

数学社线代4

2.2 消元法的概念

- 1 对于 $m = n = 3$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有三个方程式与三个未知数 x_1, x_2, x_3 。
- 2 前两个方程式是 $a_{11}x_1 + \dots = b_1$ 与 $a_{21}x_1 + \dots = b_2$ 。
- 3 第一方程式乘 a_{21}/a_{11} , 然后从第二式减去: x_1 被消元。
- 4 角落单元 a_{11} 是第一个主元(pivot), 比值 a_{21}/a_{11} 是第一个乘数。
- 5 从每个剩下的方程式 i 减去 a_{i1}/a_{11} 乘第一方程式, 方程式 i 会消去 x_1 。
- 6 现在最后 $n - 1$ 个方程式包含 $n - 1$ 个未知数 x_2, \dots, x_n 。重复步骤消去 x_2 。
- 7 如果零出现在主元, 消元法崩溃, 交换两个方程式可能可以解救。

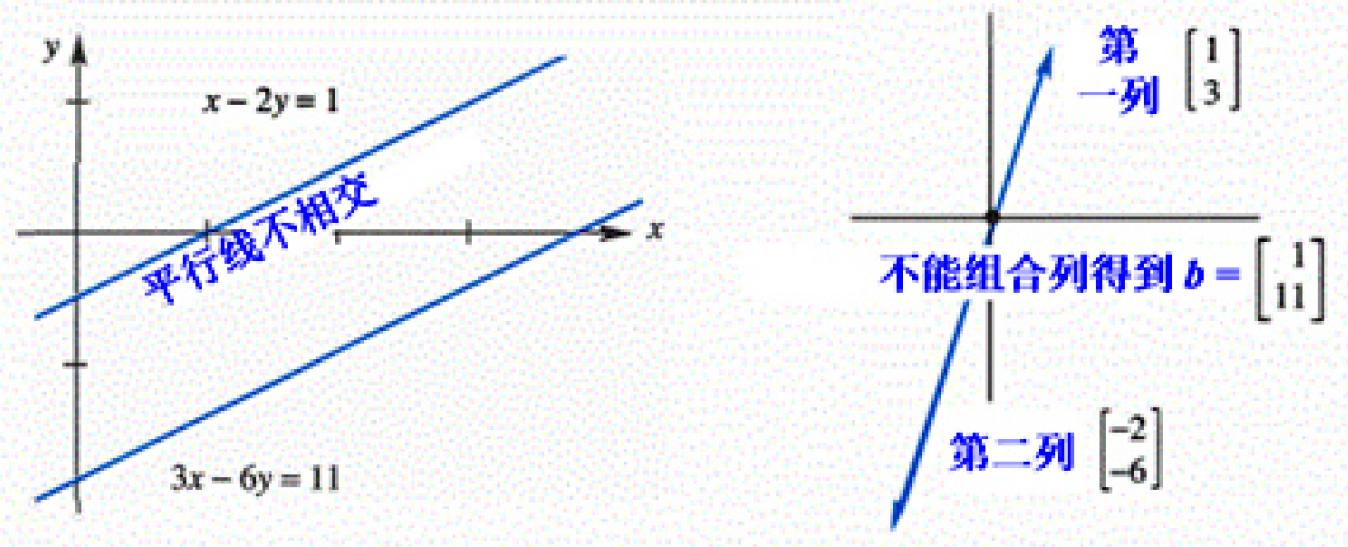
如果把第一式变成 $4x - 8y = 4$ (一样的直线, 但是第一主元变成 4), 你就会看到乘数的规则。现在正确的乘数变成 $l = 3/4$ 。把要消去的系数 3 除以主元 4 就得到所需的乘数:

$$\begin{array}{ll} 4x - 8y = 4 & \text{第一式乘 } 3/4 \\ 3x + 2y = 11 & \text{从第二式减去} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4x - 8y & = 4 \\ 8y & = 8 \end{array}$$

最终系统是三角形而且最后的方程式得到 $y = 1$ 。反向代入得到 $4x - 8 = 4$ 与 $4x = 12$ 与 $x = 3$ 。我们改变了数字, 但是没有改变直线, 也没有改变解。除以主元得到乘数 $l = 3/4$:

主元 = 执行消去的行的第一个非零数
乘数 = (要消去的单元) / (主元) = $3/4$



$$\begin{aligned} 2x + 4y - 2z &= 2 \\ 4x + 9y - 3z &= 8 \\ -2x - 3y + 7z &= 10 \end{aligned}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
已经变成
 $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 2z &= 2 \\ 1y + 1z &= 4 \\ 4z &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

结合律为真
交换律为假

$A(BC) = (AB)C$
通常 $AB \neq BA$

END