ラプラス変換の応用

数理工学 第 14 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 24 日

目次

目次

逆ラプラス変換

定義 (逆ラプラス変換)

s の関数 $F(s)$ に対して, $L(f(t)) = F(s)$ を満たす $[0, \infty)$ 上の関数 $f(t)$ が存在するとき, $f(t)$ を $F(s)$ の**逆ラプラス変換**といい,

$$f(t) = L^{-1}(F(s)).$$

と表す. なお, 逆ラプラス変換をラプラス逆変換とよぶこともある.

注意　一般の場合，逆ラプラス変換はただ一つに定まるとは限らない.
しかし $f(t)$ を連続関数に限定すれば, 逆ラプラス変換はただ一つに定まる.

定理 (逆ラプラス変換の一意性)

連続関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対して, $L(f_1(t)) = L(f_2(t))$ ならば, $f_1(t)$ と $f_2(t)$ は一致する.

以後，逆ラプラス変換は一意に定まるものとして議論する.

逆ラプラス変換の例

ラプラス変換表より，逆ラプラス変換に関する諸公式が得られる:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos at$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!}$$

(ラプラス変換表は次ページ参照)

参考：ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$	$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$t\sin at$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$e^{bt}\cos at$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{bt}\sin at$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

逆ラプラス変換の性質

ラプラス変換の線形性から, 逆ラプラス変換も線形性をもつ:

定理 (逆ラプラス変換の線形性)

$F(s)$, $G(s)$ の逆ラプラス変換をそれぞれ $f(t) = L^{-1}(F(s))$, $g(t) = L^{-1}(G(s))$ とする. このとき任意の定数 a, b に対して, 次が成り立つ:

$$L^{-1}(aF(s) + bG(s)) = af(t) + bg(t).$$

合成積の性質から，積の関数の逆ラプラス変換に関する性質が得られる:

定理 (積の関数に関する逆ラプラス変換)

$F(s)$, $G(s)$ の逆ラプラス変換をそれぞれ $f(t) = L^{-1}(F(s))$, $g(t) = L^{-1}(G(s))$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$L^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t).$$

例題

$F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s}$ の逆ラプラス変換を求めよ．

- 分母が $s^2 + 2s = s(s+2)$ と因数分解できる．そこで以下の部分分数分解を考える:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}.$$

- この式の最右辺を計算すると

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{(A+B)s + 2A}{s(s+2)}.$$

- $F(s)$ の分子と係数を比較して

$$A + B = 1, \quad 2A = 1.$$

- よって $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$ と求まり，

$$F(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}.$$

と書ける．よってその逆ラプラス変換は

$$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t}.$$

目次

部分分数分解

逆ラプラス変換では，分母の因数分解を用いて部分分数分解を行うことが有効

$\boxed{\text{部分分数分解の例}}$ 分母が 2 次の多項式の場合 (さっきと同じ)

$$\frac{s+1}{s^2+2s}.$$

- この場合, 分母は 0 と 2 と相異なる根を持ち,

$$s^2+2s=s(s+2)$$

  と因数分解できる.

- この因数分解を用いると

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}.$$

  として部分分数分解ができるのであった (前の例題でみた).

分母が重根をもつ場合の部分分数分解

例題 (重根を持つ場合)

$F(s) = \dfrac{3s-1}{s^2-4s+4}$ を部分分数分解して逆ラプラス変換を求めよ.

- 分母は
$$s^2-4s+4=(s-2)^2$$
であり重複度が 2 の根 2 を持つ.
- このとき
$$F(s)=\frac{A}{(s-2)^2}.$$
を満たす定数 A がとれるか? $\rightsquigarrow$ **今回の場合はとれない.**
- この場合は,
$$F(s)=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}.$$
とおくと部分分数分解ができる.

- 右辺を通分して足し合わせると

$$\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}=\frac{A(s-2)+B}{(s-2)^2}=\frac{As-2A+B}{(s-2)^2}.$$

- よって $F(s)$ の分子の係数と比較すると

$$A=3, \quad -2A+B=-1$$

であり，これを解くと $A=3$, $B=5$ と求まる.

- 以上より

$$F(s)=\frac{3}{s-2}+\frac{5}{(s-2)^2}$$

と部分分数分解できて，ラプラス変換表からその逆ラプラス変換は

$$L^{-1}(F(s))=3L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+5L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)=3e^{2t}+5te^{2t}.$$

と求まる.

虚数の根をもつ場合の部分分数分解

例題 (虚数の根を持つ場合)

$F(s) = \dfrac{s+5}{s^2-2s+5}$ の逆ラプラス変換を求めよ．

- 分母は $s^2-2s+5=(s-1)^2+2^2$ であり，実数の範囲ではこれ以上因数分解できない．
  (分母の根は $1 \pm 2i$ である)

- この場合は

$$F(s) = \frac{A(s-1)}{(s-1)^2+2^2} + \frac{2B}{(s-1)^2+2^2}$$

  と部分分数分解する．(A には $(s-1)$ が，B には 2 が掛けられていることに注意)

- 右辺を通分して足し合わせると

$$\frac{A(s-1)}{(s-1)^2+2^2} + \frac{2B}{(s-1)^2+2^2} = \frac{A(s-1)+2B}{(s-1)^2+2^2} = \frac{As-A+2B}{(s-1)^2+2^2}.$$

- よって $F(s)$ の分子の係数と比較すると

$$A = 1, \quad -A + 2B = 5$$

より，$A = 1, B = 3$ と求まる.

- したがって

$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} + 3 \cdot \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}$$

と部分分数分解できて，ラプラス変換表からその逆ラプラス変換は

$$L^{-1}(F(s)) = = L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right) + 3 \cdot L^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right)$$

$$= e^t \cos 2t + 3e^t \sin 2t.$$

部分分数分解のまとめ

$P(s), Q(s)$ を s の多項式とする有理多項式の部分分数分解:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (\text{ただし } P(s) \text{ の次数} < Q(s) \text{ の次数}).$$

単根のみの場合 $Q(s)$ が相異なる実数根 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ をもつ場合,

$$\frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-\lambda_n}$$

重根をもつ場合 $Q(s)$ が重複度 m の実数根 λ をもつ場合,

$$\frac{A_1}{s-\lambda} + \frac{A_2}{(s-\lambda)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s-\lambda)^m}$$

虚数の根をもつ場合 $Q(s)$ が虚数の根 $\alpha \pm \beta i$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$ をもつ場合,

$$\frac{A(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{B \cdot \beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

例題

$F(s) = \dfrac{3s^2 - 16s + 21}{(s-1)^2(s+3)}$ を部分分数分解して逆ラプラス変換を求めよ.

- 分母は実根として 1 (重複度 2) と -3 (重複度 1) を持つ.
- そこで,

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3}$$

とおいて, A, B, C を求める.

- 右辺の各項を通分して足し合わせた際の分子は

$$A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2 = (A+C)s^2 + (2A+B-2C)s + (-3A+3B+C).$$

- $F(s)$ の分子と係数比較すると

$$\begin{aligned} A + C &= 3, \\ 2A + B - 2C &= -16, \\ -3A + 3B + C &= 21. \end{aligned}$$

であり，これを解くと $A = -3$, $B = 2$, $C = 6$ と求まる.

- 以上より

$$F(s) = \frac{-3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{6}{s+3}$$

と部分分数分解できて，その逆ラプラス変換は

$$\begin{aligned} L^{-1}(F(s)) &= -3L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + 6L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) \\ &= -3e^t + 2te^t + 6e^{-3t}. \end{aligned}$$

と求まる.

補足: 代入法による定数 A, B, C の求め方

- 先程は任意の s に対して

$$3s^2 - 16s + 21 = A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2$$

が成り立つ定数 A, B, C を係数比較で求めた. 別の方法として s に特定の値を代入して定数を求める方法もある.

- $s = 1$ を代入すると

$$8 = 4B \quad \rightsquigarrow \quad B = 2.$$

- $s = -3$ を代入すると

$$96 = 16C \quad \rightsquigarrow \quad C = 6.$$

- $s = 0$ を代入すると

$$21 = -3A + 3 \times B + C \quad \rightsquigarrow \quad A = -3.$$

特定の s を代入して定数を求める方法を代入法という.
単純な係数比較よりも代入法のほうが簡単に定数を求められる場合がある.

目次

ラプラス変換を用いた解法の流れ

Step 1: 常微分方程式をラプラス変換する. $\rightsquigarrow$ s の世界での代数方程式を得る.

Step 2: 得られた代数方程式を解く. $\rightsquigarrow$ s の関数を得る

Step 3: s の関数を逆ラプラス変換する. $\rightsquigarrow$ t の関数を得る.

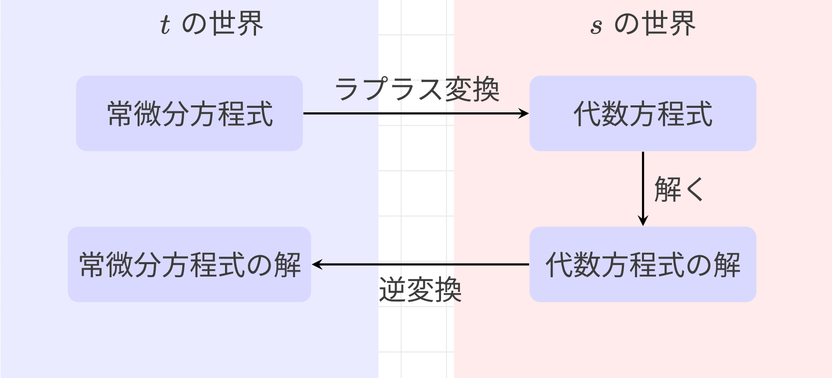

Figure: ラプラス変換を用いて常微分方程式を解く概念図

ラプラス変換を用いた初期値問題の解法

例題

t を独立変数とする関数 $x(t)$ に関する次の初期値問題を解け:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = 1.$$

- $L(x(t)) = X(s)$ とおくと,

$$L\left(\frac{dx}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$L\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0).$$

- よって微分方程式の左辺のラプラス変換は

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x(t)\right) &= (s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) - 3(sX(s) - x(0)) + 2X(s) \\ &= s^2X(s) - s - 1 - 3(sX(s) - 1) + 2X(s) \\ &= (s^2 - 3s + 2)X(s) - s + 2 \end{aligned}$$

- 微分方程式の右辺のラプラス変換は 0 .
- よってラプラス変換によって次の方程式を得る:

$$(s^2 - 3s + 2)X(s) = s - 2.$$

- この方程式を $X(s)$ について解くと

$$X(s) = \frac{s-2}{s^2-3s+2} = \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1}.$$

- よってラプラス変換表から初期値問題の解は次のように求まる:

$$x(t) = L^{-1}(X(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^t.$$

例題 (虚数の根が現れる場合)

t を独立変数とする関数 $x(t)$ に関する次の初期値問題を解け:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x(t) = 4e^{2t}\sin t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

- $L(x(t)) = X(s)$ とおくと, 与えられた方程式の左辺のラプラス変換は

$$\begin{aligned} L(\text{左辺}) &= \left(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right) - 4(sX(s) - x(0)) + 3X(s) \\ &= (s^2 - 4s + 3)X(s). \end{aligned}$$

- また, 右辺のラプラス変換は

$$L(\text{右辺}) = \frac{4}{(s-2)^2+1}.$$

- よってラプラス変換によって次の方程式を得る:

$$(s^2 - 4s + 3)X(s) = \frac{4}{(s-2)^2+1}.$$

- この方程式を $X(s)$ について解くと

$$X(s) = \frac{4}{(s^2-4s+3)((s-2)^2+1)} = \frac{4}{(s-1)(s-3)((s-2)^2+1)}.$$

- ここで

$$X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \frac{C(s-2)}{(s-2)^2+1} + \frac{D}{(s-2)^2+1}$$

と部分分数分解をして，定数を求めると

$$A=-1, \quad B=1, \quad C=0, \quad D=-2$$

と求まる．

- したがって，ラプラス変換表より初期値問題の解は次のように求まる:

$$L^{-1}(X(s)) = L^{-1}\left(\frac{-1}{s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) + L^{-1}\left(\frac{-2}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$= -e^t + e^{3t} - 2e^{2t}\sin t.$$

例題 (既知関数を含む場合)

$f(t)$ を既知の関数とした，次の初期値問題を解け:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = f(t), \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

- $L(x(t)) = X(s)$, $L(f(t)) = F(s)$ とおくと, 与えられた方程式の両辺のラプラス変換は

$$L(\text{左辺}) = (s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + X(s) = (s^2 + 1)X(s),$$
$$L(\text{右辺}) = F(s).$$

- よって $X(s)$ について解くと

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 1}.$$

- したがって，合成積のラプラス変換から初期値問題の解は次のように求まる:

$$L^{-1}(X(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1} \cdot F(s)\right) = \sin t * f(t).$$

まとめ

講義の振り返り

- 逆ラプラス変換の定義と性質
- 逆ラプラス変換における部分分数分解
- ラプラス変換を用いた初期値問題の解法

自宅での復習

- 部分分数分解に基づく逆ラプラス変換の計算を確認する．
  (重根をもつ場合，根が虚数になる場合の扱いに注意)
- 逆ラプラス変換を用いた初期値問題の求解の流れを確認する．

ラプラス変換の性質

線形則 $L(af(t)+bg(t)) = aF(s)+bG(s)$

相似則 $L(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

移動則 $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$

原関数の微分則 $L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s)-f(0)$

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

像関数の微分則 $L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$

合成積のラプラス変換 $L(f*g) = F(s)G(s)$