実対称行列

数理工学 第 6 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 10 月 23 日

目次

目次

複素ベクトル・複素行列に関する表記

今回は複素数を成分にもつベクトル・行列が登場する:

- $\mathbb{C}$ 複素数全体の集合
- $\mathbb{C}^n$ 複素数を成分にもつ n 次元ベクトル全体の集合
- $\mathbb{C}^{m\times n}$ 複素数を成分にもつ $m \times n$ 行列全体の集合
- ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, 行列 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ の各成分を共役複素数に置き換えたベクトル, 行列をそれぞれ $\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{A}$ と表す.

例

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3-4i \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \qquad \overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 3+4i \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

実対称行列の固有値は実数

- 一般の正方行列では，固有値が実数であるとは限らない．
- しかし行列を**実対称行列**に限定すると，固有値は必ず実数になる．

定理 (実対称行列の固有値は実数)

n 次正方行列 A が実対称行列のとき，A の固有値はすべて実数である．

$\rightsquigarrow$ 固有ベクトルも実ベクトル

$\boxed{\text{証明}}$ 固有値とその共役複素数が一致することを示す．

- A の固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ とする．このとき

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

- λ の共役複素数を $\bar{\lambda}$ として

$$\boldsymbol{w} := (\bar{\lambda} I - A)\boldsymbol{v} \tag{1}$$

とおく．

- $\boldsymbol{w}$ の各成分を共役複素数に置き換えたベクトルを $\overline{\boldsymbol{w}}$ とすると，
  A が実対称行列であること ($\overline{A} = A$, $A^T = A$) より，
  $$\overline{\boldsymbol{w}}^T = \overline{\left((\overline{\lambda}I - A)\boldsymbol{v}\right)}^T = \overline{\boldsymbol{v}}^T(\lambda I - A)^T = \overline{\boldsymbol{v}}^T(\lambda I - A).$$
- よって
  $$\overline{\boldsymbol{w}}^T\boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{v}}^T(\lambda I - A)(\overline{\lambda}I - A)\boldsymbol{v} \overset{(*)}{=} \overline{\boldsymbol{v}}^T(\overline{\lambda}I - A)(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = 0$$
  であり，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である．
- したがって式 (1) より $(\overline{\lambda}I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{v}$ は固有値 $\overline{\lambda}$ に対応する固有ベクトル．
- よって $\lambda = \overline{\lambda}$ であり，固有値 λ は実数． □

(∗) の式変形は
$$(\lambda I - A)(\overline{\lambda}I - A) = \lambda\overline{\lambda}I - \lambda A - \overline{\lambda}A + A^2 = (\overline{\lambda}I - A)(\lambda I - A)$$
であることに基づく．一般の行列積は可換ではないので注意せよ．

実対称行列の性質

定理 (実対称行列の固有ベクトルの直交性)

n 次実対称行列 A の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

証明

- A の異なる固有値を α, β $(\alpha \neq \beta)$, それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とする.
- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = C$ とする. このとき,

$$(A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = (\alpha\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = \alpha C,$$
$$(A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T(A^T\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T(A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T(\beta\boldsymbol{y}) = \beta C.$$

- よって $\alpha C = \beta C$ であり, $\alpha \neq \beta$ から $C = 0$.
- したがって $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$ であり, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交する. $\square$

目次

実対称行列の対角化可能性

定理 (実対称行列の対角化)

任意の n 次実対称行列 A に対し，ある直交行列 P が存在して P^TAP が対角行列になる.

証明 n に関する帰納法で示す.

- 任意の $n-1$ 次実対称行列が直交行列で対角化可能と仮定し，
  任意の n 次実対称行列が直交行列で対角化可能であることを示す.
- A の固有値の一つを $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, 対応するノルムが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 \in \mathbb{R}^n$ とする.
- $\boldsymbol{p}_1$ を含む $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を構成し，直交行列 P_0 を次のように定義:
$$P_0 = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n).$$
- $P_0^T AP_0$ を計算すると，(次のスライドへ)

$$P_0^T A P_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^T \\ \boldsymbol{p}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n^T \end{pmatrix} (A\boldsymbol{p}_1,\ A\boldsymbol{p}_2,\ \ldots\ A\boldsymbol{p}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^T A\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_1^T A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^T A\boldsymbol{p}_n \\ \boldsymbol{p}_2^T A\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2^T A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_2^T A\boldsymbol{p}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{p}_n^T A\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_n^T A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n^T A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

- ここで, 1 列目に注目すると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^T A\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2^T A\boldsymbol{p}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n^T A\boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{p}_1^T \boldsymbol{p}_1 \\ \lambda_1 \boldsymbol{p}_2^T \boldsymbol{p}_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \boldsymbol{p}_n^T \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \text{は正規直交直交基底}).$$

- また $P_0^T A P_0$ が対称行列であることから式 (2) は次のように書き直せる:

$$P_0^T A P_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (\text{ただし}, A_1 \text{は} (n-1) \text{次実対称行列}). \tag{3}$$

- 帰納法の仮定から A_1 は直交行列 P_1 を用いて $P_1^T A_1 P_1 = D$ と対角化可能.

(D : 対角行列)

- よって式 (3) に次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

をそれぞれ左, 右から掛けると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_0^T A P_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{=:P\text{とおく}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T A_1 P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

であり, A は行列 P を用いて対角化可能であることが示される.

- 最後に P が直交行列であることを示す．P^TP を計算すると

$$P^TP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_0^T P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^T P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = I$$

  であり P は直交行列.

- よって帰納法の仮定のもと, A は直交行列で対角化可能であることが示される． □

直交行列の構成法

実対称行列の場合，対角化で用いる直交行列は固有ベクトルで構成できる．

系 (対角化で用いる直交行列の構成法)

n 次実対称行列 A を対角化する直交行列 P に対して，$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ と表すと，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ はそれぞれ A の固有ベクトルである．

目次

三角行列

対角成分より下の成分がすべてゼロの行列を**上三角行列 (upper triangular matrix)** という.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{三角行列の性質}}$ 三角行列は対角行列と同様のよい性質をもつ:

- 三角行列 U の固有値は対角成分 $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}$ と等しい.
- 三角行列の積は三角行列であり, U^k の対角成分は $u_{11}^k, u_{22}^k, \ldots, u_{nn}^k$ である.

$\rightsquigarrow$ 対角化可能性の議論を三角化に拡張する

ユニタリ行列: 直交行列の複素数版

複素行列で考えると, 実対称行列の対角化可能性は「三角化可能性」として一般化できる

定義 (ユニタリ行列)

複素正方行列 U が $\overline{U}^T U = I$ を満たすとき, U を**ユニタリ行列 (unitary matrix)** という.

$\rightsquigarrow$ 任意の直交行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はユニタリ行列

$\boxed{\text{ユニタリ行列の性質}}$ ユニタリ行列は直交行列と同様の性質を持つ:

$U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ をユニタリ行列とすると, 次が成立:

- U の列ベクトルは $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底をなす
- U は正則で, $U^{-1} = \overline{U}^T$
- UV もユニタリ行列

補足: $\overline{U}^T$ を U の随伴行列という

行列の三角化可能性

定理 (正方行列の三角化可能性)

任意の正方行列 A に対して, あるユニタリ行列 U が存在して $\overline{U}^T AU$ が上三角行列になる.

証明 対角化の場合と同様に, n に関する帰納法で示す.

- 任意の $n-1$ 次正方行列がユニタリ行列で三角化可能と仮定し,
  任意の n 次正方行列がユニタリ行列で三角化可能であることを示す.
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対して，その固有値の一つを $\lambda_1 \in \mathbb{C}$,
  対応するノルムが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ とする.
- $\boldsymbol{u}_1$ を含む $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を構成し,
  ユニタリ行列 U_0 を次のように定義する:

$$U_0 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

- このとき,

$$\overline{U_0}^T A U_0 = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{u}_1}^T A\boldsymbol{u}_1 & \overline{\boldsymbol{u}_1}^T A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \overline{\boldsymbol{u}_1}^T A\boldsymbol{u}_n \\ \overline{\boldsymbol{u}_2}^T A\boldsymbol{u}_1 & \overline{\boldsymbol{u}_2}^T A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \overline{\boldsymbol{u}_2}^T A\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}_n}^T A\boldsymbol{u}_1 & \overline{\boldsymbol{u}_n}^T A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \overline{\boldsymbol{u}_n}^T A\boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

- 式 (4) の 1 列目に注目すると,

$$\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{u}_1}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 \\ \overline{\boldsymbol{u}_2}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}_n}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \overline{\boldsymbol{u}_1}^T \boldsymbol{u}_1 \\ \lambda_1 \overline{\boldsymbol{u}_2}^T \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \overline{\boldsymbol{u}_n}^T \boldsymbol{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because \overline{U}_0^T U_0 = I).$$

- よって, A_{n-1} を $(n-1)$ 次正方行列として, 式 (4) は次のように書ける:

$$\overline{U_0}^T A U_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{5}$$

- 帰納法の仮定から, A_1 はユニタリ行列 U_1 を用いて $\overline{U_1}^T A_1 U_1$ と三角化可能.
- 式 (5) の両辺に次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{U_1}^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

をそれぞれ左, 右から掛けると, (次のスライドへ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{U_1}^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \overline{U_0}^T A \underbrace{U_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{=:U\text{とおく}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{U_1}^T A_1 U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

となり，これは上三角行列である．よって A は行列 U で三角化可能である．

- $\overline{U}^T U = I$ より U はユニタリ行列なので，
  最終的に A はユニタリ行列で三角化可能であることが示される．　□

教科書に関する補足

⚠️ 教科書における三角化に関する命題 (定理 20.5, p.106) について

- 「任意の実正方行列 A は**直交行列で... 三角行列に変換できる**」と述べられているが，この主張は偽．任意の直交行列で三角化できない実正方行列が存在する．

  直交行列で三角化できない実正方行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 任意の正方行列の三角化可能性を示すためには，**ユニタリ行列**を用いることが必要

対角化·三角化のまとめ

n 次正方行列を A とする.

- A はユニタリ行列で三角化可能
- A が実対称行列 $\Longrightarrow$ A は直交行列で対角化可能
- A の固有値がすべて異なる
  $\Longrightarrow$ A が n 個の線形独立な固有ベクトルをもつ $\Longleftrightarrow$ A は対角化可能

三角化の応用: フロベニウスの定理

- 実数 $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ を係数とする実数係数多項式

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  に対して, 変数をスカラー x から正方行列 X に置き換えた関数を次のように定義する:

$$f(X) = a_r X^r + a_{r-1} X^{r-1} + \cdots + a_1 X + a_0 I.$$

定理 (フロベニウスの定理)

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする. このとき $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ である.

- $f(A)$ を具体的に構成せずに, $f(A)$ の固有値が求まる.

$\boxed{\text{証明}}$ A はユニタリ行列 P を用いて次のように三角化できる:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (= T \text{ とおく}).$$

- このとき, 任意の自然数 k と実数 c に対して

$$\begin{aligned} P^{-1}(cA^k)P &= cP^{-1}A^kP = cP^{-1}\overbrace{AAA\cdots AA}^{k\text{個}}P \\ &= cP^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})A(PP^{-1})AP \\ &= c(P^{-1}AP)^k = cT^k = \begin{pmatrix} c\lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & c\lambda_2^k & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c\lambda_n^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- したがって cA^k は P を用いて三角行列 cT^k に三角化できる．
- よって

$$
\begin{aligned}
P^{-1}f(A)P &= P^{-1}(a_r A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I)P \\
&= P^{-1}(a_r A^r)P + P^{-1}(a_{r-1}A^{r-1})P + \cdots + P^{-1}(a_1 A)P + P^{-1}(a_0 I)P \\
&= a_r T^r + a_{r-1}T^{r-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I \\
&= f(T) \\
&= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

- よって $P^{-1}f(A)P$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ であり，これらは $f(A)$ の固有値である． □

ケイリー・ハミルトンの定理

多項式 $f(x)$ を固有多項式とすると, 次の命題が成立する.

定理 (ケイリー・ハミルトンの定理)

正方行列 A の固有多項式を $f_A(x)$ と表す. 任意の n 次正方行列 A に対して, 次が成立:

$$f_A(A) = O.$$

例　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$f_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

よって，ケイリー・ハミルトンの定理から

$$f_A(A) = A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I = O$$

が成り立つ.

まとめ

講義の振り返り

- 実対称行列の固有値･固有ベクトル
- 実対称行列の対角化，(複素) 正方行列の三角化
- フロベニウスの定理とケイリー・ハミルトンの定理

自宅での復習

- 実対称行列の固有値が実数である証明の流れを確認する．
- 実対称行列の対角化可能性に関する証明の流れを確認する．
- フロベニウスの定理とケイリー・ハミルトンの定理の主張を復習する．