる.

- $\tau = at$ と変数変換すると, $d\tau = a dt$ であり,

$$\begin{aligned} L(f(at)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) \cdot \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad \square \end{aligned}$$

例題

$a > 0$ を定数とする. $L(\cos t) = \frac{s}{s^2 + 1}$ を用いて $L(\cos at)$ を求めよ:

- 相似則を用いて

$$\begin{aligned} L(\cos at) &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(\frac{s}{a}\right)}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

ラプラス変換の基本性質: 移動則

定理 (基本性質その 3: 移動則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. $a > 0$ を定数とすると, $e^{at}f(t)$ のラプラス変換は

$$L(e^{at}f(t)) = F(s - a).$$



原関数に指数関数を掛ける操作は, 像関数を平行移動させる操作に対応.

証明 ラプラス変換の定義より

$$\begin{aligned} L(e^{at}f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{at}f(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t) dt \\ &= F(s - a). \quad \square \end{aligned}$$

例題

$a, b > 0$ を定数とする. $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ を用いて $L(e^{bt} \cos at)$ を求めよ.

- $F(s) = L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ として移動則を用いると,

$$L(e^{bt} \cos at) = F(s - b) = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}.$$

ラプラス変換の基本性質: 原関数の微分則

定理 (基本性質その 4: 原関数の微分則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. このとき,

$$L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0).$$



原関数の微分は、像関数では s 倍する操作に (ほぼ) 対応.

証明 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt}f(t) dt \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s). \quad \square \end{aligned}$$

原関数の微分則 (高階の場合)

定理 (原関数の微分則; 高階の場合)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. このとき, n 階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

証明 帰納的に示す.

- $n = 2$ として $\frac{d^2}{dt^2}f(t)$ のラプラス変換を求める. $g(t) = \frac{d}{dt}f(t)$, $G(s) = L(g(t))$ に対し

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) &= sG(s) - g(0) \\ &= s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

- これを繰り返せば一般の n 階の導関数のラプラス変換が求まる.



ラプラス変換の基本性質: 像関数の微分則

定理 (基本性質その 5: 像関数の微分則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. このとき,

$$L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s).$$



像関数を微分する操作は, 原関数に $-t$ を掛ける操作に対応.

証明 ラプラス変換の定義に従って右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st} f(t)) dt \quad (\text{微分と積分の順序を入れ替えた}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (-tf(t)) dt = L(-tf(t)). \quad \square\end{aligned}$$

例題

$a > 0$ を定数とする. $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ を用いて $L(t \sin at)$ を求めよ.

- 像関数の微分則を用いると

$$L(t \sin at) = -L(-t \sin at) = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

目次

① ラプラス変換の基本性質

② 合成積のラプラス変換

関数の合成積

定義 (合成積)

$[0, \infty)$ 上の 2 つの関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し, $[0, \infty)$ 上の関数 $(f * g)(t)$ を

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

と定義する. このとき, $(f * g)(t)$ を $f(t)$ と $g(t)$ の**合成積**または**畳み込み**という.

例 $b > 0$ を定数とした $\sin bt * \sin bt$ の計算.

$$\begin{aligned}\sin bt * \sin bt &= \int_0^t \sin b(t - \tau) \sin b\tau d\tau \\&= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos b(t - 2\tau) - \cos bt) d\tau \quad \left(\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B)) \right) \\&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2b} \sin b(t - 2\tau) - \tau \cos bt \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2b} (\sin bt - \sin(-bt)) - t \cos bt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} \sin bt - t \cos bt \right).\end{aligned}$$

合成積の性質

命題 (合成積の可換性)

合成積は可換である. すなわち, 任意の $t \in [0, \infty)$ で

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

が成り立つ.

証明

- 合成積の定義における積分で, $u = t - \tau$ と変数変換すると $du = -1d\tau$ であり,

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\&= \int_t^0 f(u)g(t - u) \cdot (-1) du \\&= \int_0^t g(t - u)f(u) du = (g * f)(t).\end{aligned}$$

合成積のラプラス変換

定理 (基本性質その 6: 合成積のラプラス変換)

関数 $f(t)$, $g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s)$, $G(s)$ とすると,

$$L(f * g) = F(s)G(s).$$

証明

- ラプラス変換の定義より

$$F(s)G(s) = F(s) \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-s\tau} F(s)}_{\text{wavy line}} g(\tau) d\tau \quad (1)$$

- ここで,

$$\begin{aligned} \underbrace{e^{-s\tau} F(s)}_{\text{wavy line}} &= e^{-s\tau} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+\tau)} f(u) du \\ &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) dt \quad (t = u + \tau \text{ と変数変換}). \end{aligned}$$

- よって式 (1) は次のように書ける:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \left(\int_{\tau}^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt \right) g(\tau) d\tau. \quad (2)$$

~~~~~

- この積分はフビニの定理から積分の順序が交換可能.

積分の順序を入れ替えて積分領域を適切に取り直せば (以下の図参照),

$$\text{式 (2)} = \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) dt = L(f * g). \quad \square$$

~~~~~

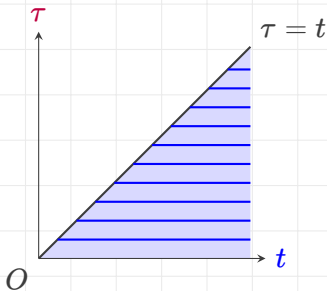


Figure: $t \rightarrow \tau$ の順に積分

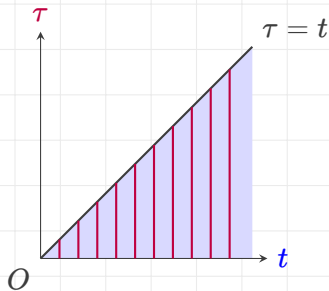


Figure: $\tau \rightarrow t$ の順に積分

例題

$f(t) = t, g(t) = e^{-t}$ とした場合の $L(f * g)$ を求めよ．なお

$$F(s) = L(t) = \frac{1}{s^2}, \quad G(s) = L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}.$$

- 合成積に関するラプラス変換から

$$L(f * g) = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

- 合成積の定義から同様の結果が得られることを確認する．合成積の定義から

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t (t - \tau) e^{-\tau} d\tau \\&= t \int_0^t e^{-\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau \\&= t[-e^{-\tau}]_0^t - \left([-\tau e^{-\tau}]_0^t + \int_0^t e^{-\tau} d\tau \right) \\&= t(1 - e^{-t}) + te^{-t} + (e^{-t} - 1) = e^{-t} + t - 1.\end{aligned}$$

- 書き下した合成積のラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned}L((f * g)(t)) &= L(e^{-t} + t - 1) \\&= L(e^{-t}) + L(t) - L(1) \\&= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \\&= \frac{s^2 + (s+1) - s(s+1)}{s^2(s+1)} \\&= \frac{1}{s^2(s+1)}\end{aligned}$$

であり, 先ほどの結果と一致する.

ラプラス変換の性質まとめ

線形則 $L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$

相似則 $L(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

移動則 $L(e^{at}f(t)) = F(s - a)$

原関数の微分則 $L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0)$

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

像関数の微分則 $L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$

合成積のラプラス変換 $L(f * g) = F(s)G(s)$

まとめ

講義の振り返り

- ラプラス変換の基本的性質 (線形則, 相似則, 移動則, 微分則)
- 合成積の定義とその性質
- 合成積のラプラス変換

自宅での復習

- 基本的性質の証明を確認する (特に微分則).
- 合成積の定義とその性質を理解する.