内積と直交性

数理工学 第 1 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 10 月 02 日

目次

目次

線形空間: 和とスカラー倍が自然に導入できる集合

定義 (線形空間の公理)

和とスカラー倍が定義されていて, 次を満たす集合 V を**線形空間 (linear space)** という:

和の法則

(1) (交換則) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

(2) (結合則) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して, $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.

(3) (零元の存在) ある元 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在し, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$.

(4) (逆元の存在) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$ となる元 $\boldsymbol{v}' \in V$ が存在.

スカラー倍の法則

(1) (分配則) $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して, $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$.

(2) (スカラー分配則) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $(c_1 + c_2)\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{v}$.

(3) (スカラー結合則) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $(c_1 c_2)\boldsymbol{v} = c_1(c_2\boldsymbol{v})$.

(4) (スカラー単位元の存在) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

- 線形空間 V の元を**ベクトル (vector)** という.

線形空間の例 (n 次元実ベクトル空間)

- n 個の実数を縦に並べた配列 (列ベクトル) 全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表す.
- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ として, $\mathbb{R}^n$ 上の和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ とスカラー倍 $c\boldsymbol{x}$ を

$$\text{和:}\quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \qquad \text{スカラー倍:}\quad c\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

  と定義する.
- このとき $\mathbb{R}^n$ は線形空間である. $\mathbb{R}^n$ を n **次元実ベクトル空間**という.

線形空間の例 ($m \times n$ 実行列空間)

- m 行 n 列の実数行列全体の集合を $\mathbb{R}^{m\times n}$ と表す.
- $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ として, $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上の和 $A + B$ とスカラー倍 cA を

  和: $\quad A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$

  スカラー倍: $\quad cA := (ca_{ij}) \quad (c \in \mathbb{R})$

  と定義する.
- このとき $\mathbb{R}^{m\times n}$ は線形空間である. $\mathbb{R}^{m\times n}$ を $m \times n$ **実行列空間**という.

線形空間の例 (実数列全体の集合)

- 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体の集合を S と表す.
- S 上の和とスカラー倍を

$$\begin{aligned} &\text{和:} && \{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ &\text{スカラー倍:} && c\{x_n\}_{n=1}^{\infty} := \{cx_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

  と定義する.
- このとき S は線形空間である.

$\boxed{\text{各自確認}}$ S の零元と逆元はなにか?

線形空間の例 (実数係数多項式全体の集合)

- 次数が n 次以下の実数係数多項式全体の集合を
$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$
と表す.
- $p, q \in P_n$ として，P_n 上の和とスカラー倍を
$$\text{和:} \qquad (p+q)(x) := p(x) + q(x)$$
$$\text{スカラー倍:} \qquad (cp)(x) := c \cdot p(x) \qquad (c \in \mathbb{R}).$$
と定義する.
- このとき P_n は線形空間である.

各自確認 P_n の零元と逆元はなにか?

内積の定義

以下, 特に断りがない限り V を線形空間とする.

定義 (内積の公理)

任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して実数 $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ を対応させる写像が次の性質を満たすとき, $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の**内積 (inner product)** という:

(1) (正定値性) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ で $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \geq 0$, かつ $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(2) (対称性) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x})$.

(3) (線形性) 任意の実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して

$$((\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}).$$

内積が定義された線形空間を**内積空間 (inner product space)** という.

内積空間のことを**計量線形空間 (metric space)** という場合もある.

内積の例 ($\mathbb{R}^n$ 上の内積)

- $\mathbb{R}^n$ 上の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

  に対して,

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{1}$$

  と定義する.

- これは $\mathbb{R}^n$ 上の内積である (標準内積という).

標準内積が内積であることの確認

$\boxed{\text{対称性}}$ $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x})$ より，対称性を満たす．

$\boxed{\text{正定値性}}$

- 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$
- また

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\iff \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

であるから, $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に限る.

線形性

- ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}((\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

よって式 (1) で定義される写像は正定値性･対称性･線形性を満たし, $\mathbb{R}^n$ 上の内積である.

内積に関する注意

1 つの線形空間に対して内積は複数定義できる

- 内積はいくつかの性質を満たす写像として定義されていた．
- よって V 上では**標準内積以外の内積**も考えることができる．

標準内積以外の内積の例

- 2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} e^{-i} x_i y_i$$

  と定義する．
- これは $\mathbb{R}^n$ 上の内積である (各自確認せよ).

$\mathbb{R}^{m\times n}$ 上の内積

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上の 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

  に対して,

$$(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

  と定義する.
- これは $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上の内積である.

P_n 上の内積

- n 次実数係数多項式全体の集合 P_n に属する 2 つの多項式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

に対して,

$$(p \cdot q) := \sum_{i=0}^{n} p(i)q(i) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \cdots + p(n)q(n)$$

と定義する. これは P_n 上の内積である.

- また $\alpha \leq \beta$ を満たす定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$(p \cdot q) := \int_{\alpha}^{\beta} p(x)q(x)dx$$

と定義すると, これも P_n 上の内積である.

目次

内積空間における「長さ」

定義 (ノルム)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, 内積 $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$ (≥ 0) の平方根を $\boldsymbol{x}$ の**ノルム (norm)** といい,

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})}$$

と表す.

ポイント

- $\mathbb{R}^n$ 上の標準内積に対するノルムは次のように表される:

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- 内積の平方根で定義されるノルムを**フロベニウスノルム**または **2-ノルム**という.
- ノルムはベクトルの「長さ」に対応する量で, 内積を用いて定義される.

💡 用いる内積が変われば「長さ」も変わる.

ノルムの性質

ノルムは,「矢印の長さ」の性質を満たす.

定理 (ノルムの性質)

内積空間 V 上の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の性質が成り立つ:

(1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ であり, かつ $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.

(3) $|(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (コーシー・シュワルツの不等式).

(4) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式).

(5) $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0$ ならば

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

が成り立つ (ピタゴラスの定理).

$|(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ の証明

- $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda) := \|\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$ とおく.
- $f(\lambda)$ を展開すると,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= ((\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \\ &= \lambda^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) + \lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \lambda(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}) && (\because\ \text{線形性}) \\ &= \lambda^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 && (\because\ \text{対称性}) \end{aligned}$$

  であり, これは λ に関する 2 次式である.
- 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ で $f(\lambda) \geq 0$ なので, $f(\lambda) = 0$ の判別式 (D とおく) は 0 以下.
- よって

$$D/4 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0$$

  であり, $|(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ を得る.

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ の証明

- 先に示したコーシー・シュワルツの不等式から,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \qquad \because \text{コーシー・シュワルツの不等式} \\ &= (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2. \end{aligned}$$

- よって $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ を得る. $\square$

ノルムに基づく距離

内積空間では, ノルムに基づく距離が導入できる.

定理 (ノルムに基づく距離)

内積空間 V 上の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

と関数 $d : V \times V \to \mathbb{R}$ を定義する. このとき d は次の性質を満たす:

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ かつ $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (三角不等式).

ポイント (1)–(3) は距離の公理そのもの.

- ノルムを用いて定義された関数 $d \colon V \times V \to \mathbb{R}$ は距離の公理を満たす.
- すなわち内積空間は距離空間である.

$\boxed{\text{証明}}$ (1), (2) は明らか. (3) を示す.

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$$

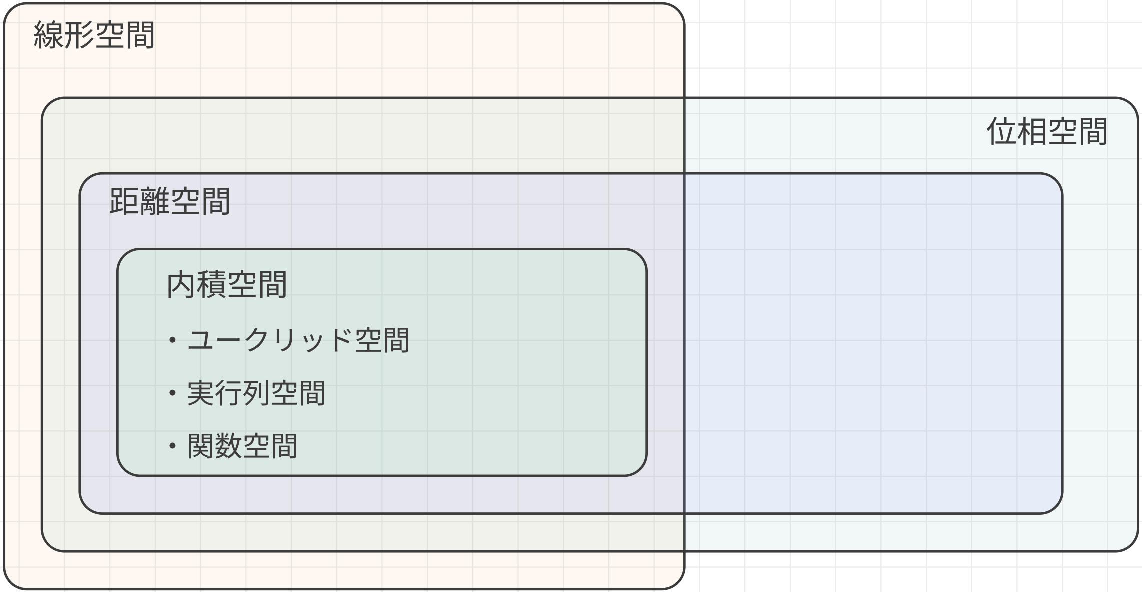
  とおく.

- このとき,

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \\ &= \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \\ &\geq \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| && (\because \text{ノルムの三角不等式}) \\ &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

  であり, 所望の不等式が示される. □

各種空間の関係性



目次

内積空間における「角度」

ゼロベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し，コーシー・シュワルツの不等式から，

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1.$$

これによりベクトル間の「角度」が定義できる．

定義 (ベクトルのなす角)

ゼロベクトルでない $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

を満たす $\theta \in [0, \pi]$ がただ一つに定まる．この θ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の**なす角 (angle)** という．

ポイント 2 つのベクトルのなす角は内積で定義さる．

💡 用いる内積が変われば「なす角」も変わる．

直交

内積が 0 であるベクトル間の関係に特別な名前をつける.

定義 (直交)

内積空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して,

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0$$

が成り立つとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交である (orthogonal)** という.

- 定義から明らかに, なす角が $\pi/2$ のベクトルは直交である.

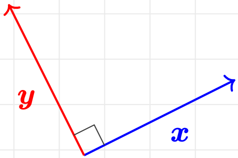


Figure: なす角が $\pi/2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

ゼロベクトルと直交性

命題 (ゼロベクトルは任意のベクトルと直交)

内積空間 V 上のゼロベクトルを $\mathbf{0}$ と表す．任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{0}) = 0$$

が成り立つ．すなわち，ゼロベクトルは V 上の任意のベクトルと直交する．

証明

- 線形空間の定義から，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ なる $-\boldsymbol{x} \in V$ が存在する．
- したがって，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{0}) &= (\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}))) \\ &= (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) && (\because \text{線形性}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□