

# ラプラス変換の性質

数理工学 第13回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年11月20日

# 目次

- ① ラプラス変換の基本性質
- ② 合成積のラプラス変換

# 目次

① ラプラス変換の基本性質

② 合成積のラプラス変換

# ラプラス変換の定義 (復習)

## 定義 (ラプラス変換; 前回の資料の再掲)

区間  $(0, \infty)$  上で定義された実数値関数  $f(t)$  に対し,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

と定義される関数  $F(s)$  を  $f(t)$  の**ラプラス変換**という.

- 上の定義において,  $f(t)$  を原関数,  $F(s)$  を像関数という.
- ラプラス変換を表す記号として  $F(s)$  を

$$L(f(t)) \quad \text{または} \quad L(f)$$

と書くことがある.

- 前回は基本的な関数に着目して, そのラプラス変換を具体的に計算した.
- 今回はラプラス変換そのものの性質を見る.

# ラプラス変換の基本性質: 線形則

2つの関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  に対し, それぞれのラプラス変換を次のように表す:

$$L(f(t)) = F(s), \quad L(g(t)) = G(s).$$

## 定理 (基本性質その1: 線形則)

関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  に対し, 任意の実数  $a, b \in \mathbb{R}$  で次が成り立つ:

$$L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s).$$



関数の線形結合のラプラス変換は, ラプラス変換の線形結合と等しい.

### 証明

積分の線形性から,

$$\begin{aligned} L(af(t) + bg(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt \\ &= a \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt \\ &= aF(s) + bG(s). \quad \square \end{aligned}$$

# ラプラス変換の基本性質: 相似則

## 定理 (基本性質その 2: 相似則)

関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする.  $a > 0$  を定数とすると,  $f(at)$  のラプラス変換は

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

証明 置換積分を用いる.

- $\tau = at$  と変数変換すると,  $d\tau = adt$  であり,

$$\begin{aligned} L(f(at)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) \cdot \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad \square \end{aligned}$$

## 例題

$a > 0$  を定数とする.  $L(\cos t) = \frac{s}{s^2 + 1}$  を用いて  $L(\cos at)$  を求めよ:

- 相似則を用いて

$$\begin{aligned} L(\cos at) &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(\frac{s}{a}\right)}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

# ラプラス変換の基本性質: 移動則

## 定理 (基本性質その 3: 移動則)

関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする.  $a > 0$  を定数とすると,  $e^{at}f(t)$  のラプラス変換は

$$L(e^{at}f(t)) = F(s - a).$$



原関数に指数関数を掛ける操作は、像関数を平行移動させる操作に対応。

証明

ラプラス変換の定義より

$$\begin{aligned} L(e^{at}f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}(e^{at}f(t)) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t) dt \\ &= F(s - a). \quad \square \end{aligned}$$

## 例題

$a, b > 0$  を定数とする.  $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$  を用いて  $L(e^{bt} \cos at)$  を求めよ.

- $F(s) = L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$  として移動則を用いると,

$$L(e^{bt} \cos at) = F(s - b) = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}.$$

# ラプラス変換の基本性質: 原関数の微分則

## 定理 (基本性質その 4: 原関数の微分則)

関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする。このとき、

$$L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0).$$



原関数の微分は、像関数では  $s$  倍する操作に（ほぼ）対応。

### 証明

部分積分を用いて

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt}f(t) dt \\ &= \left[ e^{-st}f(t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st}f(t) dt = -f(0) + sF(s). \quad \square \end{aligned}$$

# 原関数の微分則 (高階の場合)

## 定理 (原関数の微分則; 高階の場合)

関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする。このとき,  $n$  階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

証明 帰納的に示す。

- $n = 2$  として  $\frac{d^2}{dt^2}f(t)$  のラプラス変換を求める。 $g(t) = \frac{d}{dt}f(t)$ ,  $G(s) = L(g(t))$  に対し

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) &= sG(s) - g(0) \\ &= s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

- これを繰り返せば一般の  $n$  階の導関数のラプラス変換が求まる。□

# ラプラス変換の基本性質：像関数の微分則

## 定理 (基本性質その 5: 像関数の微分則)

関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする。このとき、

$$L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s).$$



像関数を微分する操作は、原関数に  $-t$  を掛ける操作に対応。

### 証明

ラプラス変換の定義に従って右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st} f(t)) dt \quad (\text{微分と積分の順序を入れ替えた}) \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (-tf(t)) dt = L(-tf(t)). \quad \square\end{aligned}$$

## 例題

$a > 0$  を定数とする.  $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$  を用いて  $L(t \sin at)$  を求めよ.

- 像関数の微分則を用いると

$$L(t \sin at) = -L(-t \sin at) = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{a}{s^2 + a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

# 目次

- ① ラプラス変換の基本性質
- ② 合成積のラプラス変換

# 関数の合成積

## 定義 (合成積)

$[0, \infty)$  上の 2 つの関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  に対し,  $[0, \infty)$  上の関数  $(f * g)(t)$  を

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

と定義する. このとき,  $(f * g)(t)$  を  $f(t)$  と  $g(t)$  の合成積または畳み込みという.

例  $b > 0$  を定数とした  $\sin bt * \sin bt$  の計算.

$$\sin bt * \sin bt = \int_0^t \sin b(t - \tau) \sin b\tau d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos b(t - 2\tau) - \cos bt) d\tau \quad \left( \sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B)) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2b} \sin b(t - 2\tau) - \tau \cos bt \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2b} (\sin bt - \sin(-bt)) - t \cos bt \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} \sin bt - t \cos bt \right).$$

# 合成積の性質

## 命題 (合成積の可換性)

合成積は可換である。すなわち、任意の  $t \in [0, \infty)$  で

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

が成り立つ。

### 証明

- 合成積の定義における積分で、 $u = t - \tau$  と変数変換すると  $du = -1d\tau$  であり、

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\&= \int_{\textcolor{red}{t}}^0 f(\textcolor{red}{u})g(t - \textcolor{red}{u}) \cdot (-1) du \\&= \int_0^t g(t - \textcolor{red}{u})f(\textcolor{red}{u}) du = (g * f)(t).\end{aligned}$$

# 合成積のラプラス変換

## 定理 (基本性質その 6: 合成積のラプラス変換)

関数  $f(t), g(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $F(s), G(s)$  とすると,

$$L(f * g) = F(s)G(s).$$

### 証明

- ラプラス変換の定義より

$$F(s)G(s) = F(s) \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) d\tau = \int_0^\infty \underbrace{e^{-s\tau}}_{\text{ブルー波浪線}} F(s) g(\tau) d\tau \quad (1)$$

- ここで,

$$\begin{aligned} \underbrace{e^{-s\tau} F(s)}_{\text{ブルー波浪線}} &= e^{-s\tau} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} f(u) du \\ &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-s(t-\tau)} f(t) dt \quad (t = u + \tau \text{ と変数変換}). \end{aligned}$$

- よって式(1)は次のように書ける:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \left( \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t - \tau) dt \right) g(\tau) d\tau. \quad (2)$$

- この積分はフビニの定理から積分の順序が交換可能。

積分の順序を入れ替えて積分領域を適切に取り直せば(以下の図参照),

$$\text{式 (2)} = \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right) dt = L(f * g). \quad \square$$

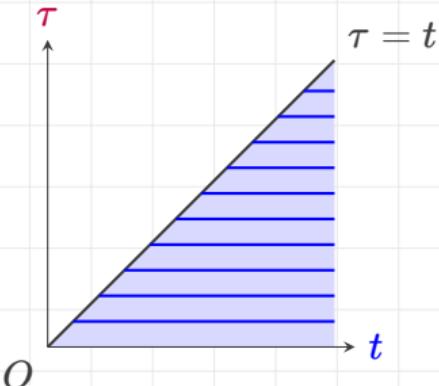


Figure:  $t \rightarrow \tau$  の順に積分

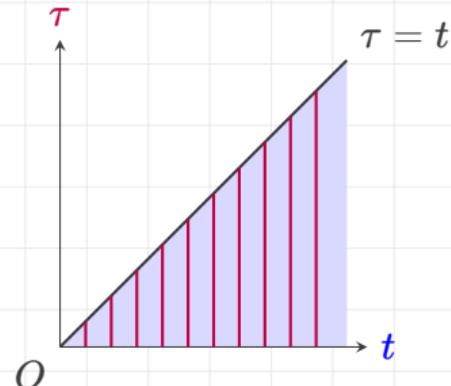


Figure:  $\tau \rightarrow t$  の順に積分

## 例題

$f(t) = t, g(t) = e^{-t}$  とした場合の  $L(f * g)$  を求めよ。なお

$$F(s) = L(t) = \frac{1}{s^2}, \quad G(s) = L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}.$$

- 合成積に関するラプラス変換から

$$L(f * g) = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

- 合成積の定義から同様の結果が得られることを確認する。合成積の定義から

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t (t - \tau) e^{-\tau} d\tau \\&= t \int_0^t e^{-\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau \\&= t[-e^{-\tau}]_0^t - \left( [-\tau e^{-\tau}]_0^t + \int_0^t e^{-\tau} d\tau \right) \\&= t(1 - e^{-t}) + te^{-t} + (e^{-t} - 1) = e^{-t} + t - 1.\end{aligned}$$

- 書き下した合成積のラプラス変換を求める

$$\begin{aligned} L((f * g)(t)) &= L(e^{-t} + t - 1) \\ &= L(e^{-t}) + L(t) - L(1) \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2 + (s+1) - s(s+1)}{s^2(s+1)} \\ &= \frac{1}{s^2(s+1)} \end{aligned}$$

であり、先ほどの結果と一致する。

# ラプラス変換の性質まとめ

**線形則**  $L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$

**相似則**  $L(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

**移動則**  $L(e^{at}f(t)) = F(s - a)$

**原関数の微分則**  $L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0)$

$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

**像関数の微分則**  $L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$

**合成積のラプラス変換**  $L(f * g) = F(s)G(s)$

# まとめ

## 講義の振り返り

- ラプラス変換の基本的性質 (線形則, 相似則, 移動則, 微分則)
- 合成積の定義とその性質
- 合成積のラプラス変換

## 自宅での復習

- 基本的性質の証明を確認する (特に微分則).
- 合成積の定義とその性質を理解する.