

射影と最小二乗法

数理工学 第2回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年10月06日

目次

- ① 部分空間と射影
- ② 射影の求め方
- ③ 実ベクトルへの射影, 最小 2 乗法

目次

① 部分空間と射影

② 射影の求め方

③ 実ベクトルへの射影, 最小 2 乗法

部分空間: 和とスカラー倍に閉じた空間

定義 (部分空間)

線形空間 V の (空でない) 部分集合 $W \subseteq V$ が次の条件を満たすとき,

W を V の**部分空間 (subspace)** という:

- (1) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ に対して, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, (和に関して閉じている)
- (2) 任意の $\mathbf{v} \in W$, $c \in \mathbb{R}$ に対して, $c\mathbf{v} \in W$. (スカラー倍に関して閉じている)

- n 個の m 次実ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ の線形結合で表せるベクトル全体の集合

$$W = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

は \mathbb{R}^m の部分空間である.

- W を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ によって**張られる**部分空間といい,

$$W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

と表す.

部分空間の基底

定義 (線形独立と線形従属)

線形空間 V 上の元 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ に対して,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

が成り立つとき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は**線形独立 (linear independent)** であるという.

線形独立でないベクトルの組を**線形従属 (linear dependent)** という.

定義 (部分空間の基底)

線形空間 V の部分空間 W に対して, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in W$ が次の条件を満たすとき,
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を W の**基底 (base)** という:

- (1) $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$,
- (2) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は線形独立である.

部分空間への射影

定義 (直交射影)

内積空間 V 上の部分空間 $W \subseteq V$ と、ベクトル $v \in V$ に対して、

$$\forall y \in W, ((v - p) \cdot y) = 0$$

となる $p \in W$ を v の W への射影 (projection) という。

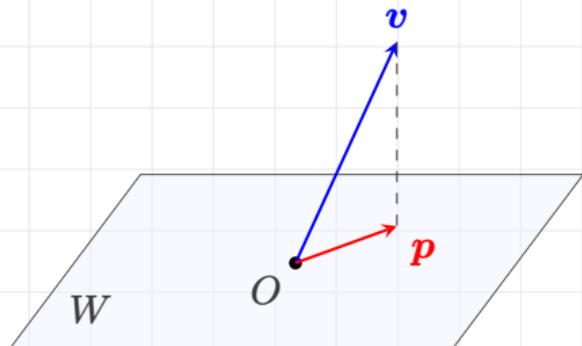


Figure: ベクトル v の部分空間 W への射影 p

射影の意味づけ

定理 (射影は部分空間上で最も「近い」)

内積空間 V 上の部分空間を $W \subseteq V$, ベクトル $v \in V$ の W への射影を $\mathbf{p} \in W$ とする.

このとき以下が成り立つ:

$$\forall \mathbf{y} \in W, \|v - \mathbf{y}\| \geq \|v - \mathbf{p}\|.$$

証明

- 任意の $\mathbf{y} \in W$ に対して,

$$\|v - \mathbf{y}\|^2 = \|(v - \mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{y})\|^2 = \|v - \mathbf{p}\|^2 + 2((v - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{y})) + \|\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2.$$

- \mathbf{p} は v の W への射影なので, $v - \mathbf{p}$ は W 上の任意のベクトル \mathbf{y} と直交する.
- よって $\mathbf{p} - \mathbf{y} \in W$ より $((v - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{y})) = 0$ であり,

$$\|v - \mathbf{y}\|^2 = \|v - \mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2 \geq \|v - \mathbf{p}\|^2.$$

目次

① 部分空間と射影

② 射影の求め方

③ 實ベクトルへの射影, 最小 2 乗法

射影の求め方

ベクトル v の部分空間 W への射影 p を求める

方針

- p は W 上のベクトルであるため, W の基底 y_1, \dots, y_k を用いて

$$p = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_k y_k$$

と表現できる. ここで $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は係数.

- 射影の定義から

$$\forall w \in W, ((v - p) \cdot w) = 0$$

となる $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ を求めればよい.



「 W 上のすべてのベクトルと直交する」という条件をどう扱うか?

部分空間上のベクトルと直交する条件

補題

部分空間 W の基底を $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ とする。このとき、

$$\forall \mathbf{w} \in W, (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}) = 0 \iff (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}_1) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}_2) = \cdots = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}_k) = 0.$$

証明 (\Rightarrow) は明らか。 (\Leftarrow) を示す。

- $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ は W の基底なので、任意の $\mathbf{w} \in W$ は次のように書ける：

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

- 内積 $(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})$ を計算すると

$$\begin{aligned} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}) &= (\mathbf{z} \cdot (\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k)) \\ &= \lambda_1 (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}_1) + \lambda_2 (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}_2) + \cdots + \lambda_k (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}_k) \quad (\because \text{内積の線形性}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。よって \mathbf{z} は W 上の全てのベクトルと直交する。

射影の求め方

- 先の補題から

$$\forall \mathbf{w} \in W, ((\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}) = 0 \iff ((\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}_i) = 0 \ (i = 1, \dots, k)$$

である.

- $\mathbf{p} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{y}_j$ であることから

$$((\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}_i) = \left(\left(\mathbf{v} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{y}_j \right) \cdot \mathbf{y}_i \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

を満たす $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ を求めれば射影 \mathbf{p} が求まる.

- 内積の線形性から

$$\left(\left(\mathbf{v} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{y}_j \right) \cdot \mathbf{y}_i \right) = (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{v}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

- これを式 (1) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 \text{式 (1)} &\iff \begin{cases} \lambda_1(\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1) + \lambda_2(\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{v}) \\ \lambda_1(\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1) + \lambda_2(\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{v}) \\ \vdots \\ \lambda_1(\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_1) + \lambda_2(\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_2) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{v}) \end{cases} \\
 &\iff \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_k) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{v}) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{v}) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k$ に関する線形方程式系

- 行列とベクトルの表記を導入して

$$K = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_k) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{v}) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{v}) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

とする (行列 K を **グラム行列 (Gram matrix)** という).

- $K, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{b}$ を用いると先の線形方程式系 (2) は

$$K\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \tag{3}$$

と書ける.



線形方程式系 (3) の解 $\boldsymbol{\lambda}$ が求まれば射影が求まる

グラム行列の性質

定理 (グラム行列の正則性)

ベクトル $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ が線形独立のとき, グラム行列 K は正則である.

証明 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ として,

$$K\mathbf{c} = \mathbf{0} \implies \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

を示せばよい (\because 正方行列が正則行列 \Leftrightarrow その列ベクトルは線形独立).

- ベクトル $K\mathbf{c}$ の各成分に注目すると,

$$K\mathbf{c} = \mathbf{0} \iff (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_1)c_1 + (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_2)c_2 + \cdots + (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_k)c_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$\iff \left(\mathbf{y}_i \cdot \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

である.

- よって $K\mathbf{c} = \mathbf{0}$ のとき $\sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j$ は W の基底のベクトルすべてと直交.

- よって $\sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j$ は W 上のすべてのベクトルと直交。自身も W 上のベクトルなので

$$\left(\sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j \cdot \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j \right) = 0,$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j = 0$$

が成り立つ (\because 内積の定義).

- $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ は線形独立であるから、

$$\sum_{j=1}^k c_j \mathbf{y}_j = 0 \implies \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

であり、最終的に $K\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{0}$ を得て K が正則行列であることが示される。

射影の求め方

解きたい線形方程式系

$$K\lambda = b$$

- 先に示した命題から K は正則行列.
- よって上の線形方程式系は唯一の解をもち, その解は次のように書ける:

$$\lambda = K^{-1}b.$$

- 線形方程式系の解 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T$ を用いて,

$$p = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_k y_k$$

とすると, p は v の部分空間 W への射影となる.

$v \in V$ の部分空間 W への射影 p を求める手順

- (1) $K = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_k) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k) \end{pmatrix}$ を計算する.
- (2) $b = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot v) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot v) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot v) \end{pmatrix}$ を計算する.
- (3) $\lambda = K^{-1}b$ とする.
- (4) $p = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{y}_j$ とする.

正規直交基底を用いた射影の求め方

基底が正規直交基底の場合、射影は簡単に求まる

定義 (正規直交基底)

部分空間 W の基底 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ の各ベクトルのノルムが 1 で互いに直交するとき、

正規直交基底 (orthonormal basis) という。

正規直交基底の特徴

正規直交基底のグラム行列は単位行列である:

$$K = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_k) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

⇒ 射影の計算が簡単になる

$v \in V$ の部分空間 W への射影 p を求める手順 (正規直交基底の場合)

(1) $K = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_k) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_2) & \cdots & (\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k) \end{pmatrix}$ を計算する. 正規直交基底の場合, $K = I$

(2) $b = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \cdot v) \\ (\mathbf{y}_2 \cdot v) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_k \cdot v) \end{pmatrix}$ を計算する.

(3) $\lambda = K^{-1}b$ とする.

正規直交基底の場合, $\lambda = b$

(4) $p = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{y}_j$ とする.

正規直交基底の場合, $p = \sum_{j=1}^k (\mathbf{y}_j \cdot v) \mathbf{y}_j$

正規直交基底を用いると内積・ノルムの計算も簡単

- $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \in W$ を部分空間 W の正規直交基底とする.
- 2つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ が

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{y}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i \mathbf{y}_i$$

と表されるとする.

- このとき

内積

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{y}_i \cdot \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i \mathbf{y}_i \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j) = \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$$

ノルム

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i^2}.$$

~~~ 係数だけで内積とノルムが計算できる.

# 目次

- ① 部分空間と射影
- ② 射影の求め方
- ③ 実ベクトルへの射影, 最小 2 乗法

# 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ での射影

- $\mathbb{R}^m$  の部分空間  $W$  の基底を  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$  とする.
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  の  $W$  への射影  $\mathbf{p} \in W$  を求めたい. (内積は標準内積  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$  を用いる)
- 基底のベクトルを並べた行列を  $A = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  とすると,

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = A^T A \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^T \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_2^T \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^T \mathbf{v} \end{pmatrix} = A^T \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k.$$

- よって射影を求めるために解く線形方程式系  $K\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}$  は次のように書ける:

$$A^T A \boldsymbol{\lambda} = A^T \mathbf{v}. \tag{4}$$

- 式 (4) は**正規方程式 (normal equation)** とよばれる.

## 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ での射影 (続き)

- $y_1, y_2, \dots, y_k$  は線形独立なので,  $A^T A$  は正則行列である.
- 正規方程式 (4) の解は唯一であり, その解は次のように書ける:

$$\lambda = (A^T A)^{-1} A^T v.$$

- よって, 射影  $p$  は

$$p = \sum_{j=1}^k \lambda_j y_j = A\lambda = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_\text{射影行列という} v.$$

と求まる.

- 特に  $y_1, y_2, \dots, y_k$  が正規直交基底の場合,  $A^T A = I$  なので

$$p = AA^T v.$$

となる.

## 最小 2 乗法

記法 行列  $A$  の列空間 (列ベクトルが張る部分空間) を  $R(A)$  と書く.

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  を所与の定数とした次の線形方程式系を解くことを考える:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- $A\mathbf{x} \in R(A)$  より,  $\mathbf{b} \notin R(A)$  のときこの解は存在しない.

~~  $\mathbf{b} \notin R(A)$  の場合,  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$  が小さくなるような  $\mathbf{x}$  を求めることを考える

- これは  $\mathbf{b}$  の  $R(A)$  への射影を求めることにほかならならず,

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

とすると,  $A\hat{\mathbf{x}}$  は  $\mathbf{b}$  の  $R(A)$  への射影である.

- $\hat{\mathbf{x}}$  を**最小 2 乗解**といい, 最小 2 乗解を求めるこ**とを最小 2 乗法**といいう.

## 最小 2 乗法の例

- アイスの売上に関して、次のデータがある：

| 気温 (°C) | アイスの売上 (個) |
|---------|------------|
| 10      | 20         |
| 15      | 30         |
| 20      | 50         |
| 25      | 80         |
| 30      | 100        |

- 気温からアイスの売上を予測するため、  
アイスの売上  $b$  (個) と気温  $a$  (°C) には

$$b = x_1 + x_2 a$$

という関係にあると仮定する。

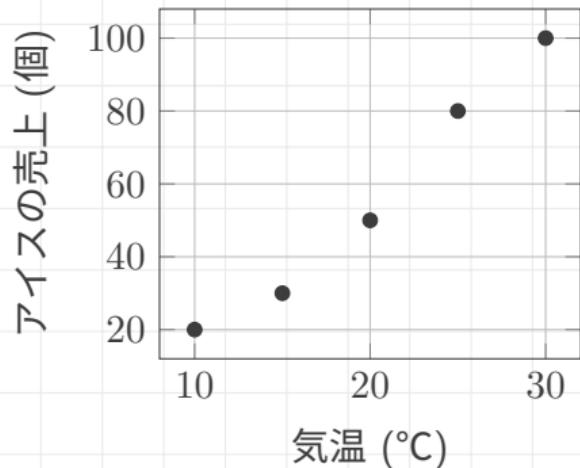


Figure: 売上と気温の散布図

データから  $x_1, x_2$  を求めるにはどうすればよいか？

## 最小 2 乗法の例 (続き)

- $x_1, x_2$  を求めるために,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \\ 1 & 25 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

とした線形方程式系  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  を考える.  $\rightsquigarrow$  **これを満たす解  $\mathbf{x}$  は存在しない.**

- そこで最小 2 乗解  $\hat{\mathbf{x}}$  を求めることを考えると,

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -28 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

と求まる (計算過程は省略).

- 気温を用いたアイスの売上の予測式は  $\hat{b} = -28 + 4.2a$  と求まる.

## 最小 2 乗法の例 (続き)

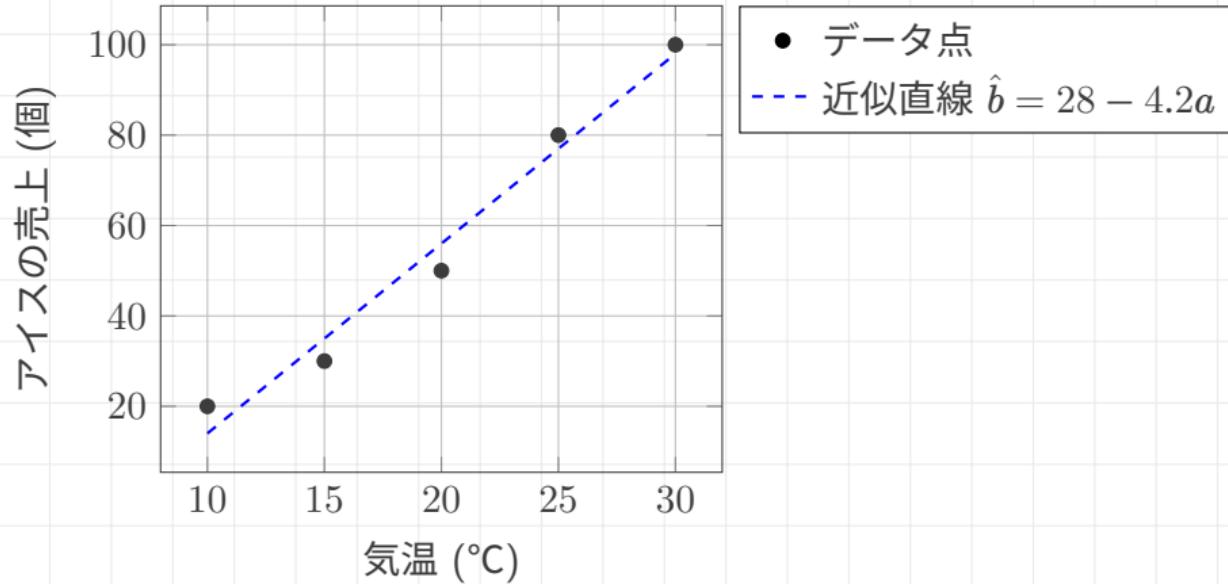


Figure: 売上と気温の散布図と最小 2 乗法による直線近似

最小 2 乗法は機械学習の第一歩

# まとめ

## 講義の振り返り

- 射影の定義と意味づけ
- 射影の計算方法
- 射影の計算としての最小 2 乗法

## 自宅での復習

- 線形独立・正則行列に関する定義や性質を確認する
- 射影の計算手順と正規直交基底を用いた計算の簡略化を確認する
- 最小 2 乗法における正規方程式の作り方を確認する