

高階の微分方程式

数理工学 第 11 回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 13 日

授業で扱う微分方程式のトピック

1 階微分方程式

- 変数分離形
- 同次形
- 1 階線形微分方程式 (斉次, 非斉次)
- Bernoulli 型の微分方程式

高階微分方程式 \rightsquigarrow 今回

- (特殊な) 2 階微分方程式
- 高階線形微分方程式

ラプラス変換を用いた解法

目次

- ① (階数が下げられる) 2 階微分方程式の解法
- ② 高階線形微分方程式の解法

目次

① (階数が下げられる) 2 階微分方程式の解法

② 高階線形微分方程式の解法

2 階微分方程式

2 階微分方程式の一般形

x を独立変数とする未知関数 $y \equiv y(x)$ が満たす 2 階微分方程式は, ある関数 F を用いて

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

と書ける.

ここでは 2 階微分方程式のうち, 微分方程式の階数が下げられる

- 未知関数が現れない場合
- 独立変数が現れない場合

それぞれの解法を見る.

1 階の微分方程式に帰着できる場合 (未知関数が現れない場合)

$$\text{一般形: } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

ケースその 1: 未知関数 y が F の引数に現れない場合

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (1)$$

- $z = \frac{dy}{dx}$ とおくと, $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$.
- これを方程式 (1) に代入すると

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

となり, これは x を独立変数, z を未知関数とした 1 階の微分方程式.

- よって一般解 $z(x)$ を求めたあと, $z(x) = \frac{dy}{dx}$ を解けば一般解 $y(x)$ が求まる.

1 階の微分方程式に帰着できる場合 (独立変数が現れない場合)

$$\text{一般形: } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

ケースその 2: 独立変数 x が F の引数に現れない場合

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (2)$$

- $z = \frac{dy}{dx}$ とおくと, 合成関数の微分より $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = z \frac{dz}{dy}$.
- これを方程式 (2) に代入すると

$$F\left(y, z, z \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

となり, これは y を独立変数, z を未知関数とする 1 階の微分方程式.

- よって, 一般解 $z(y)$ を求めたあと, $z(y) = \frac{dy}{dx}$ を解けば一般解 $y(x)$ が求まる.

例題 (未知関数が現れない場合)

次の 2 階微分方程式を解け:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

- $z = \frac{dy}{dx}$ とおくと, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$.
- よってこれらを方程式 (3) に代入すると

$$x \frac{dz}{dx} + z = 0 \quad (4)$$

となり, これは z を未知関数とする 1 階の微分方程式である.

- 式 (4) は変数分離形であり, 式を整理すると

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

- よって両辺の不定積分を求めると、方程式 (4) の一般解は

$$\log|z| = -\log|x| + C_1 \quad (C : \text{任意定数})$$

すなわち $z = \frac{C_1}{x}$ ($C_1 : \text{任意定数}$) となる。

- したがって、元の方程式 (3) の一般解を求めるには、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x}$$

を解けばよく、両辺を積分すれば

$$y = C_1 \log|x| + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

と一般解が求まる。

微分方程式の階数と任意定数の個数の関係

- 2 階の微分方程式の一般解には 2 個の任意定数が現れる。
- 一般に n 階の微分方程式の一般解には n 個の任意定数が現れる。

例題 (独立変数が現れない場合)

次の 2 階微分方程式を解け:

$$y \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0. \quad (5)$$

- $z = \frac{dy}{dx}$ とおくと, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = z \frac{dz}{dy}$ であり, これらを方程式 (5) に代入すると

$$yz \left(\frac{dz}{dy} \right) + z^2 + 1 = 0.$$

- 式を整理して

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{z^2 + 1}{z} \cdot \frac{1}{y} \quad (6)$$

- これは y を独立変数とした変数分離形の微分方程式であり, その一般解は

$$\int \frac{z}{z^2 + 1} dz = - \int \frac{1}{y} dy + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

を満たす.

- 両辺の不定積分を計算して

$$\frac{1}{2} \log|z^2 + 1| = -\log|y| + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

- よって, z に関する一般解は

$$z^2 + 1 = \frac{C_1^2}{y^2} \quad (C_1 : \text{任意定数}) \quad (7)$$

を満たす.

- $z = \frac{dy}{dx}$ であることを思い出すと, 式 (7) から y に関する 1 階の微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{C_1^2}{y^2} \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{C_1^2}{y^2} - 1} = \pm \frac{\sqrt{C_1^2 - y^2}}{y}.$$

を得る.

- これは変数分離形であり、その一般解は

$$\pm \int \frac{y}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} dy = \int 1 dx + C_2 \quad (C_2 : \text{任意定数})$$

を満たす.

- 両辺の不定積分を計算して、最終的に求める一般解は

$$\pm \sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

すなわち

$$y^2 + (x + C_2)^2 = C_1^2 \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

と求まる (陰関数表示).

目次

① (階数が下げられる) 2 階微分方程式の解法

② 高階線形微分方程式の解法

n 階線形微分方程式

高階線形微分方程式の一般形

未知関数 $y \equiv y(x)$ に関する n 階の導関数に関する微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = Q(x)$$

と書ける微分方程式を n 階線形微分方程式という.

- 未知関数とその導関数に関して線形な微分方程式
- $Q(x) \equiv 0$ の場合は**斉次**, そうでない場合は**非斉次**と呼ぶ.

ここで考えること

- 係数関数 $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$ がすべて定数の場合の斉次線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

の解き方.

2 階斉次線形微分方程式の解法

(定数係数) 2 階斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (8)$$

方針

- (天下りのだが) この微分方程式の解が $y(x) = e^{\lambda x}$ (λ : 定数) と表されるものとする.
- このとき $\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ であり, これを式 (8) に代入すると
$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0.$$
- よって λ が次の 2 次方程式

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (9)$$

の根ならば, $e^{\lambda x}$ は方程式 (8) の特殊解 (式 (9) を特性方程式とよぶ).

特性方程式を用いた解の導出

特性方程式 (9) の (複素数を含む) 根を λ_1, λ_2 とする.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき

- このとき,

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

は共に方程式 (8) の特殊解である.

- $y_1(x), y_2(x)$ の線形結合で表される関数

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数}) \end{aligned}$$

も方程式 (8) の解であり, これが一般解である.

微分方程式 (8) の一般解は, 2 つの 1 次独立な特殊解の線形結合で表される.

$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき

- このとき $e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x}$ であり, 特殊解は一つしか見つからない.
- 実はこの場合, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ に加えて,

$$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$$

が方程式 (8) の特殊解になっている (以降の例で確認する).

- よって $y_1(x), y_2(x)$ の線形結合

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

が方程式 (8) の一般解である.

重複度 2 の根 λ_1 に対して $e^{\lambda_1 x}$ と $x e^{\lambda_1 x}$ は共に微分方程式 (8) の (1 次独立な) 特殊解.

例題

次の 2 階斉次線形微分方程式を解け:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0. \quad (10)$$

- 微分方程式 (10) の特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ であり, その根は $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
- よって $y_1 = e^{2x}$ と $y_2 = xe^{2x}$ はともに斉次方程式 (10) の解である.
- 実際, $y_2 = xe^{2x}$ を式 (10) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \underbrace{(xe^{2x})''}_{\text{pink}} - 4\underbrace{(xe^{2x})'}_{\text{blue}} + 4(xe^{2x}) \\ &= \underbrace{(2e^{2x} + 2(e^{2x} + 2xe^{2x}))}_{\text{pink}} - 4\underbrace{(e^{2x} + 2xe^{2x})}_{\text{blue}} + 4(xe^{2x}) \\ &= 4(e^{2x} + xe^{2x}) - 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 4(xe^{2x}) = 0. \end{aligned}$$

- したがって方程式 (10) の一般解は e^{2x} と xe^{2x} の線形結合として次のように書ける:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数}).$$

例題

正の実数 $\omega > 0$ を定数とした次の 2 階斉次線形微分方程式を解け

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0. \quad (11)$$

- 微分方程式 (11) の特性方程式は

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

であり, その根は $\lambda_1 = +\omega i$, $\lambda_2 = -\omega i$.

- よって $y_1 = e^{\omega i x}$ と $y_2 = e^{-\omega i x}$ はともに斉次方程式 (11) の解であり, その線形結合

$$y(x) = C_1 e^{\omega i x} + C_2 e^{-\omega i x} \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

が方程式 (11) の一般解である.

⇨ 虚数を含む式をもう少し整理する.

- オイラーの公式 $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)$ を用いると, 一般解 y は

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 e^{\omega i x} + C_2 e^{-\omega i x} \\&= C_1 (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 (\cos(-\omega x) + i \sin(-\omega x)) \\&= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{=C_1} \cos \omega x + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{=C_2} \sin \omega x \\&= C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})\end{aligned}$$

と書き直せる.

補足

- $m > 0, k > 0$ を定数として $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと, 方程式 (11) は次のように書ける:

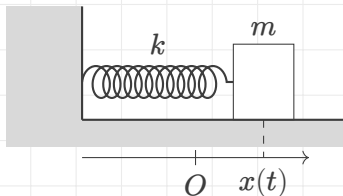
$$m \frac{d^2 y}{dx^2} = -ky.$$

- これは質量 m の物体がばね定数 k のばねに繋がれている単振動の運動方程式.

興味ある人向けの例題

速度に比例する抵抗力を受ける運動方程式

- 質量 m の物体がばねに繋がれているとする。
- 時刻 t における物体の変位を $x(t)$ とし、物体には次の力が水平方向に働く：
ばねの復元力: $-m\omega^2 x$ ($\omega > 0$),
物体の速度に比例する抵抗力: $-2m\phi \frac{dx}{dt}$ ($\phi > 0$)
- この物体の運動方程式を $x(t)$ に関する微分方程式として表し、一般解を求めよ。



ヒント (1) $\phi = \omega$, (2) $\phi > \omega$, (3) $\phi < \omega$ の 3 つに場合分けして一般解を求める。

運動方程式の解の様子

初期条件を $x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0$ としたときの特殊解の様子:

$\phi > \omega$: 過減衰

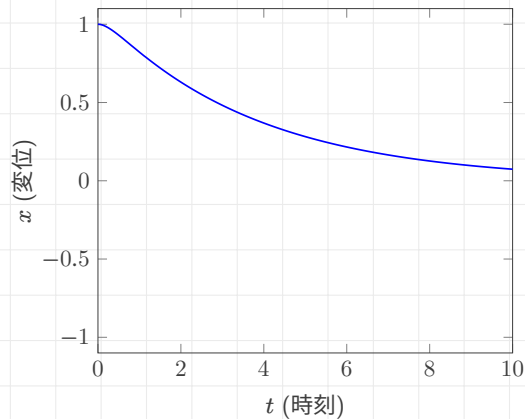


Figure: $\omega = 1, \phi = 2$ の場合

$\phi < \omega$: 減衰振動

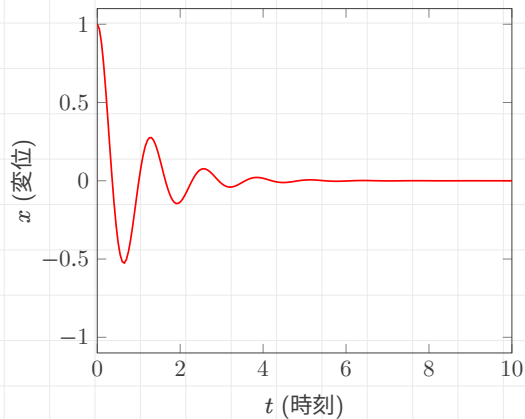


Figure: $\phi = 1, \omega = 5$ の場合

n 階斉次線形微分方程式の解法

(定数係数) n 階斉次線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (12)$$

- この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

特性方程式が n 個の相異なる根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を持つとき (重根を持たない場合)

- このとき $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ はすべて斉次方程式 (12) の解.
- これら n 個の解の線形結合

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (C_1, C_2, \dots, C_n : \text{任意定数})$$

が斉次方程式 (12) の一般解である.

特性方程式が重根をもつ場合

- 相異なる ℓ 個の根 λ_i ($i = 1, 2, \dots, \ell$) (ただし $\ell \leq n$) それぞれに対し, その重複度 m_i に対応する個数の特殊解

$$e^{\lambda_i x}, \quad x e^{\lambda_i x}, \quad x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}$$

が存在する.

- すべての根に対する上記の解を集めると, 合計で n 個の特殊解 y_1, y_2, \dots, y_n が得られ, その線形結合

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (C_1, C_2, \dots, C_n : \text{任意定数})$$

が斉次方程式 (12) の一般解である.

特性方程式を用いた一般解

- 相異なる ℓ 個の根を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ (ただし $\ell \leq n$).
それぞれの重複度を m_1, m_2, \dots, m_ℓ とする ($m_1 + m_2 + \dots + m_\ell = n$).

- このとき,

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} & (m_1 \text{個}) \\ e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x} & (m_2 \text{個}) \\ \dots & \\ e^{\lambda_\ell x}, x e^{\lambda_\ell x}, \dots, x^{m_\ell-1} e^{\lambda_\ell x} & (m_\ell \text{個}) \end{array} \right. \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_\ell = n)$$

はすべて斉次方程式 (12) の解であり, これら n 個の解の線形結合が一般解である.

例題

次の 3 階斉次線形微分方程式を特性方程式を用いて解け:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (13)$$

- 微分方程式 (13) の特性方程式は

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \iff (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

- よって特性方程式の根は $\lambda_1 = -1$ (重複度 1), $\lambda_2 = 1$ (重複度 2).
- したがって e^{-x} , e^x , xe^x は方程式 (13) の解である.
- 以上より, 方程式 (13) の一般解は e^{-x} , e^x , xe^x の線形結合

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x \quad (C_1, C_2, C_3 : \text{任意定数})$$

と表される.

まとめ

講義の振り返り

- 階数が下げられる 2 階微分方程式の解法
(未知関数が現れない場合，独立変数が現れない場合)
- 定数係数の n 階斉次線形微分方程式に対する特性方程式を用いた解法

自宅での復習

- 2 階微分方程式で，階数を下げる変数変換の流れと計算を復習する．
- 特性方程式に基づく解き方の流れを復習する (特に特性方程式が重根をもつ場合)