1 階の微分方程式

数理工学 第 10 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 10 日

授業で扱う微分方程式のトピック

1 階微分方程式

- 変数分離形
- 同次形
- **1 階線形微分方程式 (斉次，非斉次)** $\rightsquigarrow$ 今回
- **Bernoulli 型の微分方程式** $\rightsquigarrow$ 今回

高階微分方程式

- (特殊な) 2 階微分方程式
- 高階線形微分方程式

ラプラス変換を用いた解法

目次

目次

1 階線形微分方程式

対象とする方程式: 1 階線形微分方程式

未知関数 $y = y(x)$ とその導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ に関する 1 次式で表される微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

を **1 階線形微分方程式**という．特に

$$Q(x) \equiv 0 \quad (\text{恒等的に } 0 \text{ と等しい})$$

の場合を**斉次方程式**といい，そうでない場合を**非斉次方程式**という．

補足

- 書籍によっては，斉次を「同次」とよぶ場合もある．
- しかしここでは「同次形」と区別するため，「斉次」を用いる．

斉次方程式の場合の解法

斉次 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

- 左辺の第 2 項を右辺に移項して

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

 とすると, これは変数分離形の微分方程式である.

- よって変数分離形の解法を用いて, 式 (2) の一般解 y は

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int P(x)dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

 を満たす.

- 左辺の不定積分を計算して

$$\log|y| = -\int P(x)dx + C.$$

であることから，両辺の指数関数をとると

$$y = \pm\exp(C)\cdot\exp\left(-\int P(x)dx\right).$$

- よって任意定数を適当に置き換えて, 斉次 1 階微分方程式 (2) の一般解は

$$y = C\exp\left(-\int P(x)dx\right) \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表せる.

非斉次方程式の場合の解法

非斉次 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

方針　非斉次の場合の解は，斉次方程式の解に**似ているだろう**と予想.

- 斉次方程式の場合の一般解

$$y = C\exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

における任意定数 C を x に関する関数 $C(x)$ に置き換え,

$$y = C(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) \tag{4}$$

と表される関数から方程式 (3) の解を見つける.

- $y = C(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)$ を方程式 (3) の左辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + P(x)y &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{d}{dx}\left(C(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)\right)} + P(x)C(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) \\
&= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{C'(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) - C(x)P(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)} \\
&\quad + P(x)C(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) \\
&= C'(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right).
\end{aligned}
$$

- したがって,

$$
C'(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) = Q(x)
$$

すなわち

$$
C'(x) = Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right) \tag{5}
$$

を満たす $C(x)$ が求まれば, 非斉次方程式 (3) の解が得られる.

- 式 (5) を x について積分すれば, $C(x)$ は

$$C(x) = \int Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right)dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と求まる.

- これを式 (4) に代入して，非斉次 1 階微分方程式 (3) の一般解

$$y = \underbrace{\left\{\int Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right)dx + C\right\}}_{=C(x)} \exp\left(-\int P(x)dx\right) \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る.

補足　斉次方程式の一般解で現れる定数を関数に置き換えて非斉次方程式の解を求める解法を**定数変化法**という.

例題

次の非斉次 1 階線形微分方程式を解け:

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = -\sin x + 2x \cos x. \tag{6}$$

- まず右辺を 0 にした次の斉次方程式の一般解を求める:

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = 0.$$

- これは変数分離形の微分方程式で, 一般解は

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \tan x dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

すなわち

$$\log|y| = \log|\cos x| + C$$

を満たす.

- よって $\boxed{y = C \cos x \ (C \text{ は任意定数})}$ が斉次方程式の一般解である.

- 次に, 定数変化法を用いて非斉次方程式 (6) の一般解を求める.
- $\boxed{y = C(x)\cos x}$ として方程式 (6) の左辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + y\tan x &= \frac{d}{dx}C(x)\cos x + C(x)\cos x\tan x \\
&= \bigl(C'(x)\cos x - C(x)\sin x\bigr) + C(x)\sin x \\
&= C'(x)\cos x.
\end{aligned}
$$

- よって

$$C'(x)\cos x = -\sin x + 2x\cos x$$

すなわち

$$C'(x) = -\tan x + 2x \tag{7}$$

を満たす $C(x)$ を求めればよい.

- 式 (7) の両辺を x について積分すれば $C(x)$ は

$$C(x) = \int (-\tan x + 2x)dx + C$$
$$= \log|\cos x| + x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

　と求まる．

- 以上より，非斉次 1 階線形微分方程式 (6) の一般解は

$$y = \Big(\log|\cos x| + x^2 + C\Big) \cos x \quad (C \text{ は任意定数})$$

　と求まる．

目次

Bernoulli 型微分方程式の解法

Bernoulli 型微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \text{ は定数で } n > 1). \tag{8}$$

方針　変数変換で 1 階線形微分方程式に帰着する.

- 方程式 (8) の両辺を y^n で割ると

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x). \tag{9}$$

- $z = \dfrac{1}{y^{n-1}} (= y^{1-n})$ とすると, 合成関数の微分から

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= (1-n)\,\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}.\end{aligned}$$

- これを式 (9) に代入して

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x).$$

- これは 1 階線形微分方程式なので, 定数変化法で z の一般解が求まる.
- 最後に $z = y^{1-n}$ を用いて z の一般解から y を求めれば,
  それが Bernoulli 型微分方程式 (8) の一般解である.

例題

次の Bernoulli 型微分方程式を解け:

$$\frac{dy}{dx} - y = -3y^2. \tag{10}$$

- 方程式 (10) の両辺を y^2 で割ると

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = -3. \tag{11}$$

- $z = \dfrac{1}{y}$ とする．このとき，

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

- これを式 (11) に代入すると

$$\frac{dz}{dx} + z = 3.$$

$\rightsquigarrow$ 1 階線形微分方程式かつ変数分離形

- 左辺を z について変形して
$$\frac{dz}{dx} = 3 - z.$$

- 両辺を $3 - z$ で割って両辺の不定積分を考えると
$$\int \frac{1}{3-z} dz = \int 1 dx + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

- よって一般解は
$$-\log|3 - z| = x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$
すなわち
$$z = 3 - C\exp(-x) \quad (C \text{ は任意定数}).$$

- $y = z^{-1}$ なので, 最終的に方程式 (10) の一般解として次を得る:
$$y = \frac{1}{3 - C\exp(-x)} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

目次

特殊解を用いた解法

特殊解が求まる場合, それを用いて一般解が求まる場合もある.

例題

次の 1 階線形微分方程式を解け:

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2xy-x^2-1=0. \tag{12}$$

- この方程式において, $y=x$ は特殊解である (代入すれば分かる).
- $\boxed{y=x+z(x)}$ として, 微分方程式 (12) を満たす関数 $z=z(x)$ を求めことを考える.
- 微分方程式 (12) の左辺に $y=x+z$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (1-x^2)\frac{d}{dx}(x+z)+2x(x+z)-x^2-1\\ &= (1-x^2)\frac{dz}{dx}+2xz+\underbrace{(1-x^2)\cdot 1+2x^2-x^2-1}_{=0}=(1-x^2)\frac{dz}{dx}+2xz.\end{aligned}$$

- よって

$$(1-x^2)\frac{dz}{dx}+2xz=0 \tag{13}$$

を満たす一般解 z が求めれば微分方程式 (12) の一般解が求まる.

- 式 (13) を整理して

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{2x}{1-x^2}z. \tag{14}$$

- これは変数分離形の微分方程式なので，一般解 z は

$$\int\frac{1}{z}dz=\int\frac{-2x}{1-x^2}dx+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

すなわち，

$$\log|z|=\log|1-x^2|+C$$

を満たす.

- よって，z に関する微分方程式 (14) の一般解 z は

$$z = C(1 - x^2) \quad (C \text{ は任意定数}).$$

と求まる.

- よって, 元の微分方程式 (12) の一般解は

$$y = x + z = x + C(1 - x^2) \quad (C \text{ は任意定数})$$

と求まる.

$\boxed{\text{補足}}$ 微分方程式 (12) は非斉次 1 階線形微分方程式なので, 定数変化法でも解ける.

特殊解を用いた解法の応用：Riccati 型微分方程式

Riccati 型微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x). \tag{15}$$

方針　特殊解を用いて 1 階線形微分方程式に帰着する．

- 方程式 (15) において, $y = y_1(x)$ が特殊解であるとする.
- $\boxed{y = y_1(x) + u(x)}$ として, 方程式 (15) を満たす関数 $u = u(x)$ を求めることを考える.
- 方程式 (15) の左辺に $y = y_1 + u$ を代入すると,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{d}{dx}(y_1 + u) + P(x)(y_1 + u) + Q(x)(y_1 + u)^2 \\ &= \frac{du}{dx} + (P(x) + 2Q(x)y_1)u + Q(x)u^2 + \underbrace{\left(\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2\right)}_{=R(x)\ (\because\ y_1\ \text{は特殊解})}\end{aligned}$$

- よって，次の 1 階線形微分方程式

$$\frac{du}{dx} + (P(x) + 2Q(x)y_1)u + Q(x)u^2 = 0$$

を満たす一般解 u を求めればよい．

- これは $n = 2$ とした Bernoulli 型微分方程式なので, $z = \dfrac{1}{u}$ と変数変換すれば, z に関する 1 階の線形微分方程式を得る．

- よってその一般解 z を求めて

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

とすれば, Riccati 型微分方程式 (15) の一般解 y が求まる．

まとめ

講義の振り返り

- 1 階線形微分方程式と定数変化法
- 定数変化法を用いた Bernoulli 型微分方程式の解法
- 特殊解を用いた解法

自宅での復習

- 定数変化法を用いた解の導出の流れを確認する．
- Bernoulli 型微分方程式を線形微分方程式に帰着させる流れを確認する．