

# 4次元の図形をイメージする数学

自然科学研究科 博士前期課程2年 田村研輔

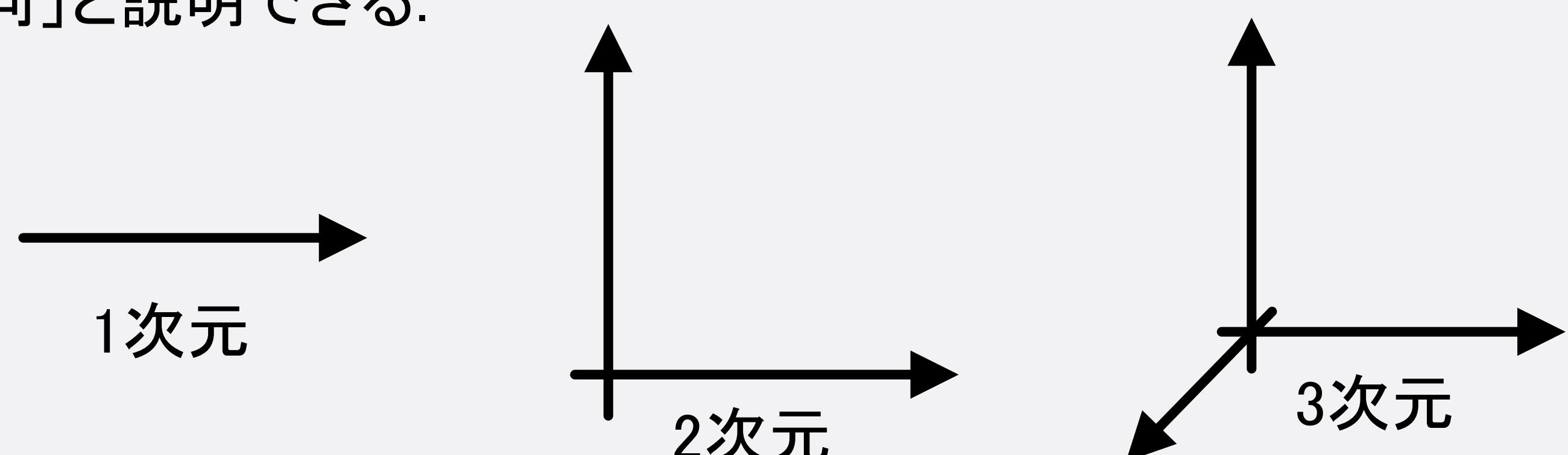


## 1 次元とは

私の専門であるグラフ理論について説明する前に、次元について説明する。

次元という言葉について、聞いたことはあるが説明できないという人が多いのではないだろうか。

厳密な定義は割愛するが、次元とは簡単に、「動くことができる方向」と説明できる。



1次元では左右のみ、2次元では上下左右、3次元では上下左右と前後に動けると思ってもらえば今回のことを理解するには十分である。

## 2 4次元とは

4次元について考えるために、3次元以下について考える。

2次元とは、「1次元空間(直線)の積み重ね」と説明できる。

3次元とは、「2次元空間(平面)の積み重ね」と説明できる。

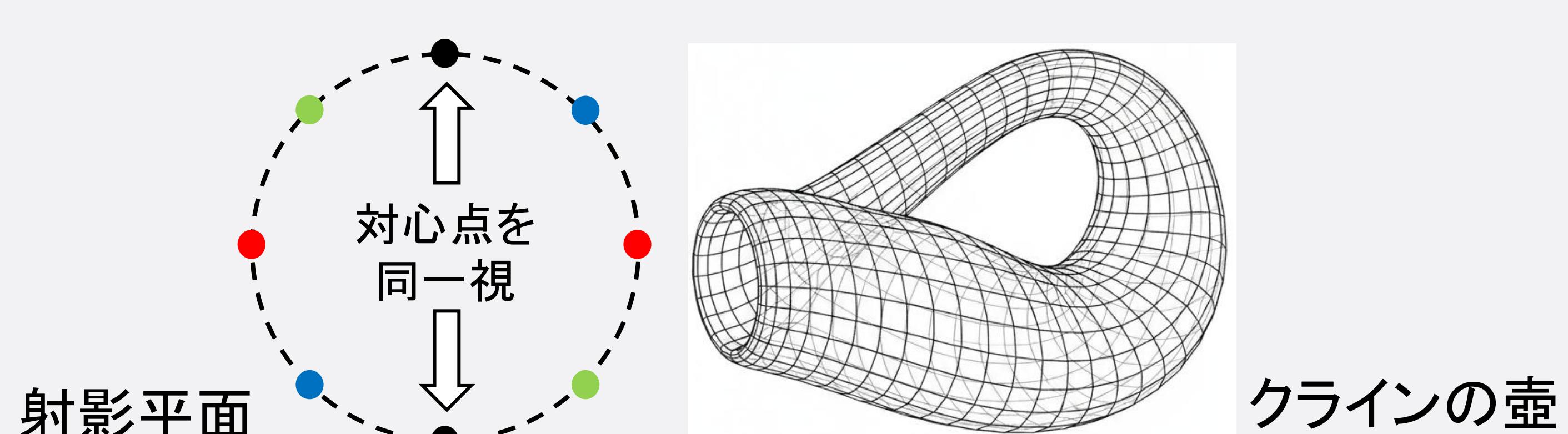
これらのことから、4次元とは、「3次元空間の積み重ね」となる。



2次元は、1次元空間(直線)が2軸目の任意の場所に存在する。3次元は、2次元空間(平面)が3軸目の任意の場所に存在する。これと同様に、4次元は、3次元空間が4軸目の任意の場所に存在する。

## 3 4次元空間での図形とその展開図

球面など、3次元以上にしか存在できない図形があるように、4次元以上にしか存在できない図形が存在する。例えば、射影平面やクラインの壺である。

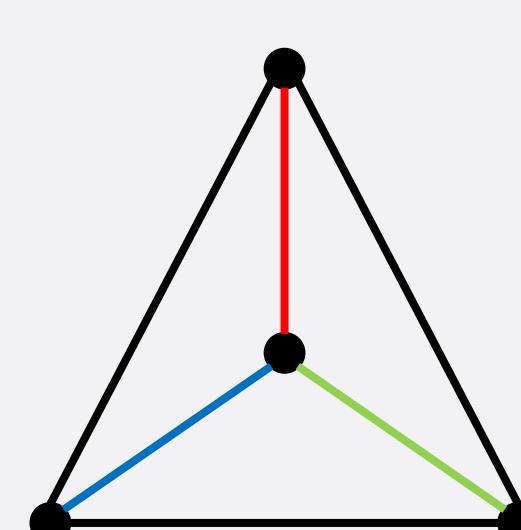


射影平面とは、円周の対心点を同一視したものであり、クラインの壺とは、内側と外側の区別がない図形である。上図右のクラインの壺の図は3次元に射影したものであり、そのため、自己交差をもつてしまう。

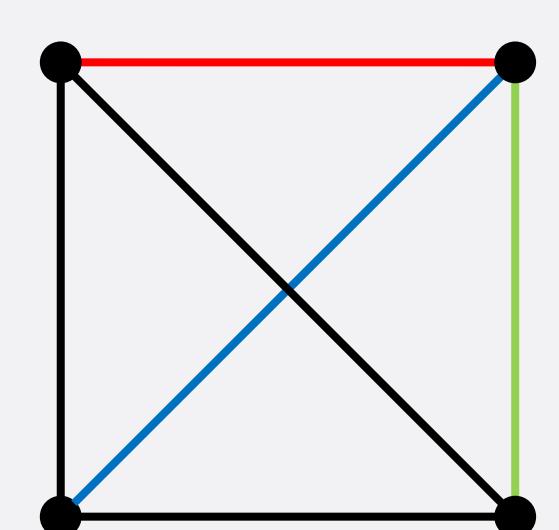
## 4 “離散”グラフと埋め込み

多くの人が想像するグラフと言えば、関数のグラフだろう。しかしここでは、以下に示すような点と線のみからなる図形のことをグラフという。

点と線のつながりにのみ着目しているので、下の二つは同じものと見なせる。



どちらも点が4つで、自分以外の全ての点と線で結ばれている。

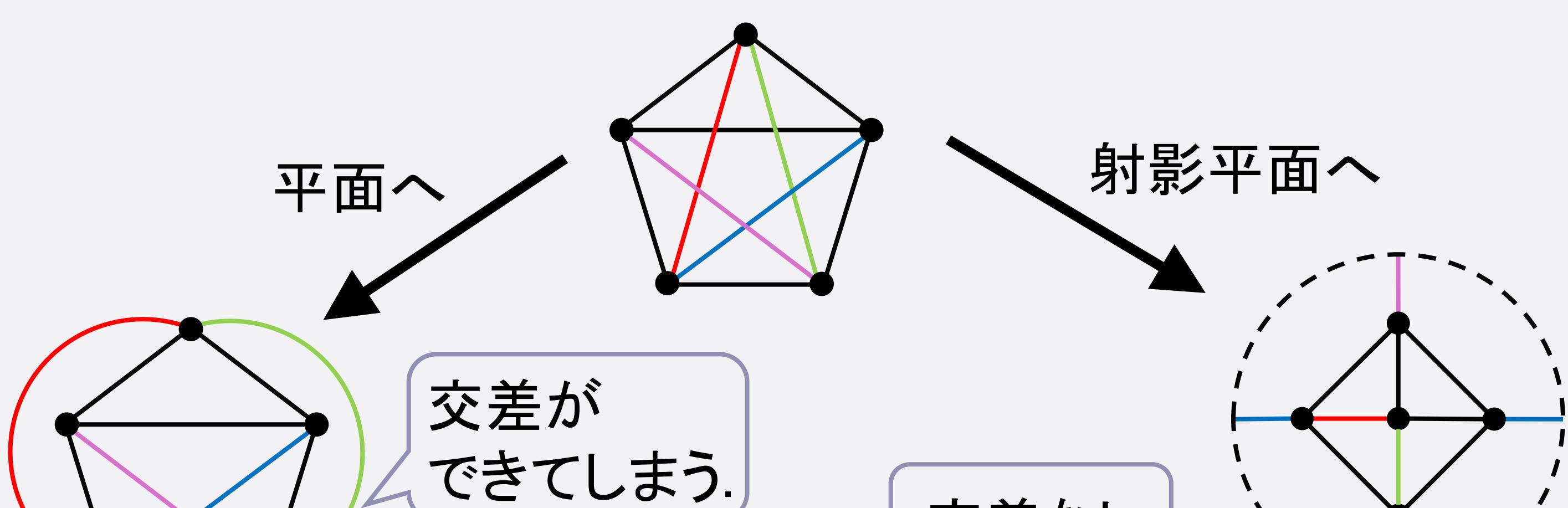


また、面上に辺の交差なくグラフを描くことを「埋め込み」という。上図では、左のグラフは平面に埋め込まれているが、右図は線が交差しているため、埋め込まれていないことになる。

## 5 様々な面の上へのグラフの描画

平面上には埋め込むことはできないが、4次元の図形には埋め込むことができるグラフが存在する。

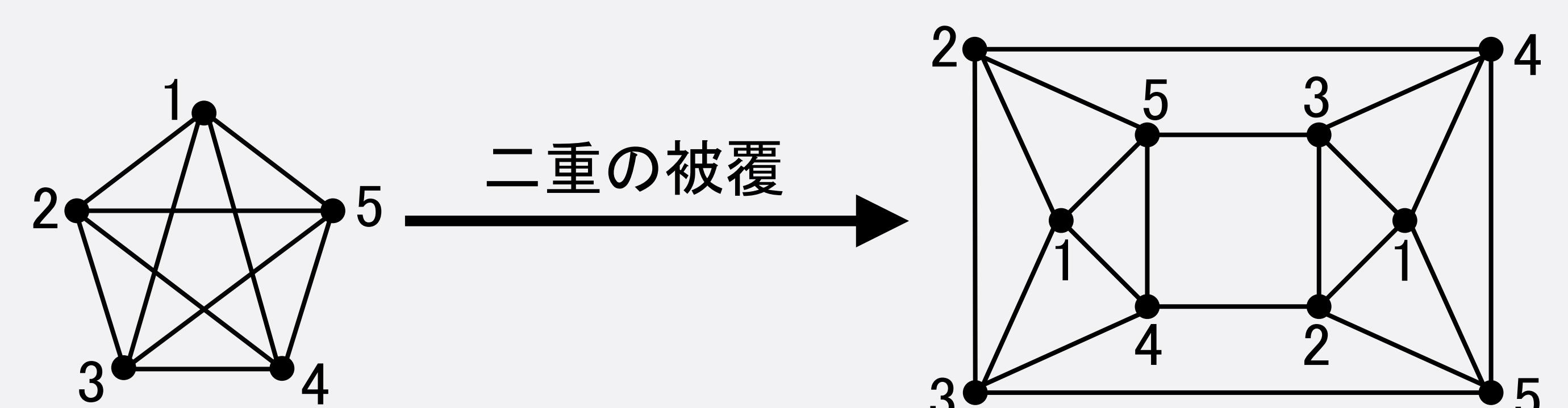
例えば下のグラフは、平面には埋め込むことができないが、射影平面には埋め込みが可能となる。



このように、同じグラフでも図形によって埋め込みができる場合とできない場合がある。

## 6 グラフの被覆とは

平面に埋め込むことができないグラフについて、「グラフの被覆」を考えることでその被覆を平面に埋め込むことができる。被覆とは、「グラフについて、頂点の隣接関係を保ったまま定数倍」することである。



上の図のように、頂点の隣接関係を崩さないようにグラフの頂点を2倍にすると、平面上に埋め込むことが可能となる。このように、様々な面の上でのグラフやそのグラフの被覆の挙動について考えることが私の研究テーマである。