

# ラプラス変換

## 数理工学 第 12 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 17 日

# 授業で扱う微分方程式のトピック

## 1 階微分方程式

- 変数分離形
- 同次形
- 1 階線形微分方程式 (斉次, 非斉次)
- Bernoulli 型の微分方程式

## 高階微分方程式

- (特殊な) 2 階微分方程式
- 高階線形微分方程式

ラプラス変換を用いた解法  $\rightsquigarrow$  今回 - 第 14 回

# 目次

- ① ラプラス変換の導入と定義
- ② 基本的な関数のラプラス変換
- ③ ガンマ関数を用いたラプラス変換

# 目次

- ① ラプラス変換の導入と定義
- ② 基本的な関数のラプラス変換
- ③ ガンマ関数を用いたラプラス変換

# ラプラス変換を用いた微分方程式の求解

- ラプラス変換では,  $t$  の関数  $f(t)$  を,  $s$  の関数  $F(s)$  に変換する。  
ただし, この変換は  $f'(t)$  を大体  $sF(s)$  に変換するものとする。
- ラプラス変換を  $t$  の世界の微分方程式に適用すると,  $s$  の世界の代数方程式に変わる
- 代数方程式を問いた結果から元の微分方程式の解を求める。

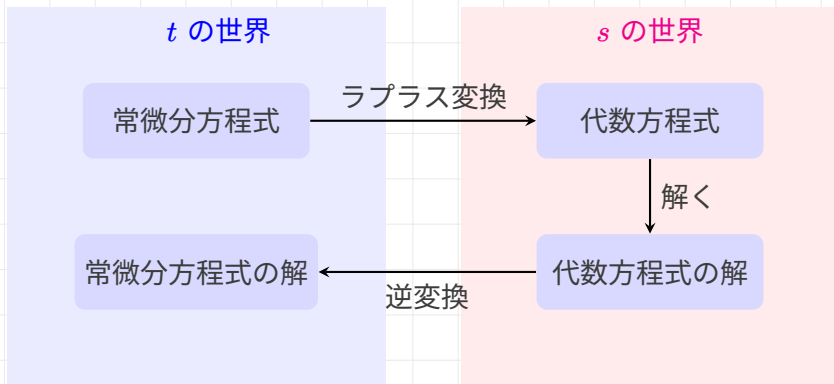


Figure: ラプラス変換を用いて常微分方程式を解く概念図

# ラプラス変換の定義

## 定義 (ラプラス変換)

区間  $(0, \infty)$  上で定義された実数値関数  $f(t)$  に対し,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

と定義される関数  $F(s)$  を,  $f(t)$  のラプラス変換という.

- 上の定義において,  $f(t)$  を原関数,  $F(s)$  を像関数という.
- ラプラス変換を表す記号として

$$L(f) = F(s)$$

と書くこともある.

**補足** ラプラス変換の積分が収束する  $s$  の範囲を**収束域**という.

- 一般に像関数の変数  $s$  は複素数の範囲をとる
- ただしこの授業では,  $s$  は (積分が収束する条件のもとで) 実数とする

# ラプラス変換が存在するための条件

疑問 ラプラス変換  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  に対し,

- どのような関数  $f(t)$  に対して
- どのような  $s$  で, 積分は収束するのか? 🤔

## 定理 (積分が収束する $s$ の条件)

ある  $s = s_0$  に対して  $F(s_0)$  が収束するとき, 任意の  $s > s_0$  で  $F(s)$  は収束する.  
つまり  $s > s_0$  ではラプラス変換が定義される.

## 定理 (基本的な関数はラプラス変換可能)

指数関数, 三角関数, 多項式は適当な収束域でラプラス変換が定義できる. また, これらの積・スカラー倍・和で構成される関数もラプラス変換が定義できる.

# 目次

- ① ラプラス変換の導入と定義
- ② 基本的な関数のラプラス変換
- ③ ガンマ関数を用いたラプラス変換



# 定数関数のラプラス変換

$f(t) = 1$  のラプラス変換は  $s > 0$  のときに定義され,

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

## 導出

- ラプラス変換の定義から,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \, dt. \quad (1)$$

- $s \neq 0$  のとき,

$$\text{式 (1)} = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{s} & (s > 0), \\ -\infty & (s < 0). \end{cases}$$

- $s = 0$  のとき, 式 (1)  $= \int_0^{\infty} 1 \, dt = \infty$ .

# 指数関数のラプラス変換

$a$  を実数とした指数関数  $f(t) = e^{at}$  のラプラス変換は  $s > a$  のときに定義され,

$$F(s) = \frac{1}{s - a} \quad (s > a).$$

## 導出

- ラプラス変換の定義から,  $s \neq a$  のとき

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & (s > a), \\ -\infty & (s < a). \end{cases} \end{aligned}$$

- $s = a$  のとき,  $F(s) = \int_0^{\infty} 1 dt = \infty$ .

## 三角関数のラプラス変換

$a$  を実数とした関数  $f(t) = \cos(at)$  のラプラス変換は  $s > 0$  のときに定義され,

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0).$$

導出  $s \leq 0$  のとき, 積分は収束しない.

- $s > 0$  のとき, 部分積分を用いると

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(at) dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(at) \right]_0^{\infty} - \underbrace{\frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(at) dt}_{\text{~~~~~}} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \left\{ \underbrace{\left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \sin(at) \right]_0^{\infty}}_{\text{~~~~~}} + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(at) dt \right\} = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2} F(s). \end{aligned}$$

- これを整理して  $F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$  を得る.

## べき関数のラプラス変換

$n$  を非負整数とする.  $f(t) = t^n$  のラプラス変換は  $s > 0$  のときに定義され,

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0). \quad (2)$$

**導出**  $t^n$  のラプラス変換を  $F_n(s) := L(t^n)$  と書き,  $n$  に関する漸化式から導出する.

- $n$  を 1 以上の整数とする.  $s > 0$  のとき, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt \\ &= \underbrace{\left[ -\frac{1}{s} e^{-st} t^n \right]_0^\infty}_{=0 \text{ (後述)}} + \frac{n}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt}_{=F_{n-1}(s)} \\ &= \frac{n}{s} F_{n-1}(s). \end{aligned}$$

- よってこれを繰り返し用いて

$$F_n(s) = \frac{n}{s} F_{n-1}(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} F_{n-2}(s) = \cdots = \frac{n!}{s^n} F_0(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

- また  $0! = 1$  と定義すると, 式 (2) は  $n = 0$  のときも成り立つ.

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} t^n = 0$  の証明

- $s > 0$  のもとで  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} t^n$  を考える.
- このときロピタルの定理 (適当な条件のもと  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ) が利用可能で

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n t^{n-1}}{s e^{st}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{s^2} \frac{t^{n-2}}{e^{st}} = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{s^n} \frac{1}{e^{st}} = 0. \end{aligned}$$

# 目次

- ① ラプラス変換の導入と定義
- ② 基本的な関数のラプラス変換
- ③ ガンマ関数を用いたラプラス変換

# ガンマ関数の導入と定義

先ほどの議論 べき乗のラプラス変換について

- 指数  $n$  が**非負整数**であるべき関数  $f(t) = t^n$  のラプラス変換を求めた
- 指数  $n$  が**実数**の場合で、べき関数のラプラス変換は求められるか? 🤔



ガンマ関数を用いると、実数の場合に拡張できる

## 定義 (ガンマ関数)

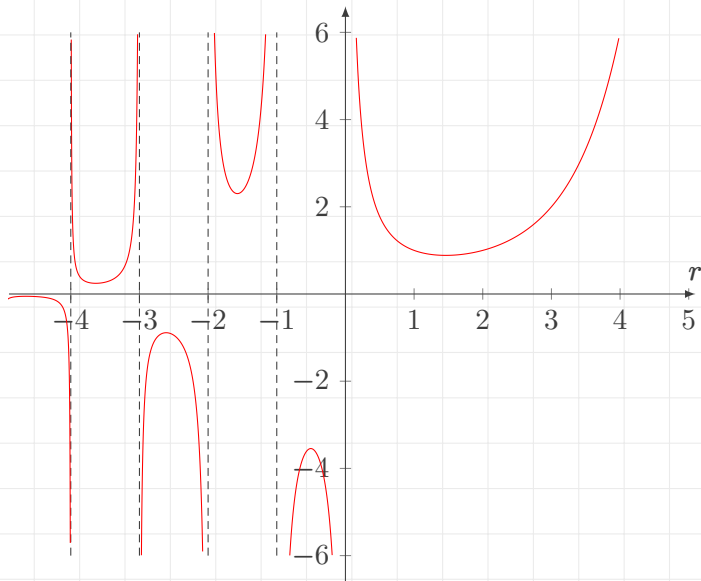
正の実数  $r > 0$  に対して

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-1} dt$$

と定義される関数  $\Gamma(r)$  を**ガンマ関数**という.

- ガンマ関数と階乗の関係 (後述) から、ガンマ関数を階乗関数ということもある.

## ガンマ関数のグラフ



**Figure:** ガンマ関数  $\Gamma(r)$  ( $r$  が負の領域も含む)



# ガンマ関数の性質 (階乗との関係)

ガンマ関数は非負整数の階乗を実数に拡張したものとみなせる (階乗関数とよばれる所以)

定理 (ガンマ関数は階乗の性質を満たす)

- (1) 正の実数  $r > 0$  に対して,  $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ .
- (2)  $\Gamma(1) = 1$ .
- (3) 任意の非負整数  $n \geq 0$  に対して,  $\Gamma(n+1) = n!$ . (ただし  $0! = 1$  と定義する)

証明

- 部分積分を用いれば,

$$\Gamma(r+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^r dt = \underbrace{\left[ -e^{-t} t^r \right]_0^{\infty}}_{=0} + r \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-1} dt = r\Gamma(r).$$

- $r = 1$  の場合は  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$  である. これらの結果から (3) も示される. □

# ガンマ関数の性質 (特定の場合の関数値)

定理 (特定の実数におけるガンマ関数の値は具体的に求まる)

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  が成り立つ.

証明 置換積分を用いる.

- ガンマ関数の定義より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

- $x = \sqrt{t}$  と変数変換すると  $t = x^2$  より  $dt = 2x dx$  であるから,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x dx = 2 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}/2} = \sqrt{\pi}$$

- なお最後の等式はガウス積分  $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\right)$  に基づく.

□

(ガウス積分の詳細は『経営工学の数理 I』例題 13.3 を見よ)

## ガンマ関数に帰着できる積分の例

例題 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}} t^{1/4} dt.$$

- $x = \sqrt{t}$  と変数変換すると,  $t = x^2$  より  $dt = 2x dx$  であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}} t^{1/4} dt &= \int_0^{\infty} e^{-x} (x^2)^{1/4} \cdot 2x dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} x^{3/2} dx \\ &= 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

## べき関数のラプラス変換の拡張

### 定理 (実数乗のべき関数のラプラス変換)

$r > -1$  とする.  $f(t) = t^r$  のラプラス変換は  $s > 0$  のときに定義され,

$$F(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad (s > 0).$$

証明 置換積分を用いる.

- $u = st$  と変数変換すると,  $du = s dt$  である.
- よって  $s > 0$  のとき

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^r dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r \frac{1}{s} du \\ &= \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^r du = \frac{1}{s^{r+1}} \Gamma(r+1). \quad \square \end{aligned}$$

## 主要な関数のラプラス変換の結果 (ラプラス変換表)

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$e^{bt} \cos at$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$

# まとめ

## 講義の振り返り

- ラプラス変換の定義
- 基本的な関数のラプラス変換
- ガンマ関数とラプラス変換

## 自宅での復習

- 基本的な関数のラプラス変換の導出を自分で計算して確認する.
- ガンマ関数の性質に関する証明を再現する.