

# 固有値・固有ベクトル

数理工学 第5回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年10月20日

# 目次

- ① 固有値・固有ベクトルの定義と性質
- ② 行列の対角化

# 目次

① 固有値・固有ベクトルの定義と性質

② 行列の対角化

# 固有値・固有ベクトル

## 定義 (固有値・固有ベクトル)

$n$  次正方行列  $A$  に対して,

$$Ax = \lambda x$$

を満たすスカラー  $\lambda$  と非ゼロベクトル  $x$  ( $x \neq 0$ ) が存在するとき,  $\lambda$  を  $A$  の**固有値 (eigenvalue)**,  $x$  を固有値  $\lambda$  に対応する**固有ベクトル (eigenvector)** という.

例  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  とする. このとき

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x$$

したがって, 2 は  $A$  の固有値であり,  $x$  は固有値 2 に対応する固有ベクトルである.

# 固有多項式と固有方程式

- $n$  次正方行列  $A$  に対して,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  より,  
 $\lambda$  が  $A$  の固有値  $\iff$  線形方程式系  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  が非ゼロベクトルの解を持つ  
 $\iff \det(\lambda I - A) = 0.$

## 定義 (固有多項式, 固有方程式)

- $f_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$  を  $A$  の**固有多項式 (characteristic polynomial)**,
- $f_A(\lambda) = 0$  を  $A$  の**固有方程式 (characteristic equation)** という.

☞ 固有値は固有方程式の根

固有方程式は  $n$  次方程式であるため, 代数学の基本定理から次がいえる:

## 定理 (固有値の個数は正方行列のサイズと一致)

複素数の範囲で考えたとき,  $n$  次正方行列  $A$  は重複を許して  $n$  個の固有値をもつ.

# 固有値・固有ベクトルに関する注意点

## 注意

- 正方行列  $A$  が実行列であっても、固有値は実数であるとは限らない。
- 同様に、固有ベクトルも実ベクトルであるとは限らない。

例  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とする。このとき、固有方程式は

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

- よって  $A$  の固有値は  $\pm i$  であり、実数ではない。
- $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  とすると、 $Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = ix$ 。
- よって  $x$  は固有値  $i$  に対応する固有ベクトルであるが、実ベクトルではない。

# 固有空間

固有ベクトルの注意点 一つの固有値に対応する固有ベクトルは無数に存在

- $n$  次正方行列  $A$  の固有値を  $\lambda$ , 対応する固有ベクトルを  $\mathbf{x}$  とする
- このとき,  $\mathbf{x}$  のスカラー倍  $\alpha\mathbf{x}$  ( $\alpha \neq 0$ ) に対して
$$(\lambda I - A)(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$
- よって  $\alpha\mathbf{x}$  も固有ベクトル.

## 定義 (固有空間)

正方行列  $A$  の固有値  $\lambda$  に対して, 次のように定義される集合

$$W(\lambda) := \{\mathbf{x} \mid (\lambda I - A)\mathbf{x} = 0\}$$

を固有値  $\lambda$  に対応する**固有空間 (eigenspace)** という.

- 固有空間は固有ベクトル全体の集合にゼロベクトルを加えた集合
- 以後「固有ベクトル」というときは, ゼロベクトル以外の固有空間上のベクトルを指す.

# 固有空間の性質

固有空間の性質: 固有空間は和とスカラー倍に関して閉じた部分空間

固有空間  $W(\lambda)$  は部分空間である.

スカラー倍に関して閉じていること

- 前のページと同様の議論で示せるので省略.

和に関して閉じていること

- 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W(\lambda)$  に対し,

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

- よって  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W(\lambda)$  であり, 和に関して閉じている.

# 固有値の重要な性質

## 定理 (固有値の総積, 総和はそれぞれ行列式, トレースに等しい)

$n$  次正方行列  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とすると, 次が成立:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

### 証明の概略 (完全な証明は省略)

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は固有方程式の根であるため, 固有多項式は次のように因数分解できる:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (1)$$

- 式 (1) は  $\lambda$  に関する恒等式であり, 両辺の定数項と  $\lambda^{n-1}$  の係数を比較すると

$$[\text{定数項}] \quad \det(-A) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad [\lambda^{n-1} \text{ の係数}] \quad -\text{tr}(A) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$$

となって所望の等式を得る.

- $\det(\lambda I - A)$  の係数の計算には余因子展開を使う.



例題  $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  の固有値と固有空間を求めるよ.

サラスの公式

- サラスの公式で固有多項式を計算すると

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 & 3 \\ -6 & \lambda + 1 & -6 \\ -6 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 4)(\lambda + 1)(\lambda - 5) + 18(\lambda + 1)$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

$$= (\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

- よって,  $A$  の固有値は  $2, -1$  (重複度 2).

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- 1つ目の固有値に対応する固有空間

$$W(2) = \{\mathbf{x} \mid (2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

注意: 基底の取り方は一意ではない

- 2つ目の固有値に対応する固有空間

$$W(-1) = \{\mathbf{x} \mid (-I - A)\mathbf{x} = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

# 目次

① 固有値・固有ベクトルの定義と性質

② 行列の対角化

# 対角行列とその利点

対角成分以外の成分がすべてゼロの行列を**対角行列 (diagonal matrix)**という。

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

## 対角行列の性質

- 対角行列  $D$  の固有値は対角成分  $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$  と等しい。
- 対角行列  $D$  の  $k$  乗は、対角成分を  $k$  乗した対角行列である（積の計算が簡単）：

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

# 相似な行列

## 相似な行列

$n$  次正方行列  $A, B$  に対してある正則行列  $P$  が存在し,

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つとき,  $A$  と  $B$  は**相似 (similar)** な行列という.

## 定理 (相似な行列の固有値)

相似な行列  $A, B$  の固有値は一致する.

証明  $B = P^{-1}AP$  を満たす正則行列  $P$  をとる. このとき,

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(\lambda I - \underbrace{P^{-1}AP}_{=B}) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = \det(\lambda I - A) = f_A(\lambda). \end{aligned}$$

よって  $A$  と  $B$  の固有多項式は一致し, 固有値も同様に一致する.

# 対角化可能

## 定義 (対角化可能)

$n$  次正方行列  $A$  が対角行列と相似なとき、すなわちある正則行列  $P$  と対角行列  $D$  が存在して  $A = P^{-1}DP$  が成り立つとき、 $A$  は**対角化可能 (diagonalizable)** という。

### 対角化可能な行列の利点

- $A$  が対角化可能なとき、相似な行列の性質から

$$(A \text{の固有値}) = (D \text{の固有値}) = (D \text{の対角成分}).$$

- $A$  の  $k$  乗は

$$\begin{aligned} A^k &= \overbrace{(P^{-1}DP)(P^{-1}DP) \cdots (P^{-1}DP)(P^{-1}DP)}^{k \text{ 個}} \\ &= P^{-1}D^kP \end{aligned}$$

となり、 $D^k$  を用いて簡単に計算できる。



対角化可能な行列はどのような行列か？

## 定理 (対角化可能な必要十分条件)

$n$  次正方行列  $A$  に対して,

$$A \text{ が対角化可能} \iff A \text{ が } n \text{ 個の線形独立な固有ベクトルをもつ}$$

証明 ( $n$  個の固有ベクトルが線形独立)  $\Rightarrow$  (対角化可能) を示す.

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  を  $A$  の線形独立な固有ベクトル, それぞれに対応する固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とする. (すなわち  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ))
- $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  とすると,  $P$  は正則行列であり,

$$AP = A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n)$$

$$= (\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n) = \underbrace{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)}_P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- よって、上の両辺に  $P^{-1}$  を左から掛けると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- これより、 $A$  が  $n$  個の線形独立な固有ベクトルをもつとき、 $A$  は対角化可能である。

(対角化可能)  $\Rightarrow$  ( $n$  個の固有ベクトルが線形独立) を示す.

- $A$  が対角化可能なとき,

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}}_{D \text{とおく}} \quad (2)$$

を満たす正則行列  $P$  と対角行列  $D$  が存在.

- $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  とすると,  $P$  の正則性から列ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  は線形独立.
- 式 (2) の両辺に  $P$  を左から掛けると,

$$AP = PD.$$

- ここで

$$\begin{aligned} AP &= A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

$$PD = (d_{11}\mathbf{v}_1, d_{22}\mathbf{v}_2, \dots, d_{nn}\mathbf{v}_n)$$

であるから,  $AP = PD$  より

$$A\mathbf{v}_1 = d_{11}\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = d_{22}\mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad A\mathbf{v}_n = d_{nn}\mathbf{v}_n.$$

よって  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  は  $A$  の固有ベクトルである.

- 以上より,  $A$  が対角化可能のとき,  $A$  は  $n$  個の線形独立な固有ベクトルをもつ. □



# 固有ベクトルが線形独立になる十分条件

- 一般に  $n$  次正方行列が  $n$  個の線形独立な固有ベクトルを持つとは限らない.
- 次の命題は、固有ベクトルが線形独立であることの十分条件を与える.

## 定理 (固有値ベクトルが線形独立である十分条件)

$n$  次正方行列  $A$  の相異なる  $s$  個の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  に対応する固有値ベクトルは線形独立である.

証明  $s$  に関する帰納法で示す.

- 相異なる  $s - 1$  個の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$  に対応する固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}$  が線形独立と仮定.
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$  いずれとも異なる固有値を  $\lambda_s$  とし、対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v}_s$  とする.

$\rightsquigarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{v}_s$  が線形独立であることを示す.

- $c_1, c_2, \dots, c_s$  をスカラーとして、次が成り立つと仮定する:

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} \mathbf{v}_{s-1} + c_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}. \quad (3)$$

- 両辺に左から  $A$  を掛けて次を得る:

$$\begin{aligned} & c_1 A \mathbf{v}_1 + c_2 A \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} A \mathbf{v}_{s-1} + c_s A \mathbf{v}_s \\ &= c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1} \lambda_{s-1} \mathbf{v}_{s-1} + c_s \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4)$$

- 式 (4) - 式 (3)  $\times \lambda_s$  を計算すると、

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_s) \mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_s) \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) \mathbf{v}_{s-1} = \mathbf{0}$$

を得る。

- ここで  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}$  は線形独立であるため,

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_s) = c_2(\lambda_2 - \lambda_s) = \cdots = c_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0.$$

- $\lambda_s$  は  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$  いずれとも異なるため,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-1} = 0.$$

- したがって, 式 (3) から  $c_s = 0$ .
- 以上より,

$$\text{式 (3)} \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-1} = c_s = 0.$$

が示され,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{v}_s$  が線形独立であるとわかる.



# 対角化可能な行列の十分条件

## これまでのまとめ

- $n$  次正方行列が対角化可能  $\iff n$  個の線形独立な固有ベクトルが存在
- 相異なる固有値に対応する固有ベクトルは線形独立.  
~~ これらを組み合わせて、対角化可能性の十分条件を得る.

## 定理 (対角化可能な行列の十分条件)

$n$  次正方行列  $A$  の固有値がすべて異なるとき、 $A$  は対角化可能である。

- 行列が対角化可能であることの恩恵は「固有値・固有ベクトルの応用」で見る

# まとめ

## 講義の振り返り

- 固有値・固有ベクトルの定義とその性質
- 相似な行列と対角化可能な行列
- 行列が対角化可能であるための条件 (必要十分条件と十分条件)

## 自宅での復習

- 固有値・固有ベクトルの定義を再確認する.
- サラスの公式, 固有値・固有空間の基底を求める流れを確認する.
- 対角化可能性に関する証明の流れを確認する.