

# 実対称行列

数理工学 第6回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年10月23日

# 目次

① 實対称行列の固有値・固有ベクトル

② 實対称行列の対角化

③ 正方行列の三角化

# 目次

① 実対称行列の固有値・固有ベクトル

② 実対称行列の対角化

③ 正方行列の三角化

# 複素ベクトル・複素行列に関する表記

今回は複素数を成分にもつベクトル・行列が登場する:

- $\mathbb{C}$  複素数全体の集合
- $\mathbb{C}^n$  複素数を成分にもつ  $n$  次元ベクトル全体の集合
- $\mathbb{C}^{m \times n}$  複素数を成分にもつ  $m \times n$  行列全体の集合
- ベクトル  $v \in \mathbb{C}^n$ , 行列  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  の各成分を共役複素数に置き換えたベクトル, 行列をそれぞれ  $\bar{v}, \bar{A}$  と表す.

例

$$v = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 3 - 4i \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 3 + 4i \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 - i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 + i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

# 実対称行列の固有値は実数

- 一般の正方行列では、固有値が実数であるとは限らない。
- しかし行列を**実対称行列**に限定すると、固有値は必ず実数になる。

## 定理（実対称行列の固有値は実数）

$n$  次正方行列  $A$  が実対称行列のとき、 $A$  の固有値はすべて実数である。

~~ 固有ベクトルも実ベクトル

**証明** 固有値とその共役複素数が一致することを示す。

- $A$  の固有値を  $\lambda \in \mathbb{C}$  とし、対応する固有ベクトルを  $v \in \mathbb{C}^n$  とする。このとき

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

- $\lambda$  の共役複素数を  $\bar{\lambda}$  として

$$w := (\bar{\lambda}I - A)v \quad (1)$$

とおく。

- $w$  の各成分を共役複素数に置き換えたベクトルを  $\bar{w}$  とすると,  
 $A$  が実対称行列であること ( $\bar{A} = A$ ,  $A^T = A$ ) より,

$$\bar{w}^T = \overline{((\bar{\lambda}I - A)v)}^T = \bar{v}^T(\lambda I - A)^T = \bar{v}^T(\lambda I - A).$$

- よって

$$\bar{w}^T w = \bar{v}^T(\lambda I - A)(\bar{\lambda}I - A)v \stackrel{(*)}{=} \bar{v}^T(\bar{\lambda}I - A)(\lambda I - A)v = 0$$

であり,  $w = 0$  である.

- したがって式 (1) より  $(\bar{\lambda}I - A)v = 0$  であり,  $v$  は固有値  $\bar{\lambda}$  に対応する固有ベクトル.
- よって  $\lambda = \bar{\lambda}$  であり, 固有値  $\lambda$  は実数.

□

(\*) の式変形は

$$(\lambda I - A)(\bar{\lambda}I - A) = \lambda\bar{\lambda}I - \lambda A - \bar{\lambda}A + A^2 = (\bar{\lambda}I - A)(\lambda I - A)$$

であることに基づく. 一般の行列積は必ずしも可換ではないので注意せよ.

# 実対称行列の性質

## 定理 (実対称行列の固有ベクトルの直交性)

$n$  次実対称行列  $A$  の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

### 証明

- $A$  の異なる固有値を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ), それぞれに対応する固有ベクトルを  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  とする.
- $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = C$  とする. このとき,

$$(A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = (\alpha \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \alpha C,$$

$$(A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T (A^T \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (\beta \mathbf{y}) = \beta C.$$

- よって  $\alpha C = \beta C$  であり,  $\alpha \neq \beta$  から  $C = 0$ .
- したがって  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$  であり,  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  は直交する.

□

# 目次

① 實対称行列の固有値・固有ベクトル

② 實対称行列の対角化

③ 正方行列の三角化

# 実対称行列の対角化可能性

## 定理 (実対称行列の対角化)

任意の  $n$  次実対称行列  $A$  に対し, ある直交行列  $P$  が存在して  $P^T AP$  が対角行列になる.

証明  $n$  に関する帰納法で示す.

- 任意の  $n - 1$  次実対称行列が直交行列で対角化可能と仮定し,  
任意の  $n$  次実対称行列が直交行列で対角化可能であることを示す.
- $A$  の固有値の一つを  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , 対応するノルムが 1 の固有ベクトルを  $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^n$  とする.
- $\mathbf{p}_1$  を含む  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  を構成し, 直交行列  $P_0$  を次のように定義:

$$P_0 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n).$$

- $P_0^T A P_0$  を計算すると, (次のスライドへ)

$$P_0^T A P_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} (A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T A \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^T A \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1^T A \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2^T A \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2^T A \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_2^T A \mathbf{p}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_n^T A \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_n^T A \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n^T A \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

- ここで、1列目に注目すると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T A \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2^T A \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T A \mathbf{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 \\ \lambda_1 \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{p}_n^T \mathbf{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \text{は正規直交直交基底}).$$

- また  $P_0^T A P_0$  が対称行列であることから式 (2) は次のように書き直せる:

$$P_0^T A P_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } A_1 \text{は} (n-1) \text{次実対称行列}). \quad (3)$$

- 帰納法の仮定から  $A_1$  は直交行列  $P_1$  を用いて  $P_1^T A_1 P_1 = D$  と対角化可能.

( $D$  : 対角行列)

- よって式 (3) に次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

をそれぞれ左, 右から掛けると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_0^T A P_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{=:P\text{とおく}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T A_1 P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

であり,  $A$  は行列  $P$  を用いて対角化可能であることが示される.

- 最後に  $P$  が直交行列であることを示す.  $P^T P$  を計算すると

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_0^T P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = I$$

であり  $P$  は直交行列.

- よって帰納法の仮定のもと,  $A$  は直交行列で対角化可能であることが示される. □



# 直交行列の構成法

実対称行列の場合、対角化で用いる直交行列は固有ベクトルで構成できる。

## 系 (対角化で用いる直交行列の構成法)

$n$  次実対称行列  $A$  を対角化する直交行列  $P$  に対して、 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  と表すと、 $p_1, p_2, \dots, p_n$  はそれぞれ  $A$  の固有ベクトルである。

# 目次

① 實対称行列の固有値・固有ベクトル

② 實対称行列の対角化

③ 正方行列の三角化

# 三角行列

対角成分より下の成分がすべてゼロの行列を**上三角行列 (upper triangular matrix)**という。

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

## 三角行列の性質

三角行列は対角行列と同様のよい性質をもつ:

- 三角行列  $U$  の固有値は対角成分  $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$  と等しい。
- 三角行列の積は三角行列であり,  $U^k$  の対角成分は  $u_{11}^k, u_{22}^k, \dots, u_{nn}^k$  である。

~~ 対角化可能性の議論を三角化に拡張する

# ユニタリ行列: 直交行列の複素数版

複素行列で考えると、実対称行列の対角化可能性は「三角化可能性」として一般化できる

## 定義 (ユニタリ行列)

複素正方行列  $U$  が  $\overline{U}^T U = I$  を満たすとき、 $U$  を**ユニタリ行列 (unitary matrix)** という。

↔ 任意の直交行列  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  はユニタリ行列

**ユニタリ行列の性質** ユニタリ行列は直交行列と同様の性質を持つ:

$U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  をユニタリ行列とすると、次が成立:

- $U$  の列ベクトルは  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底をなす
- $U$  は正則で、 $U^{-1} = \overline{U}^T$
- $UV$  もユニタリ行列

補足:  $\overline{U}^T$  を  $U$  の隨伴行列という

# 行列の三角化可能性

## 定理 (正方行列の三角化可能性)

任意の正方行列  $A$  に対して, あるユニタリ行列  $U$  が存在して  $\bar{U}^T A U$  が上三角行列になる.

**証明** 対角化の場合と同様に,  $n$  に関する帰納法で示す.

- 任意の  $n - 1$  次正方行列がユニタリ行列で三角化可能と仮定し,  
任意の  $n$  次正方行列がユニタリ行列で三角化可能であることを示す.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  に対して, その固有値の一つを  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ,  
対応するノルムが 1 の固有ベクトルを  $u_1 \in \mathbb{C}^n$  とする.
- $u_1$  を含む  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底  $u_1, u_2, \dots, u_n$  を構成し,  
ユニタリ行列  $U_0$  を次のように定義する:

$$U_0 = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

- このとき、

$$\overline{U}_0^T A U_0 = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{u}}_1^T A \mathbf{u}_1 & \overline{\mathbf{u}}_1^T A \mathbf{u}_2 & \cdots & \overline{\mathbf{u}}_1^T A \mathbf{u}_n \\ \overline{\mathbf{u}}_2^T A \mathbf{u}_1 & \overline{\mathbf{u}}_2^T A \mathbf{u}_2 & \cdots & \overline{\mathbf{u}}_2^T A \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathbf{u}}_n^T A \mathbf{u}_1 & \overline{\mathbf{u}}_n^T A \mathbf{u}_2 & \cdots & \overline{\mathbf{u}}_n^T A \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

- 式 (4) の 1 列目に注目すると、

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{u}}_1^T A \mathbf{u}_1 \\ \overline{\mathbf{u}}_2^T A \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{u}}_n^T A \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \overline{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{u}_1 \\ \lambda_1 \overline{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \overline{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because \overline{U}_0^T U_0 = I).$$

- よって,  $A_{n-1}$  を  $(n-1)$  次正方行列として, 式 (4) は次のように書ける:

$$\overline{U}_0^T A U_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & A_1 \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (5)$$

- 帰納法の仮定から,  $A_1$  はユニタリ行列  $U_1$  を用いて  $\overline{U}_1^T A_1 U_1$  と三角化可能.
- 式 (5) の両辺に次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{U}_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

をそれぞれ左, 右から掛けると, (次のスライドへ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \overline{U_1}^T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \overline{U_0}^T A U_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{=:U \text{とおく}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{U_1}^T A_1 U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

となり、これは上三角行列である。よって  $A$  は行列  $U$  で三角化可能である。

- $\overline{U}^T U = I$  より  $U$  はユニタリ行列なので、

最終的に  $A$  はユニタリ行列で三角化可能であることが示される。 □

# 教科書に関する補足

⚠ 教科書における三角化に関する命題 (定理 20.5, p.106) について

- 「任意の実正方行列  $A$  は直交行列で... 三角行列に変換できる」と述べられているが、この主張は偽。任意の直交行列で三角化できない実正方行列が存在する。

直交行列で三角化できない実正方行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 任意の正方行列の三角化可能性を示すためには、**ユニタリ行列**を用いることが必要

## 対角化・三角化のまとめ

$n$  次正方行列を  $A$  とする.

- $A$  はユニタリ行列で三角化可能
- $A$  が実対称行列  $\implies A$  は直交行列で対角化可能
- $A$  の固有値がすべて異なる  
 $\implies A$  が  $n$  個の線形独立な固有ベクトルをもつ  $\iff A$  は対角化可能

# 三角化の応用: フロベニウスの定理

- 実数  $a_0, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$  を係数とする実数係数多項式

$$f(\mathbf{x}) = a_r \mathbf{x}^r + a_{r-1} \mathbf{x}^{r-1} + \cdots + a_1 \mathbf{x} + a_0$$

に対して、変数をスカラー  $\mathbf{x}$  から正方行列  $\mathbf{X}$  に置き換えた関数を次のように定義する：

$$f(\mathbf{X}) = a_r \mathbf{X}^r + a_{r-1} \mathbf{X}^{r-1} + \cdots + a_1 \mathbf{X} + a_0 \mathbf{I}.$$

## 定理 (フロベニウスの定理)

$n$  次正方行列  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とする。このとき  $f(A)$  の固有値は  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$  である。

- $f(A)$  を具体的に構成せずに、 $f(A)$  の固有値が求まる。

証明

$A$  はユニタリ行列  $P$  を用いて次のように三角化できる:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} (= T \text{ とおく}).$$

- このとき、任意の自然数  $k$  と実数  $c$  に対して

$$\begin{aligned} P^{-1}(cA^k)P &= cP^{-1}A^kP = cP^{-1}\overbrace{AAA\cdots AA}^{k\text{個}}P \\ &= cP^{-1}A(\textcolor{blue}{PP^{-1}})A(\textcolor{blue}{PP^{-1}})A(\textcolor{blue}{PP^{-1}})\cdots(\textcolor{blue}{PP^{-1}})A(\textcolor{blue}{PP^{-1}})AP \\ &= c(P^{-1}AP)^k = cT^k = \begin{pmatrix} c\lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & c\lambda_2^k & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c\lambda_n^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- したがって  $cA^k$  は  $P$  を用いて三角行列  $cT^k$  に三角化できる。
- よって

$$\begin{aligned}
 P^{-1}f(\mathbf{A})P &= P^{-1}(a_r A^r + a_{r-1} A^{r-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I)P \\
 &= P^{-1}(a_r A^r)P + P^{-1}(a_{r-1} A^{r-1})P + \cdots + P^{-1}(a_1 A)P + P^{-1}(a_0 I)P \\
 &= a_r T^r + a_{r-1} T^{r-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I \\
 &= f(T) \\
 &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

- よって  $P^{-1}f(\mathbf{A})P$  の固有値は  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$  であり、  
これらは  $f(\mathbf{A})$  の固有値である。

□

# ケイリー・ハミルトンの定理

多項式  $f(x)$  を固有多項式とすると、次の命題が成立する。

## 定理 (ケイリー・ハミルトンの定理)

正方形行列  $A$  の固有多項式を  $f_A(x)$  と表す。任意の  $n$  次正方形行列  $A$  に対して、次が成立:

$$f_A(A) = O.$$

例 2 次正方形行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  の固有多項式は

$$f_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

よって、ケイリー・ハミルトンの定理から

$$f_A(A) = A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I = O$$

が成り立つ。

# まとめ

## 講義の振り返り

- 実対称行列の固有値・固有ベクトル
- 実対称行列の対角化, (複素) 正方行列の三角化
- フロベニウスの定理とケイリー・ハミルトンの定理

## 自宅での復習

- 実対称行列の固有値が実数である証明の流れを確認する.
- 実対称行列の対角化可能性に関する証明の流れを確認する.
- フロベニウスの定理とケイリー・ハミルトンの定理の主張を復習する.