

固有値・固有ベクトル

数理工学 第5回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 10 月 20 日

目次

① 固有値・固有ベクトルの定義と性質

② 行列の対角化

目次

① 固有値・固有ベクトルの定義と性質

② 行列の対角化

固有値・固有ベクトル

定義 (固有値・固有ベクトル)

n 次正方行列 A に対して,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満たすスカラー λ と非ゼロベクトル \mathbf{x} ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) が存在するとき, λ を A の**固有値 (eigenvalue)**, \mathbf{x} を固有値 λ に対応する**固有ベクトル (eigenvector)** という.

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. このとき

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}$$

したがって, 2 は A の固有値であり, \mathbf{x} は固有値 2 に対応する固有ベクトルである.

固有多項式と固有方程式

- n 次正方行列 A に対して, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より,
 λ が A の固有値 \iff 線形方程式系 $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非ゼロベクトルの解を持つ
 $\iff \det(\lambda I - A) = 0$.

定義 (固有多項式, 固有方程式)

- $f_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ を A の**固有多項式 (characteristic polynomial)**,
- $f_A(\lambda) = 0$ を A の**固有方程式 (characteristic equation)** という.

↪ 固有値は固有方程式の根

固有方程式は n 次方程式であるため, 代数学の基本定理から次がいえ:

定理 (固有値の個数は正方行列のサイズと一致)

複素数の範囲で考えたとき, n 次正方行列 A は重複を許して n 個の固有値をもつ.

固有値・固有ベクトルに関する注意点

注意

- 正方行列 A が実行列であっても、固有値は実数であるとは限らない。
- 同様に、固有ベクトルも実ベクトルであるとは限らない。

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき、固有方程式は

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

- よって A の固有値は $\pm i$ であり、実数ではない。
- $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ とすると、 $Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = ix$.
- よって x は固有値 i に対応する固有ベクトルであるが、実ベクトルではない。

固有空間

固有ベクトルの注意点 一つの固有値に対応する固有ベクトルは無数に存在

- n 次正方行列 A の固有値を λ , 対応する固有ベクトルを \boldsymbol{x} とする
- このとき, \boldsymbol{x} のスカラー倍 $\alpha\boldsymbol{x}$ ($\alpha \neq 0$) に対して

$$(\lambda I - A)(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

- よって $\alpha\boldsymbol{x}$ も固有ベクトル.

定義 (固有空間)

正方行列 A の固有値 λ に対して, 次のように定義される集合

$$W(\lambda) := \{\boldsymbol{x} \mid (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

を固有値 λ に対応する**固有空間 (eigenspace)** という.

- 固有空間は固有ベクトル全体の集合にゼロベクトルを加えた集合
- 以後「固有ベクトル」というときは, ゼロベクトル以外の固有空間上のベクトルを指す.

固有空間の性質

固有空間の性質: 固有空間は和とスカラー倍に関して閉じた部分空間

固有空間 $W(\lambda)$ は部分空間である.

スカラー倍に関して閉じていること

- 前のページと同様の議論で示せるので省略.

和に関して閉じていること

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W(\lambda)$ に対し,

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).$$

- よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W(\lambda)$ であり, 和に関して閉じている.

固有値の重要な性質

定理 (固有値の総積, 総和はそれぞれ行列式, トレースに等しい)

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると, 次が成立:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

証明の概略 (完全な証明は省略)

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は固有方程式の根であるため, 固有多項式は次のように因数分解できる:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (1)$$

- 式 (1) は λ に関する恒等式であり, 両辺の定数項と λ^{n-1} の係数を比較すると

$$[\text{定数項}] \quad \det(-A) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad [\lambda^{n-1} \text{ の係数}] \quad -\operatorname{tr}(A) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$$

となって所望の等式を得る.

- $\det(\lambda I - A)$ の係数の計算には余因子展開を使う.



例題 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有空間を求めよ.

サラスの公式

- サラスの公式で固有多項式を計算すると

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 & 3 \\ -6 & \lambda + 1 & -6 \\ -6 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 4)(\lambda + 1)(\lambda - 5) + 18(\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda - 2).\end{aligned}$$

- よって, A の固有値は $2, -1$ (重複度 2).

$$\begin{aligned}&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

- 1 つ目の固有値に対応する固有空間

$$\begin{aligned} W(2) &= \{\mathbf{x} \mid (2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

注意: 基底の取り方は一意ではない

- 2 つ目の固有値に対応する固有空間

$$W(-1) = \{\mathbf{x} \mid (-I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

目次

① 固有値・固有ベクトルの定義と性質

② 行列の対角化

対角行列とその利点

対角成分以外の成分がすべてゼロの行列を**対角行列 (diagonal matrix)** という.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

対角行列の性質

- 対角行列 D の固有値は対角成分 $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$ と等しい.
- 対角行列 D の k 乗は, 対角成分を k 乗した対角行列である (積の計算が簡単):

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

相似な行列

相似な行列

n 次正方行列 A, B に対してある正則行列 P が存在し,

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つとき, A と B は**相似 (similar)** な行列という.

定理 (相似な行列の固有値)

相似な行列 A, B の固有値は一致する.

証明 $B = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P をとる. このとき,

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(\lambda I - \underbrace{P^{-1}AP}_{=B}) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = \det(\lambda I - A) = f_A(\lambda). \end{aligned}$$

よって A と B の固有多項式は一致し, 固有値も同様に一致する.

対角化可能

定義 (対角化可能)

n 次正方行列 A が対角行列と相似なとき, すなわちある正則行列 P と対角行列 D が存在して $A = P^{-1}DP$ が成り立つとき, A は**対角化可能 (diagonalizable)** という.

対角化可能な行列の利点

- A が対角化可能なとき, 相似な行列の性質から

$$(A \text{ の固有値}) = (D \text{ の固有値}) = (D \text{ の対角成分}).$$

- A の k 乗は

$$\begin{aligned} A^k &= \overbrace{(P^{-1}DP)(P^{-1}DP) \cdots (P^{-1}DP)(P^{-1}DP)}^{k \text{ 個}} \\ &= P^{-1}D^kP \end{aligned}$$

となり, D^k を用いて簡単に計算できる.



対角化可能な行列はどのような行列か?

定理 (対角化可能な必要十分条件)

n 次正方行列 A に対して,

A が対角化可能 $\iff A$ が n 個の線形独立な固有ベクトルをもつ

証明 (n 個の固有ベクトルが線形独立) \Rightarrow (対角化可能) を示す.

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を A の線形独立な固有ベクトル, それぞれに対応する固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする. (すなわち $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$))
- $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ とすると, P は正則行列であり,

$$\begin{aligned} AP &= A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n) \\ &= (\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{v}_n) = \underbrace{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)}_P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- よって, 上の両辺に P^{-1} を左から掛けると,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- これより, A が n 個の線形独立な固有ベクトルをもつとき, A は対角化可能である.

(対角化可能) \Rightarrow (n 個の固有ベクトルが線形独立) を示す.

- A が対角化可能なとき,

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}}_{D \text{ とおく}} \quad (2)$$

を満たす正則行列 P と対角行列 D が存在.

- $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ とすると, P の正則性から列ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は線形独立.
- 式 (2) の両辺に P を左から掛けると,

$$AP = PD.$$

- ここで

$$\begin{aligned}AP &= A(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) \\&= (A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \dots, A\boldsymbol{v}_n), \\PD &= (d_{11}\boldsymbol{v}_1, d_{22}\boldsymbol{v}_2, \dots, d_{nn}\boldsymbol{v}_n)\end{aligned}$$

であるから, $AP = PD$ より

$$A\boldsymbol{v}_1 = d_{11}\boldsymbol{v}_1, \quad A\boldsymbol{v}_2 = d_{22}\boldsymbol{v}_2, \quad \dots, \quad A\boldsymbol{v}_n = d_{nn}\boldsymbol{v}_n.$$

よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は A の固有ベクトルである.

- 以上より, A が対角化可能のとき, A は n 個の線形独立な固有ベクトルをもつ. □

固有ベクトルが線形独立になる十分条件

- 一般に n 次正方行列が n 個の線形独立な固有ベクトルを持つとは限らない.
- 次の命題は, 固有ベクトルが線形独立であることの十分条件を与える.

定理 (固有値ベクトルが線形独立である十分条件)

n 次正方行列 A の相異なる s 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ に対応する固有値ベクトルは線形独立である.

証明 s に関する帰納法で示す.

- 相異なる $s-1$ 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}$ が線形独立と仮定.
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$ いずれとも異なる固有値を λ_s とし, 対応する固有ベクトルを \mathbf{v}_s とする.
 $\rightsquigarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{v}_s$ が線形独立であることを示す.

- c_1, c_2, \dots, c_s をスカラーとして, 次が成り立つと仮定する:

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} \mathbf{v}_{s-1} + c_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}. \quad (3)$$

- 両辺に左から A を掛けて次を得る:

$$\begin{aligned} c_1 A \mathbf{v}_1 + c_2 A \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} A \mathbf{v}_{s-1} + c_s A \mathbf{v}_s \\ = c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} \lambda_{s-1} \mathbf{v}_{s-1} + c_s \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4)$$

- 式 (4) - 式 (3) $\times \lambda_s$ を計算すると,

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_s) \mathbf{v}_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_s) \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} (\lambda_{s-1} - \lambda_s) \mathbf{v}_{s-1} = \mathbf{0}$$

を得る.

- ここで $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}$ は線形独立であるため,

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_s) = c_2(\lambda_2 - \lambda_s) = \dots = c_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0.$$

- λ_s は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$ いずれとも異なるため,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{s-1} = 0.$$

- したがって, 式 (3) から $c_s = 0$.
- 以上より,

$$\text{式 (3)} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_{s-1} = c_s = 0.$$

が示され, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{v}_s$ が線形独立であるとわかる.



対角化可能な行列の十分条件

これまでのまとめ

- n 次正方行列が対角化可能 $\iff n$ 個の線形独立な固有ベクトルが存在
- 相異なる固有値に対応する固有ベクトルは線形独立.

~> これらを組み合わせて、対角化可能性の十分条件を得る.

定理 (対角化可能な行列の十分条件)

n 次正方行列 A の固有値がすべて異なるとき、 A は対角化可能である.

- 行列が対角化可能であることの恩恵は「固有値・固有ベクトルの応用」で見る

まとめ

講義の振り返り

- 固有値・固有ベクトルの定義とその性質
- 相似な行列と対角化可能な行列
- 行列が対角化可能であるための条件 (必要十分条件と十分条件)

自宅での復習

- 固有値・固有ベクトルの定義を再確認する.
- サラスの公式, 固有値・固有空間の基底を求める流れを確認する.
- 対角化可能性に関する証明の流れを確認する.