固有値・固有ベクトルの応用 2

数理工学 第 8 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 10 月 30 日

目次

目次

1 階の線形微分方程式

- 実数 $t \in \mathbb{R}$ を変数とする関数 $y = f(t)$ の 1 階の導関数を $y' = \dfrac{df}{dt}$ と表す.
- 関数 $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が次の方程式 (微分方程式) を満たすものとする:

$$y' = ay \quad (a \in \mathbb{R} \text{ は定数}).$$

- この微分方程式を満たす関数は

$$y = e^{at} \cdot C \quad (C \in \mathbb{R}\text{は任意の定数})$$

という形で表される (解の導出は以降の授業で扱う).

- 特に $f(0) = y_0$ とすると, 上の式に代入して $C = y_0$ であり

$$y = e^{at} \cdot y_0.$$

ポイント　1 階線形微分方程式の解は指数関数で表される

1 階の線形微分方程式系

考えること 複数本の方程式からなる 1 階の線形微分方程式「系」の解を求めたい

- n 個の未知関数 $y_1 = f_1(t), y_2 = f_2(t), \ldots, y_n = f_n(t)$ に関する微分方程式系:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=:A \text{ (定数行列)}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}}$$

- $t = 0$ における関数値 (初期値) $\boldsymbol{y}_0 = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_n(0))^T$ が所与のとき，
この線形方程式系の解は次のように書ける:

$$\boldsymbol{y} = e^{At}\boldsymbol{y}_0.$$

ここで e^{At} は行列指数関数 (後述) である.

正方行列の指数関数

- マクローリン展開から, スカラー a を変数とする指数関数 e^a で次が成立:

$$e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \cdots .$$

$\rightsquigarrow$ これに基づいて指数関数の定義を拡張する

定義 (行列指数関数)

適当なサイズの正方行列 A に対して, 行列指数関数 e^A を次のように定義する:

$$e^A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

注意 右辺の無限級数は任意の正方行列 A に対して収束する (証明は略).

行列指数関数の性質

行列指数関数に関する性質

- $e^O = I$ (O はゼロ行列).
- 任意の正方行列 A に対して e^A は正則行列.
- 2 つの正方行列 A, B に対して, $AB = BA$ のとき $e^{A+B} = e^A e^B$.
- 任意の正方行列 A に対して, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

スカラーの場合の指数関数と同様の性質が成り立つことがポイント (証明は省略).

微分に関する性質

$t \in \mathbb{R}$ を変数とする関数 e^{At} を考える. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots\right) = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \dots \\ &= A\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots\right) = Ae^{At}.\end{aligned}$$

行列指数関数の計算

正方行列が対角化可能ならば行列指数関数は簡単に計算できる

- 正方行列 A が正則行列 P と対角行列 Λ を用いて

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

  と表されるとする.

- このとき, e^A を定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \\
&= I + P\Lambda P^{-1} + \frac{1}{2!}P\Lambda^2 P^{-1} + \frac{1}{3!}P\Lambda^3 P^{-1} + \cdots \quad (\because A^k = P\Lambda^k P^{-1}) \\
&= P\left(I + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 + \cdots\right)P^{-1} \\
&= Pe^{\Lambda}P^{-1}.
\end{aligned}$$

- 対角行列 Λ を $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と表すと $\Lambda^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$.
- よって e^Λ は次のように計算できる:

$$e^\Lambda = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{{\lambda_1}^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{{\lambda_n}^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

- 以上から, e^A は次のように表される:

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

行列指数関数を用いた線形微分方程式系の求解

次の 1 階の線形微分方程式系の解を求めたい:

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \quad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}\text{は定数行列}) \tag{1}$$

- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ を任意の定数ベクトルとして $\boxed{\boldsymbol{y} = e^{At}\boldsymbol{c}}$ $\cdots$ $(*)$ とする.
- $\dfrac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ より,

$$\boldsymbol{y}' = Ae^{At}\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{y}.$$

ゆえに $(*)$ は微分方程式系 (1) の解である.

- また $t = 0$ のとき $e^{A\cdot 0}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$ なので, 初期値が $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ と与えられているとき, その解は

$$\boldsymbol{y} = e^{At}\boldsymbol{y}_0$$

と表される (実はこれが唯一の解でもある).

- $A = P\Lambda P^{-1}$ と対角化可能な場合 (P は正則行列, Λ は対角行列), 線形微分方程式系の解は次のように書ける:

$$\boldsymbol{y} = e^{At}\boldsymbol{y}_0 = Pe^{\Lambda t}P^{-1}\boldsymbol{y}_0$$

- ここで

$$P := (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n), \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := P^{-1}\boldsymbol{y}_0$$

とすると, 微分方程式系の解は次のように書き直せる:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \boldsymbol{p}_2 e^{\lambda_2 t} c_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_n e^{\lambda_n t} c_n.$$

目次

1 階の線形微分方程式系の例

Richardson の軍拡モデル

- 対立する 2 国 (A 国と B 国) に対し, 時刻 t におけるそれぞれの軍事力を次で表す:

$$y_1(t) = \text{A 国の軍事力},$$

$$y_2(t) = \text{B 国の軍事力}$$

- 軍事力の変化を記述する微分方程式系

$$y_1'(t) = ky_2(t) - \alpha y_1(t),$$

$$y_2'(t) = \ell y_1(t) - \beta y_2(t)$$

$k, \ell > 0 \cdots$ 防衛係数 (相手国の軍事力に対する反応度合い)
$\alpha, \beta > 0 \cdots$ 疲弊率 (自国の軍事力に伴って発生する社会・経済の疲弊)

- 行列とベクトルを次のように定義する:

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -\alpha & k \\ \ell & -\beta \end{pmatrix}.$$

- 先の微分方程式系は

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\alpha y_1(t) + k y_2(t) \\ y_2'(t) = \ell y_1(t) - \beta y_2(t) \end{cases} \iff \boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$$

と書け, その解は

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{y}_0$$

と表される. ここで $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$ は初期の軍事力を並べたベクトル.

$\rightsquigarrow$ 行列 A によって $\boldsymbol{y}(t)$ の振る舞いはどのように変わるか?

軍拡モデルの数値例 (1/3)

$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$ の場合 $\left(\begin{array}{l} y_1'(t) = -4y_1(t) + 4y_2(t),\ \ y_1(0) = 120, \\ y_2'(t) = +2y_1(t) - 2y_2(t),\ \ y_2(0) = 180 \end{array} \right)$

- 行列 A は次のように対角化可能:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

- よって, $\boldsymbol{y}(t)$ は

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-6\cdot t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

- 右辺を計算すると

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 160 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 160 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 20e^{-6t}$$

$$\to \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \end{pmatrix} \quad (t \to \infty).$$

$\rightsquigarrow$ **両国の軍事力は等しい値に収束**

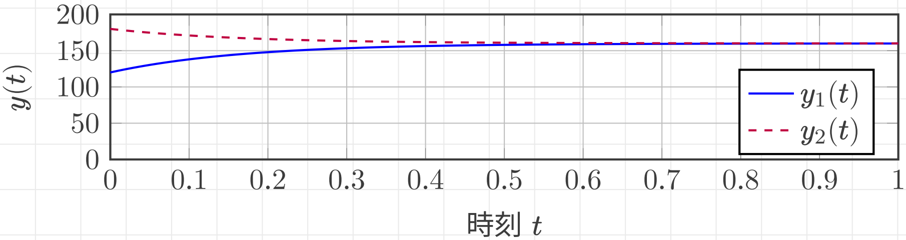


Figure: $y_1(t)$ と $y_2(t)$ の時間変化

数値例 (2/3) 防衛係数が大きい場合 (敵対度が強い場合)

$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$ の場合 $\begin{pmatrix} y_1'(t) = -4y_1(t) + 8y_2(t), & y_1(0) = 120, \\ y_2'(t) = +3y_1(t) - 2y_2(t), & y_2(0) = 180 \end{pmatrix}$

- 行列 A は次のように対角化可能:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

- よって, $\boldsymbol{y}(t)$ は

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

- したがって，

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 48e^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-36)e^{-8t}$$

$$\to \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix} \quad (t \to \infty).$$

$\rightsquigarrow$ **両国の軍事力は正の無限大に発散**

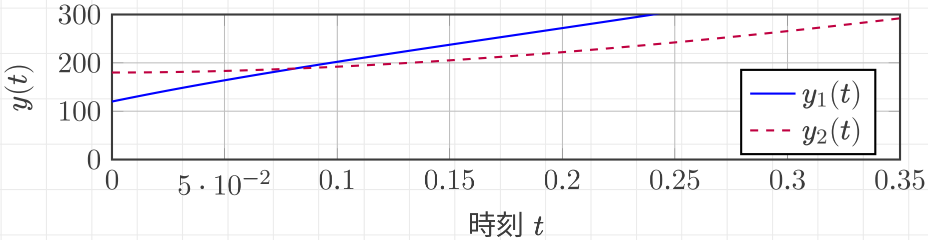


Figure: $y_1(t)$ と $y_2(t)$ の時間変化

数値例 (3/3) 防衛係数が小さい場合 (敵対度が弱い場合)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$$ の場合

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) = -4y_1(t) + 3y_2(t),\ \ y_1(0) = 120, \\ y_2'(t) = +1y_1(t) - 2y_2(t),\ \ y_2(0) = 180 \end{pmatrix}$$

- 行列 A は次のように対角化可能:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

- よって $\boldsymbol{y}(t)$ は

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 15e^{-5t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 165e^{-1\cdot t} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \to \infty) \quad \text{(計算過程省略)}.$$

$\rightsquigarrow$ **両国の軍事力はゼロに収束**

解の安定性

$\boxed{\text{線形微分方程式系}}$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \quad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}\text{は定数行列})$$

疑問： 微分方程式の解 $\boldsymbol{y}(t)$ は発散するのか, 収束するのか?

$\rightsquigarrow$ A の固有値を調べるとわかる

固有値を用いた解の安定性の判定

行列 A の固有値の実部が

- すべて負のとき $\to$ $\boldsymbol{y}(t)$ はゼロベクトルに収束
- すべて 0 以下のとき $\to$ $\boldsymbol{y}(t)$ は有界
- それ以外 $\to$ $\boldsymbol{y}(t)$ は無限大に発散

目次

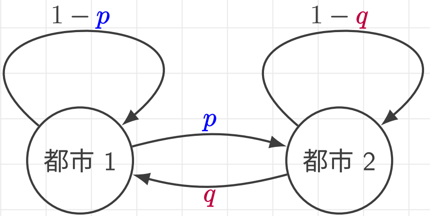
2 都市間での人口の移動のモデル化

- 毎年, 都市 1 から都市 2 へ割合 $p \in (0,1)$ で人口が移動し,
  都市 2 から都市 1 へ割合 $q \in (0,1)$ で人口が移動すると仮定.

- 現在の 2 都市の人口を $x_1^0, x_2^0 \geq 0$ とする.
- このとき, 1 年後の人口 x_1^1, x_2^1 は

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}}_{=A\text{とおく}} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

と表される.



$\rightsquigarrow$ 将来，2 都市の人口はどのような値になるか?

- 現在の人口と k 年後の人口をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix}$$

とする．

- このとき，k 年後の人口は

$$\boldsymbol{x}^k = A^k \boldsymbol{x}^0$$

と表される．

$\rightsquigarrow \displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k$ はどのような値になるか?

- 行列 A の固有値を計算すると $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 - p - q$.
- それぞれに対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で，これらは線形独立．よって A は対角化可能．

- $Q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$ として $A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} Q^{-1}$ と対角化する．このとき

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A^k &= Q \left(\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^k \end{pmatrix} \right) Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad (\because |1-p-q| < 1). \end{aligned}$$

- よって，

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \lim_{k\to\infty} A^k \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\left\{ \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix} \right\}}_{Q^{-1}} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \frac{x_1^0 + x_2^0}{p+q} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

- したがって 2 都市の人口の比は $q : p$ に収束し，
$\lambda_1 = 1$ に対応する固有ベクトルの成分の比率と一致する．

n 個の都市間での人口の移動のモデル化

- 毎年, 都市 j から都市 i へ割合 a_{ij} で人口が移動すると仮定

  ただし, $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ であり, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

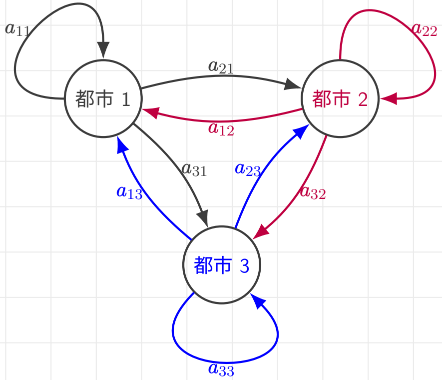
3 都市のケース

都市 1 からの移動: $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1,$

都市 2 からの移動: $a_{12} + a_{22} + a_{32} = 1,$

都市 3 からの移動: $a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1,$

割合は 0 以上: $a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$



- 都市 j の現在の人口を x_j^0, 1 年後の人口を x_j^1 とし,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}$$

とすると, 1 年後の人口は次のように表される:

$$\boldsymbol{x}^1 = A\boldsymbol{x}^0.$$

$\rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k$ はどのような値になるか?

補足 行列 A の各成分は非負では各列の和は 1.

この転置行列 (各成分が非負で各行の成分の和が 1 の行列) を**推移確率行列**と呼ぶ.

n 都市間での人口移動の場合

推移確率行列の固有値に関する性質

推移確率行列 A のすべての成分が正とする．このとき次の性質が成り立つ:

- 推移確率行列 A における**絶対値が最大の固有値は 1** である．
- 固有値 1 に対応する固有ベクトルとして，**成分が全て正のベクトルが存在**する．

- 上の定理の仮定を満たす推移確率行列 A に対し，
  固有値 1 に対応する固有ベクトルで成分が全て正のベクトルを $\boldsymbol{x}^\star$ $(\boldsymbol{x}^\star > \mathbf{0})$ とする．
- このとき, $\mathbf{1}$ をすべての成分が 1 のベクトルとすると,

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \lim_{k\to\infty} A^k \boldsymbol{x}^0 = \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{x}^0}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{x}^\star} \boldsymbol{x}^\star$$

  が成り立ち, 都市の人口の比率は $\boldsymbol{x}^\star$ の成分の比率に収束する．

(補足: $\boldsymbol{x}^\star$ の存在性はペロン･フロベニウスの定理で示せる)

まとめ

講義の振り返り

- 行列指数関数
- 1 階の線形微分方程式系の求解
- 軍拡モデルと都市の人口移動モデル

自宅での復習

- 対角化可能な場合の行列指数関数の計算方法を確認する．
- 線形微分方程式系の求解の流れを確認する．
- 2 都市間の人口移動モデルの議論を確認する．