ラプラス変換

数理工学 第 12 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 17 日

授業で扱う微分方程式のトピック

1 階微分方程式

- 変数分離形
- 同次形
- 1 階線形微分方程式 (斉次，非斉次)
- Bernoulli 型の微分方程式

高階微分方程式

- (特殊な) 2 階微分方程式
- 高階線形微分方程式

ラプラス変換を用いた解法 $\rightsquigarrow$ 今回 – 第 14 回

目次

目次

ラプラス変換を用いた微分方程式の求解

- ラプラス変換では, t の関数 $f(t)$ を, s の関数 $F(s)$ に変換する.
  ただし, この変換は $f'(t)$ を大体 $sF(s)$ に変換するものとする.
- ラプラス変換を t の世界の微分方程式に適用すると, s の世界の代数方程式に変わる
- 代数方程式を問いた結果から元の微分方程式の解を求める.

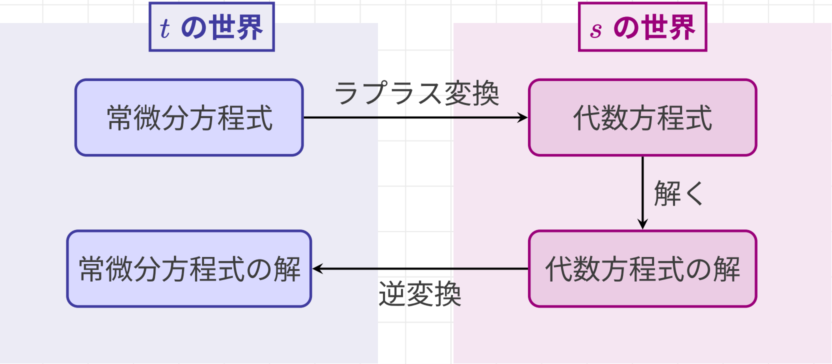

Figure: ラプラス変換を用いて常微分方程式を解く概念図

ラプラス変換の定義

定義 (ラプラス変換)

区間 $(0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(t)$ に対し,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

と定義される関数 $F(s)$ を, $f(t)$ の**ラプラス変換**という.

- 上の定義において, $f(t)$ を原関数, $F(s)$ を像関数という.
- ラプラス変換を表す記号として

$$L(f) = F(s)$$

と書くこともある.

$\boxed{\text{補足}}$ ラプラス変換の積分が収束する s の範囲を**収束域**という.

- 一般に像関数の変数 s は複素数の範囲をとる
- ただしこの授業では, s は (積分が収束する条件のもとで) 実数とする

ラプラス変換が存在するための条件

疑問　ラプラス変換 $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ に対し,

- どのような関数 $f(t)$ に対して
- どのような s で, 積分は収束するのか? 🤔

定理 (積分が収束する s の条件)

ある $s = s_0$ に対して $F(s_0)$ が収束するとき, 任意の $s > s_0$ で $F(s)$ は収束する.
つまり $s > s_0$ ではラプラス変換が定義される.

定理 (基本的な関数はラプラス変換可能)

指数関数, 三角関数, 多項式は適当な収束域でラプラス変換が定義できる．また, これらの積・スカラー倍・和で構成される関数もラプラス変換が定義できる．

目次

定数関数のラプラス変換

$f(t) = 1$ のラプラス変換は $s > 0$ のときに定義され,

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

導出

- ラプラス変換の定義から,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt = \int_0^\infty e^{-st} \, dt. \tag{1}$$

- $s \neq 0$ のとき,

$$\text{式 (1)} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & (s > 0), \\ -\infty & (s < 0). \end{cases}$$

- $s = 0$ のとき, 式 (1) $= \displaystyle\int_0^\infty 1 \, dt = \infty$.

指数関数のラプラス変換

a を実数とした指数関数 $f(t) = e^{at}$ のラプラス変換は $s > a$ のときに定義され，

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad (s > a).$$

導出

- ラプラス変換の定義から，$s \neq a$ のとき

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s-a} & (s > a), \\ -\infty & (s < a). \end{cases} \end{aligned}$$

- $s = a$ のとき，$F(s) = \int_0^\infty 1\,dt = \infty$.

三角関数のラプラス変換

a を実数とした関数 $f(t) = \cos(at)$ のラプラス変換は $s > 0$ のときに定義され,

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0).$$

導出 $s \leq 0$ のとき，積分は収束しない.

- $s > 0$ のとき，部分積分を用いると

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(at)\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos(at) \right]_0^\infty - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin(at)\, dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \left\{ \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin(at) \right]_0^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(at)\, dt \right\} = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2} F(s).
\end{aligned}$$

- これを整理して $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ を得る.

べき関数のラプラス変換

n を非負整数とする．$f(t) = t^n$ のラプラス変換は $s > 0$ のときに定義され，

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0). \tag{2}$$

導出　t^n のラプラス変換を $F_n(s) := L(t^n)$ と書き，n に関する漸化式から導出する．

- n を 1 以上の整数とする．$s > 0$ のとき，部分積分を用いて

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt \\ &= \underbrace{\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^n \right]_0^\infty}_{=0\ (\text{後述})} + \frac{n}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt}_{=F_{n-1}(s)} \\ &= \frac{n}{s} F_{n-1}(s). \end{aligned}$$

- よってこれを繰り返し用いて

$$F_n(s) = \frac{n}{s} F_{n-1}(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} F_{n-2}(s) = \cdots = \frac{n!}{s^n} F_0(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

- また $0! = 1$ と定義すると, 式 (2) は $n = 0$ のときも成り立つ.

$\boxed{\lim_{t\to\infty} e^{-st} t^n = 0 \text{ の証明}}$

- $s > 0$ のもとで $\lim_{t\to\infty} e^{-st} t^n$ を考える.
- このときロピタルの定理 $\left(\text{適当な条件のもと } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ が利用可能で

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{st}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{n}{s} \frac{t^{n-1}}{e^{st}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{n(n-1)}{s^2} \frac{t^{n-2}}{e^{st}} = \cdots = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{s^n} \frac{1}{e^{st}} = 0.\end{aligned}$$

目次

ガンマ関数の導入と定義

先ほどの議論　べき乗のラプラス変換について

- 指数 n が**非負整数**であるべき関数 $f(t) = t^n$ のラプラス変換を求めた
- 指数 n が**実数**の場合で，べき関数のラプラス変換は求められるか?🤔

💡 **ガンマ関数を用いると，実数の場合に拡張できる**

定義 (ガンマ関数)

正の実数 $r > 0$ に対して

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t} t^{r-1}\, dt$$

と定義される関数 $\Gamma(r)$ を**ガンマ関数**という.

- ガンマ関数と階乗の関係 (後述) から，ガンマ関数を階乗関数ということもある.

ガンマ関数のグラフ

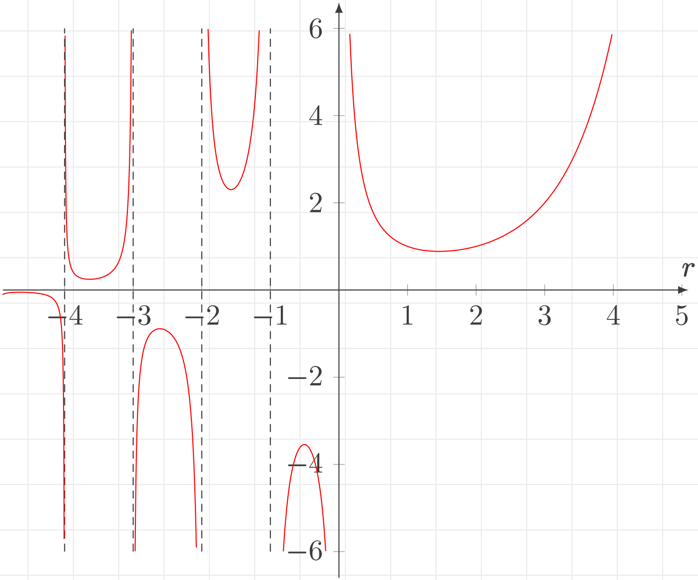

Figure: ガンマ関数 $\Gamma(r)$ (r が負の領域も含む)

ガンマ関数の性質 (階乗との関係)

ガンマ関数は非負整数の階乗を実数に拡張したものとみなせる (階乗関数とよばれる所以)

定理 (ガンマ関数は階乗の性質を満たす)

(1) 正の実数 $r > 0$ に対して, $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$.

(2) $\Gamma(1) = 1$.

(3) 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して, $\Gamma(n+1) = n!$.　(ただし $0! = 1$ と定義する)

証明

- 部分積分を用いれば,

$$\Gamma(r+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^r \, dt = \underbrace{\left[-e^{-t} t^r\right]_0^\infty}_{=0} + r\int_0^\infty e^{-t} t^{r-1} \, dt = r\Gamma(r).$$

- $r = 1$ の場合は $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = 1$ である. これらの結果から (3) も示される. □

ガンマ関数の性質 (特定の場合の関数値)

定理 (特定の実数におけるガンマ関数の値は具体的に求まる)

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ が成り立つ.

証明 置換積分を用いる.

- ガンマ関数の定義より
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$
- $\boxed{x = \sqrt{t}}$ と変数変換すると $t = x^2$ より $dt = 2x\,dx$ であるから,
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x\, dx = 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx}_{=\sqrt{\pi}/2} = \sqrt{\pi}$$
- なお最後の等式はガウス積分 $\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\right)$ に基づく. □

(ガウス積分の詳細は『経営工学の数理 I』例題 13.3 を見よ)

ガンマ関数に帰着できる積分の例

$\boxed{\text{例題}}$ 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}} t^{1/4}\, dt.$$

- $x = \sqrt{t}$ と変数変換すると, $t = x^2$ より $dt = 2x\, dx$ であるから,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}} t^{1/4}\, dt &= \int_0^\infty e^{-x} \left(x^2\right)^{1/4} \cdot 2x\, dx \\
&= 2\int_0^\infty e^{-x} x^{3/2}\, dx \\
&= 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

べき関数のラプラス変換の拡張

定理 (実数乗のべき関数のラプラス変換)

$r > -1$ とする. $f(t) = t^r$ のラプラス変換は $s > 0$ のときに定義され,

$$F(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad (s > 0).$$

証明　置換積分を用いる.

- $\boxed{u = st}$ と変数変換すると, $du = s\,dt$ である.
- よって $s > 0$ のとき

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^r \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r \frac{1}{s} \, du \\ &= \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^r \, du = \frac{1}{s^{r+1}} \Gamma(r+1). \quad \square \end{aligned}$$

主要な関数のラプラス変換の結果 (ラプラス変換表)

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$	$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$t\sin at$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$e^{bt}\cos at$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{bt}\sin at$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

まとめ

講義の振り返り

- ラプラス変換の定義
- 基本的な関数のラプラス変換
- ガンマ関数とラプラス変換

自宅での復習

- 基本的な関数のラプラス変換の導出を自分で計算して確認する．
- ガンマ関数の性質に関する証明を再現する．