

# 内積と直交性

数理工学 第1回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年10月02日

# 目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

# 目次

① 線形空間と内積

② 内積空間におけるノルム

③ 内積空間におけるなす角

# 線形空間: 和とスカラー倍が自然に導入できる集合

## 定義 (線形空間の公理)

和とスカラー倍が定義されていて、次を満たす集合  $V$  を**線形空間 (linear space)** という：

- 和の法則**
- (1) (交換則) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して,  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ .
  - (2) (結合則) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  に対して,  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ .
  - (3) (零元の存在) ある元  $\mathbf{0} \in V$  が存在し、任意の  $\mathbf{v} \in V$  に対して  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ .
  - (4) (逆元の存在) 任意の  $\mathbf{v} \in V$  に対して、 $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$  となる元  $\mathbf{v}' \in V$  が存在。

## スカラー倍の法則

- (1) (分配則)  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して,  $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ .
- (2) (スカラー分配則)  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} \in V$  に対して,  $(c_1 + c_2)\mathbf{v} = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v}$ .
- (3) (スカラー結合則)  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} \in V$  に対して,  $(c_1 c_2)\mathbf{v} = c_1(c_2\mathbf{v})$ .
- (4) (スカラー単位元の存在) 任意の  $\mathbf{v} \in V$  に対して,  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

線形空間  $V$  の元を**ベクトル (vector)** という。

# 線形空間の例 ( $n$ 次元実ベクトル空間)

- $n$  個の実数を縦に並べた配列 (列ベクトル) 全体の集合を  $\mathbb{R}^n$  と表す.

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  として,  $\mathbb{R}^n$  上の和  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  とスカラー一倍  $c\mathbf{x}$  を

和:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad$  スカラー一倍:  $c\mathbf{x} := \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} (c \in \mathbb{R})$

と定義する.

- このとき  $\mathbb{R}^n$  は線形空間である.  $\mathbb{R}^n$  を  $n$  次元実ベクトル空間という.

## 線形空間の例 ( $m \times n$ 実行列空間)

- $m$  行  $n$  列の実数行列全体の集合を  $\mathbb{R}^{m \times n}$  と表す.
- $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  として,  $\mathbb{R}^{m \times n}$  上の和  $A + B$  とスカラー一倍  $cA$  を

和: 
$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$$

スカラー一倍: 
$$cA := (ca_{ij}) \quad (c \in \mathbb{R})$$

と定義する.

- このとき  $\mathbb{R}^{m \times n}$  は線形空間である.  $\mathbb{R}^{m \times n}$  を  $m \times n$  実行列空間という.

# 線形空間の例 (実数列全体の集合)

- 実数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  全体の集合を  $S$  と表す.
- $S$  上の和とスカラー倍を

和:  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty},$

スカラー倍:  $c\{x_n\}_{n=1}^{\infty} := \{cx_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (c \in \mathbb{R})$

と定義する.

- このとき  $S$  は線形空間である.

各自確認  $S$  の零元と逆元はなにか?

# 線形空間の例 (実数係数多項式全体の集合)

- 次数が  $n$  次以下の実数係数多項式全体の集合を

$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

と表す.

- $p, q \in P_n$  として,  $P_n$  上の和とスカラー倍を

和:  $(p + q)(x) := p(x) + q(x)$

スカラー倍:  $(cp)(x) := c \cdot p(x) \quad (c \in \mathbb{R}).$

と定義する.

- このとき  $P_n$  は線形空間である.

各自確認  $P_n$  の零元と逆元はなにか?

# 内積の定義

以降、特に断りがない限り  $V$  を線形空間とする。

## 定義 (内積の公理)

任意のベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して実数  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$  を対応させる写像が次の性質を満たすとき、 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$  を  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の内積 (inner product) という：

- (1) (正定値性) 任意の  $\mathbf{x} \in V$  で  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \geq 0$ , かつ  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (2) (対称性) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$ .
- (3) (線形性) 任意の実数  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  に対して

$$((\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).$$

内積が定義された線形空間を内積空間 (inner product space) という。

内積空間のことを計量線形空間 (metric space) という場合もある。

## 内積の例 ( $\mathbb{R}^n$ 上の内積)

- $\mathbb{R}^n$  上の 2 つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{1}$$

と定義する。

- これは  $\mathbb{R}^n$  上の内積である (標準内積という)。

# 標準内積が内積であることの確認

**対称性**  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$  より，対称性を満たす.

## 正定値性

- 任意のベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  に対して， $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ .
- また

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$
$$\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

であるから， $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0$  となるのは  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  に限る.

## 線形性

• ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  と実数  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  に対して,

$$\begin{aligned} ((\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ &= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

よって式 (1) で定義される写像は正定値性・対称性・線形性を満たし,  $\mathbb{R}^n$  上の内積である.

# 内積に関する注意

## 1 つの線形空間に対して内積は複数定義できる

- 内積はいくつかの性質を満たす写像として定義されていた.
- よって  $V$  上では**標準内積以外の内積**も考えることができる.

### 標準内積以外の内積の例

- 2 つのベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  に対して,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n e^{-i} x_i y_i$$

と定義する.

- これは  $\mathbb{R}^n$  上の内積である (各自確認せよ).

# $\mathbb{R}^{m \times n}$ 上の内積

- $\mathbb{R}^{m \times n}$  上の 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

に対して、

$$(A \cdot B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

と定義する。

- これは  $\mathbb{R}^{m \times n}$  上の内積である。

## $P_n$ 上の内積

- $n$  次実数係数多項式全体の集合  $P_n$  に属する 2 つの多項式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

に対して、

$$(p \cdot q) := \sum_{i=0}^n p(i)q(i) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \cdots + p(n)q(n)$$

と定義する。これは  $P_n$  上の内積である。

- また  $\alpha \leq \beta$  を満たす定数  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  を用いて

$$(p \cdot q) := \int_{\alpha}^{\beta} p(x)q(x)dx$$

と定義すると、これも  $P_n$  上の内積である。

# 目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

# 内積空間における「長さ」

## 定義 (ノルム)

ベクトル  $x \in V$  に対して、内積  $(x \cdot x) (\geq 0)$  の平方根を  $x$  のノルム (norm) といい、

$$\|x\| := \sqrt{(x \cdot x)}$$

と表す。

## ポイント

- $\mathbb{R}^n$  上の標準内積に対するノルムは次のように表される:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- 内積の平方根で定義されるノルムを **フロベニウスノルム** または **2-ノルム** という。
- ノルムはベクトルの「長さ」に対応する量で、内積を用いて定義される。



用いる内積が変われば「長さ」も変わる。

# ノルムの性質

ノルムは、「矢印の長さ」の性質を満たす。

## 定理（ノルムの性質）

内積空間  $V$  上の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  と実数  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して、以下の性質が成り立つ：

- (1)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  であり、かつ  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (2)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ .
- (3)  $|\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$  (コーシー・シュワルツの不等式).
- (4)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (三角不等式).
- (5)  $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle = 0$  ならば

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

が成り立つ（ピタゴラスの定理）。

## $|(x \cdot y)| \leq \|x\| \|y\|$ の証明

- $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して  $f(\lambda) := \|\lambda x + y\|^2$  とおく.
- $f(\lambda)$  を展開すると,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= ((\lambda x + y) \cdot (\lambda x + y)) \\ &= \lambda^2(x \cdot x) + \lambda(x \cdot y) + \lambda(y \cdot x) + (y \cdot y) && (\because \text{線形性}) \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x \cdot y) + \|y\|^2 && (\because \text{対称性}) \end{aligned}$$

であり, これは  $\lambda$  に関する 2 次式である.

- 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  で  $f(\lambda) \geq 0$  なので,  $f(\lambda) = 0$  の判別式 ( $D$  とおく) は 0 以下.
- よって

$$D/4 = (x \cdot y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

であり,  $|(x \cdot y)| \leq \|x\| \|y\|$  を得る.

## $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ の証明

- 先に示したコーシー・シュワルツの不等式から,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= ((x + y) \cdot (x + y)) \\&= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad (\because \text{コーシー・シュワルツの不等式}) \\&= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

- よって  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  を得る.

□

# ノルムに基づく距離

内積空間では、ノルムに基づく距離が導入できる。

## 定理（ノルムに基づく距離）

内積空間  $V$  上の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

と関数  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  を定義する。このとき  $d$  は次の性質を満たす：

- (1) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  かつ  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .
- (2) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
- (3) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  に対して  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (三角不等式).

**ポイント** (1)–(3) は距離の公理そのもの。

- ノルムを用いて定義された関数  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  は距離の公理を満たす。
- すなわち内積空間は距離空間である。

証明 (1), (2) は明らか. (3) を示す.

- 任意の  $x, y, z \in V$  に対して,

$$a = x - y, \quad b = y - z$$

とおく.

- このとき,

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \|a\| + \|b\| \\ &\geq \|a + b\| \quad (\because \text{ノルムの三角不等式}) \\ &= \|x - z\| = d(x, z) \end{aligned}$$

であり, 所望の不等式が示される.



# 各種空間の関係性

線形空間

位相空間

距離空間

内積空間

- ・ユークリッド空間
- ・実行列空間
- ・関数空間

# 目次

- ① 線形空間と内積
- ② 内積空間におけるノルム
- ③ 内積空間におけるなす角

# 内積空間における「角度」

ゼロベクトルでないベクトル  $x, y \in V$  に対し、コーシー・シュワルツの不等式から、

$$-1 \leq \frac{(x \cdot y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

これによりベクトル間の「角度」が定義できる。

## 定義（ベクトルのなす角）

ゼロベクトルでない  $x, y \in V$  に対して、

$$\cos \theta = \frac{(x \cdot y)}{\|x\|\|y\|}$$

を満たす  $\theta \in [0, \pi]$  がただ一つに定まる。この  $\theta$  を  $x, y$  の**なす角 (angle)** という。

**ポイント** 2つのベクトルのなす角は内積で定義する。



用いる内積が変われば「なす角」も変わる。

# 直交

内積が 0 であるベクトル間の関係に特別な名前をつける.

## 定義 (直交)

内積空間  $V$  上のベクトル  $x, y \in V$  に対して,

$$(x \cdot y) = 0$$

が成り立つとき,  $x$  と  $y$  は直交である (orthogonal) という.

- 定義から明らかに, なす角が  $\pi/2$  のベクトルは直交である.

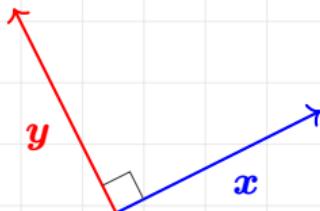


Figure: なす角が  $\pi/2$  のベクトル  $x, y$

# ゼロベクトルと直交性

## 命題 (ゼロベクトルは任意のベクトルと直交)

内積空間  $V$  上のゼロベクトルを  $\mathbf{0}$  と表す。任意のベクトル  $\mathbf{x} \in V$  に対して、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{0}) = 0$$

が成り立つ。すなわち、ゼロベクトルは  $V$  上の任意のベクトルと直交する。

### 証明

- 線形空間の定義から、任意の  $\mathbf{x} \in V$  に対して  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  なる  $-\mathbf{x} \in V$  が存在する。
- したがって、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{0}) = (\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})))$$

$$= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \quad (\because \text{線形性})$$

$$= 0.$$



# まとめ

## 講義の振り返り

- 線形空間と内積の定義
- 内積によって定義されるノルムとなす角
- ベクトルの直交性

## 自宅での復習

- 内積の諸例が内積の定義を満たすことを確認する.
- ノルムの諸性質の証明を確認する.
- なす角と直交の定義を確認する.