

内積と直交性

数理工学 第1回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 10 月 02 日

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

線形空間: 和とスカラー倍が自然に導入できる集合

定義 (線形空間の公理)

和とスカラー倍が定義されていて、次を満たす集合 V を**線形空間 (linear space)** という:

和の法則 (1) (交換則) 任意の $u, v \in V$ に対して, $u + v = v + u$.

(2) (結合則) 任意の $u, v, w \in V$ に対して, $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(3) (零元の存在) ある元 $0 \in V$ が存在し, 任意の $v \in V$ に対して $v + 0 = v$.

(4) (逆元の存在) 任意の $v \in V$ に対して, $v + v' = 0$ となる元 $v' \in V$ が存在.

スカラー倍の法則

(1) (分配則) $c \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$ に対して, $c(u + v) = cu + cv$.

(2) (スカラー分配則) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $v \in V$ に対して, $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$.

(3) (スカラー結合則) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $v \in V$ に対して, $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$.

(4) (スカラー単位元の存在) 任意の $v \in V$ に対して, $1v = v$.

線形空間 V の元を**ベクトル (vector)** という.

線形空間の例 (n 次元実ベクトル空間)

- n 個の実数を縦に並べた配列 (列ベクトル) 全体の集合を \mathbb{R}^n と表す.

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ として, \mathbb{R}^n 上の和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ とスカラー倍 $c\mathbf{x}$ を

$$\text{和: } \mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \text{スカラー倍: } c\mathbf{x} := \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

と定義する.

- このとき \mathbb{R}^n は線形空間である. \mathbb{R}^n を n 次元実ベクトル空間という.

線形空間の例 ($m \times n$ 実行列空間)

- m 行 n 列の実数行列全体の集合を $\mathbb{R}^{m \times n}$ と表す.
- $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ として, $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の和 $A + B$ とスカラー倍 cA を

$$\text{和:} \quad A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$\text{スカラー倍:} \quad cA := (ca_{ij}) \quad (c \in \mathbb{R})$$

と定義する.

- このとき $\mathbb{R}^{m \times n}$ は線形空間である. $\mathbb{R}^{m \times n}$ を $m \times n$ 実行列空間という.

線形空間の例 (実数列全体の集合)

- 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体の集合を S と表す.
- S 上の和とスカラー倍を

$$\text{和:} \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{スカラー倍:} \quad c\{x_n\}_{n=1}^{\infty} := \{cx_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (c \in \mathbb{R})$$

と定義する.

- このとき S は線形空間である.

各自確認 S の零元と逆元はなにか?

線形空間の例 (実数係数多項式全体の集合)

- 次数が n 次以下の実数係数多項式全体の集合を

$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

と表す.

- $p, q \in P_n$ として, P_n 上の和とスカラー倍を

$$\text{和:} \quad (p + q)(x) := p(x) + q(x)$$

$$\text{スカラー倍:} \quad (cp)(x) := c \cdot p(x) \quad (c \in \mathbb{R}).$$

と定義する.

- このとき P_n は線形空間である.

各自確認 P_n の零元と逆元はなにか?

内積の定義

以降, 特に断りがない限り V を線形空間とする.

定義 (内積の公理)

任意のベクトル $x, y \in V$ に対して実数 $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$ を対応させる写像が次の性質を満たすとき, $(x \cdot y)$ を x, y の**内積 (inner product)** という:

(1) (正定値性) 任意の $x \in V$ で $(x \cdot x) \geq 0$, かつ $(x \cdot x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) (対称性) 任意の $x, y \in V$ に対して $(x \cdot y) = (y \cdot x)$.

(3) (線形性) 任意の実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 任意の $x, y, z \in V$ に対して

$$((\alpha x + \beta y) \cdot z) = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z).$$

内積が定義された線形空間を**内積空間 (inner product space)** という.

内積空間のことを**計量線形空間 (metric space)** という場合もある.

内積の例 (\mathbb{R}^n 上の内積)

- \mathbb{R}^n 上の 2 つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \quad (1)$$

と定義する.

- これは \mathbb{R}^n 上の内積である (標準内積という).

標準内積が内積であることの確認

対称性 $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x})$ より, 対称性を満たす.

正定値性

• 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$.

• また

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

であるから, $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に限る.

線形性

• ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} ((\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ &= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

よって式 (1) で定義される写像は正定値性・対称性・線形性を満たし, \mathbb{R}^n 上の内積である.

内積に関する注意

1 つの線形空間に対して内積は複数定義できる

- 内積はいくつかの性質を満たす写像として定義されていた.
- よって V 上では**標準内積以外の内積**も考えることができる.

標準内積以外の内積の例

- 2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n e^{-i} x_i y_i$$

と定義する.

- これは \mathbb{R}^n 上の内積である (各自確認せよ).

$\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の内積

- $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

に対して,

$$(A \cdot B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

と定義する.

- これは $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の内積である.

P_n 上の内積

- n 次実数係数多項式全体の集合 P_n に属する 2 つの多項式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

に対して,

$$(p \cdot q) := \sum_{i=0}^n p(i)q(i) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \cdots + p(n)q(n)$$

と定義する. これは P_n 上の内積である.

- また $\alpha \leq \beta$ を満たす定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$(p \cdot q) := \int_{\alpha}^{\beta} p(x)q(x)dx$$

と定義すると, これも P_n 上の内積である.

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

内積空間における「長さ」

定義 (ノルム)

ベクトル $x \in V$ に対して、内積 $(x \cdot x) (\geq 0)$ の平方根を x の **ノルム (norm)** といい、

$$\|x\| := \sqrt{(x \cdot x)}$$

と表す.

ポイント

- \mathbb{R}^n 上の標準内積に対するノルムは次のように表される:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- 内積の平方根で定義されるノルムを**フロベニウスノルム**または**2-ノルム**という.
- ノルムはベクトルの「長さ」に対応する量で、内積を用いて定義される.



用いる内積が変われば「長さ」も変わる.

ノルムの性質

ノルムは、「矢印の長さ」の性質を満たす.

定理 (ノルムの性質)

内積空間 V 上の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の性質が成り立つ:

- (1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ であり, かつ $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- (2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.
- (3) $|(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (コーシー・シュワルツの不等式).
- (4) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式).
- (5) $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0$ ならば

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

が成り立つ (ピタゴラスの定理).

$|(x \cdot y)| \leq \|x\| \|y\|$ の証明

- $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda) := \|\lambda x + y\|^2$ とおく.
- $f(\lambda)$ を展開すると,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= ((\lambda x + y) \cdot (\lambda x + y)) \\ &= \lambda^2(x \cdot x) + \lambda(x \cdot y) + \lambda(y \cdot x) + (y \cdot y) && (\because \text{線形性}) \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x \cdot y) + \|y\|^2 && (\because \text{対称性}) \end{aligned}$$

であり, これは λ に関する 2 次式である.

- 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ で $f(\lambda) \geq 0$ なので, $f(\lambda) = 0$ の判別式 (D とおく) は 0 以下.
- よって

$$D/4 = (x \cdot y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

であり, $|(x \cdot y)| \leq \|x\| \|y\|$ を得る.

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ の証明

- 先に示したコーシー・シュワルツの不等式から,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= ((x + y) \cdot (x + y)) \\ &= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad (\because \text{コーシー・シュワルツの不等式}) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

- よって $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ を得る.



ノルムに基づく距離

内積空間では、ノルムに基づく距離が導入できる。

定理 (ノルムに基づく距離)

内積空間 V 上の $x, y \in V$ に対して、

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

と関数 $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する。このとき d は次の性質を満たす:

- (1) 任意の $x, y \in V$ に対して $d(x, y) \geq 0$ かつ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (2) 任意の $x, y \in V$ に対して $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3) 任意の $x, y, z \in V$ に対して $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

ポイント (1)–(3) は距離の公理そのもの。

- ノルムを用いて定義された関数 $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は距離の公理を満たす。
- すなわち内積空間は距離空間である。

証明 (1), (2) は明らか. (3) を示す.

- 任意の $x, y, z \in V$ に対して,

$$a = x - y, \quad b = y - z$$

とおく.

- このとき,

$$d(x, y) + d(y, z) = \|x - y\| + \|y - z\|$$

$$= \|a\| + \|b\|$$

$$\geq \|a + b\|$$

(\because ノルムの三角不等式)

$$= \|x - z\| = d(x, z)$$

であり, 所望の不等式が示される.



各種空間の関係性

線形空間

位相空間

距離空間

内積空間

- ユークリッド空間
- 実行列空間
- 関数空間

目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

内積空間における「角度」

ゼロベクトルでないベクトル $x, y \in V$ に対し, コーシー・シュワルツの不等式から,

$$-1 \leq \frac{(x \cdot y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

これによりベクトル間の「角度」が定義できる.

定義 (ベクトルのなす角)

ゼロベクトルでない $x, y \in V$ に対して,

$$\cos \theta = \frac{(x \cdot y)}{\|x\| \|y\|}$$

を満たす $\theta \in [0, \pi]$ がただ一つに定まる. この θ を x, y の**なす角 (angle)** という.

ポイント 2つのベクトルのなす角は内積で定義さる.

💡 用いる内積が変われば「なす角」も変わる.

直交

内積が 0 であるベクトル間の関係に特別な名前をつける.

定義 (直交)

内積空間 V 上のベクトル $x, y \in V$ に対して,

$$(x \cdot y) = 0$$

が成り立つとき, x と y は**直交である (orthogonal)** という.

- 定義から明らかに, なす角が $\pi/2$ のベクトルは直交である.

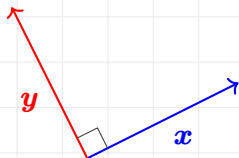


Figure: なす角が $\pi/2$ のベクトル x, y

ゼロベクトルと直交性

命題 (ゼロベクトルは任意のベクトルと直交)

内積空間 V 上のゼロベクトルを 0 と表す. 任意のベクトル $x \in V$ に対して,

$$(x \cdot 0) = 0$$

が成り立つ. すなわち, ゼロベクトルは V 上の任意のベクトルと直交する.

証明

- 線形空間の定義から, 任意の $x \in V$ に対して $x + (-x) = 0$ なる $-x \in V$ が存在する.
- したがって,

$$\begin{aligned}(x \cdot 0) &= (x \cdot (x + (-x))) \\ &= (x \cdot x) - (x \cdot x) && (\because \text{線形性}) \\ &= 0.\end{aligned}$$



まとめ

講義の振り返り

- 線形空間と内積の定義
- 内積によって定義されるノルムとなす角
- ベクトルの直交性

自宅での復習

- 内積の諸例が内積の定義を満たすことを確認する.
- ノルムの諸性質の証明を確認する.
- なす角と直交の定義を確認する.