高階の微分方程式

数理工学 第 11 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 13 日

授業で扱う微分方程式のトピック

1 階微分方程式

- 変数分離形
- 同次形
- 1 階線形微分方程式 (斉次，非斉次)
- Bernoulli 型の微分方程式

高階微分方程式 $\rightsquigarrow$ 今回

- **(特殊な) 2 階微分方程式**
- **高階線形微分方程式**

ラプラス変換を用いた解法

目次

目次

2 階微分方程式

2 階微分方程式の一般形

x を独立変数とする未知関数 $y \equiv y(x)$ が満たす 2 階微分方程式は，ある関数 F を用いて

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

と書ける．

ここでは 2 階微分方程式のうち，微分方程式の階数が下げられる

- 未知関数が現れない場合
- 独立変数が現れない場合

それぞれの解法を見る．

1 階の微分方程式に帰着できる場合 (未知関数が現れない場合)

一般形: $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

ケースその 1: 未知関数 y が F の引数に現れない場合

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{1}$$

- $\boxed{z = \dfrac{dy}{dx}}$ とおくと, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.
- これを方程式 (1) に代入すると
$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$
となり, これは x を独立変数, z を未知関数とした 1 階の微分方程式.
- よって一般解 $z(x)$ を求めたあと, $z(x) = \dfrac{dy}{dx}$ を解けば一般解 $y(x)$ が求まる.

1 階の微分方程式に帰着できる場合 (独立変数が現れない場合)

$$\boxed{\text{一般形: } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0}$$

ケースその 2: 独立変数 x が F の引数に現れない場合

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{2}$$

- $\boxed{z = \frac{dy}{dx}}$ とおくと, 合成関数の微分より $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = z\frac{dz}{dy}$.
- これを方程式 (2) に代入すると

$$F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

となり, これは y を独立変数, z を未知関数とする 1 階の微分方程式.

- よって，一般解 $z(y)$ を求めたあと，$z(y) = \frac{dy}{dx}$ を解けば一般解 $y(x)$ が求まる.

例題 (未知関数が現れない場合)

次の 2 階微分方程式を解け:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

- $z = \dfrac{dy}{dx}$ とおくと, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dz}{dx}$.
- よってこれらを方程式 (3) に代入すると

$$x\frac{dz}{dx} + z = 0 \tag{4}$$

  となり, これは z を未知関数とする 1 階の微分方程式である.
- 式 (4) は変数分離形であり，式を整理すると

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

- よって両辺の不定積分を求めると, 方程式 (4) の一般解は

$$\log|z| = -\log|x| + C_1 \quad (C : \text{任意定数})$$

すなわち $z = \dfrac{C_1}{x}$ $(C_1 : \text{任意定数})$ となる.

- したがって, 元の方程式 (3) の一般解を求めるには,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x}$$

を解けばよく，両辺を積分すれば

$$y = C_1 \log|x| + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

と一般解が求まる.

微分方程式の階数と任意定数の個数の関係

- 2 階の微分方程式の一般解には 2 個の任意定数が現れる.
- 一般に n 階の微分方程式の一般解には n 個の任意定数が現れる.

例題 (独立変数が現れない場合)

次の 2 階微分方程式を解け:

$$y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

- $z = \dfrac{dy}{dx}$ とおくと, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dz}{dx} = z\dfrac{dz}{dy}$ であり, これらを方程式 (5) に代入すると

$$yz\left(\frac{dz}{dy}\right) + z^2 + 1 = 0.$$

- 式を整理して

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{z^2+1}{z} \cdot \frac{1}{y} \tag{6}$$

- これは y を独立変数とした変数分離形の微分方程式であり, その一般解は

$$\int \frac{z}{z^2+1} dz = -\int \frac{1}{y} dy + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

を満たす.

- 両辺の不定積分を計算して

$$\frac{1}{2}\log|z^2+1| = -\log|y| + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

- よって，z に関する一般解は

$$z^2+1 = \frac{C_1^2}{y^2} \quad (C_1 : \text{任意定数}) \tag{7}$$

を満たす．

- $z = \dfrac{dy}{dx}$ であることを思い出すと, 式 (7) から y に関する 1 階の微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{C_1^2}{y^2} \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{C_1^2}{y^2} - 1} = \pm\frac{\sqrt{C_1^2 - y^2}}{y}.$$

を得る.

- これは変数分離形であり，その一般解は

$$\pm\int\frac{y}{\sqrt{C_1^2-y^2}}dy=\int 1dx+C_2\quad(C_2:\text{任意定数})$$

を満たす．

- 両辺の不定積分を計算して，最終的に求める一般解は

$$\pm\sqrt{C_1^2-y^2}=x+C_2\quad(C_1,C_2:\text{任意定数})$$

すなわち

$$y^2+(x+C_2)^2=C_1^2\quad(C_1,C_2:\text{任意定数})$$

と求まる (陰関数表示)．

目次

n 階線形微分方程式

高階線形微分方程式の一般形

未知関数 $y \equiv y(x)$ に関する n 階の導関数に関する微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_0(x)y = Q(x)$$

と書ける微分方程式を n 階線形微分方程式という.

- 未知関数とその導関数に関して線形な微分方程式
- $Q(x) \equiv 0$ の場合は**斉次**, そうでない場合は**非斉次**と呼ぶ.

ここで考えること

- 係数関数 $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ がすべて定数の場合の斉次線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

の解き方.

2 階斉次線形微分方程式の解法

(定数係数) 2 階斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{8}$$

方針

- (天下り的だが) この微分方程式の解が $\boxed{y(x) = e^{\lambda x}}$ (λ: 定数) と表されるものとする.
- このとき $\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ であり, これを式 (8) に代入すると
$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$
- よって λ が次の 2 次方程式
$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{9}$$
の根ならば, $e^{\lambda x}$ は方程式 (8) の特殊解 (式 (9) を特性方程式とよぶ).

特性方程式を用いた解の導出

特性方程式 (9) の (複素数を含む) 根を λ_1, λ_2 とする.

$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ のとき}}$

- このとき,

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

  は共に方程式 (8) の特殊解である.

- $y_1(x), y_2(x)$ の線形結合で表される関数

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数}) \end{aligned}$$

  も方程式 (8) の解であり, これが一般解である.

微分方程式 (8) の一般解は, 2 つの 1 次独立な特殊解の線形結合で表される.

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 \text{ のとき}}$

- このとき $e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x}$ であり，特殊解は一つしか見つからない．
- 実はこの場合，$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ に加えて，

$$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$$

が方程式 (8) の特殊解になっている (以降の例で確認する)．

- よって $y_1(x), y_2(x)$ の線形結合

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

が方程式 (8) の一般解である．

重複度 2 の根 λ_1 に対して $e^{\lambda_1 x}$ と $xe^{\lambda_1 x}$ は共に微分方程式 (8) の (1 次独立な) 特殊解．

例題

次の 2 階斉次線形微分方程式を解け:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0. \tag{10}$$

- 微分方程式 (10) の特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ であり，その根は $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
- よって $\boxed{y_1 = e^{2x}}$ と $\boxed{y_2 = xe^{2x}}$ はともに斉次方程式 (10) の解である．
- 実際，$y_2 = xe^{2x}$ を式 (10) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left(xe^{2x}\right)'' - 4\left(xe^{2x}\right)' + 4\left(xe^{2x}\right) \\ &= \left(2e^{2x} + 2\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)\right) - 4\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) + 4\left(xe^{2x}\right) \\ &= 4\left(e^{2x} + xe^{2x}\right) - 4\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) + 4\left(xe^{2x}\right) = 0.\end{aligned}$$

- したがって方程式 (10) の一般解は e^{2x} と xe^{2x} の線形結合として次のように書ける:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数}).$$

例題

正の実数 $\omega > 0$ を定数とした次の 2 階斉次線形微分方程式を解け

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0. \tag{11}$$

- 微分方程式 (11) の特性方程式は

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

であり, その根は $\lambda_1 = +\omega i$, $\lambda_2 = -\omega i$.

- よって $\boxed{y_1 = e^{\omega i x}}$ と $\boxed{y_2 = e^{-\omega i x}}$ はともに斉次方程式 (11) の解であり, その線形結合

$$y(x) = C_1 e^{\omega i x} + C_2 e^{-\omega i x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

が方程式 (11) の一般解である.

$\rightsquigarrow$ 虚数を含む式をもう少し整理する.

- オイラーの公式 $\boxed{e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)}$ を用いると，一般解 y は

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\omega i x} + C_2 e^{-\omega i x} \\ &= C_1(\cos\omega x + i\sin\omega x) + C_2(\cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x)) \\ &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{=C_1}\cos\omega x + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{=C_2}\sin\omega x \\ &= C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数}) \end{aligned}$$

と書き直せる.

補足

- $m > 0$, $k > 0$ を定数として $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと，方程式 (11) は次のように書ける:

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = -ky.$$

- これは質量 m の物体がばね定数 k のばねに繋がれている単振動の運動方程式.

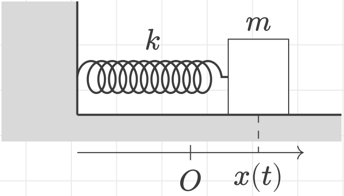
興味ある人向けの例題

速度に比例する抵抗力を受ける運動方程式

- 質量 m の物体がばねに繋がれているとする．
- 時刻 t における物体の変位を $x(t)$ とし，物体には次の力が水平方向に働く：

  ばねの復元力: $-m\omega^2 x \ (\omega > 0)$,

  物体の速度に比例する抵抗力: $-2m\phi\dfrac{dx}{dt} \ (\phi > 0)$
- この物体の運動方程式を $x(t)$ に関する微分方程式として表し，一般解を求めよ．



ヒント (1) $\phi = \omega$, (2) $\phi > \omega$，(3) $\phi < \omega$ の 3 つに場合分けして一般解を求める．

運動方程式の解の様子

初期条件を $x(0) = 1, \dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ としたときの特殊解の様子:

$\phi > \omega$: 過減衰

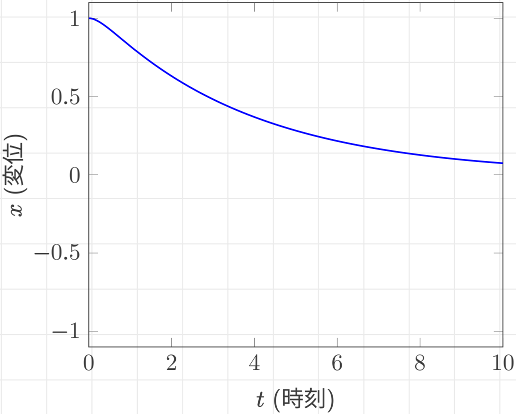


Figure: $\omega = 1, \phi = 2$ の場合

$\phi < \omega$: 減衰振動

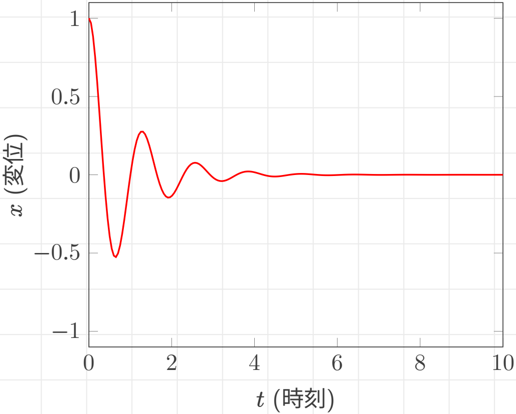


Figure: $\phi = 1, \omega = 5$ の場合

n 階斉次線形微分方程式の解法

(定数係数) n 階斉次線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{12}$$

- この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

特性方程式が n 個の相異なる根 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を持つとき (重根を持たない場合)

- このとき $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ はすべて斉次方程式 (12) の解.
- これら n 個の解の線形結合

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n : \text{任意定数})$$

が斉次方程式 (12) の一般解である.

特性方程式が重根をもつ場合

- 相異なる ℓ 個の根 λ_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ (ただし $\ell \leq n$) それぞれに対し，その重複度 m_i に対応する個数の特殊解

$$e^{\lambda_i x}, \quad x e^{\lambda_i x}, \quad x^2 e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x}$$

  が存在する.

- すべての根に対する上記の解を集めると，合計で n 個の特殊解 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が得られ，その線形結合

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n : \text{任意定数})$$

  が斉次方程式 (12) の一般解である.

特性方程式を用いた一般解

- 相異なる ℓ 個の根を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ (ただし $\ell \leq n$).
  それぞれの重複度を $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ とする $(m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell = n)$.
- このとき,

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x} & (m_1\text{個}) \\ e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x} & (m_2\text{個}) \\ \qquad\qquad \cdots & \\ e^{\lambda_\ell x}, xe^{\lambda_\ell x}, \ldots, x^{m_\ell - 1} e^{\lambda_\ell x} & (m_\ell\text{個}) \end{cases} \quad (m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell = n)$$

はすべて斉次方程式 (12) の解であり, これら n 個の解の線形結合が一般解である.

例題

次の 3 階斉次線形微分方程式を特性方程式を用いて解け:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{13}$$

- 微分方程式 (13) の特性方程式は

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0.$$

- よって特性方程式の根は $\lambda_1 = -1$ (重複度 1), $\lambda_2 = 1$ (重複度 2).
- したがって e^{-x}, e^{x}, xe^{x} は方程式 (13) の解である.
- 以上より，方程式 (13) の一般解は e^{-x}, e^{x}, xe^{x} の線形結合

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x} \quad (C_1, C_2, C_3 : \text{任意定数})$$

と表される.

まとめ

講義の振り返り

- 階数が下げられる 2 階微分方程式の解法
  (未知関数が現れない場合，独立変数が現れない場合)
- 定数係数の n 階斉次線形微分方程式に対する特性方程式を用いた解法

自宅での復習

- 2 階微分方程式で，階数を下げる変数変換の流れと計算を復習する．
- 特性方程式に基づく解き方の流れを復習する (特に特性方程式が重根をもつ場合)